

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2005

Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

<http://www.neva.ru/journal>
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Стохастические дифференциальные уравнения

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А.ГУБКИН

Россия, 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,
Уральский государственный университет,
Математико-механический факультет
e-mail: andreygubkin@mail.ru

Л.Б.РЯШКО

Россия, 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,
Уральский государственный университет,
Математико-механический факультет
e-mail: lev.ryashko@usu.ru

Аннотация

Рассмотрен критерий устойчивости стохастического линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. Предложен итерационный процесс для проверки условий критерия. Доказана его сходимость. В качестве примера вычислений построены области устойчивости стохастического уравнения Матье.

⁰Работа поддержана грантом РФФИ №04-01-96098урал.

1. Введение

Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами являются классическим объектом теории устойчивости.

В детерминированном случае устойчивость уравнений с периодическими коэффициентами достаточно хорошо изучена (см. например, [1]-[3]).

Теория Флоке-Ляпунова дает простые необходимые и достаточные условия для исследования на детерминированную устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами. Эта теория распространяется и на анализ устойчивости периодических решений (предельных циклов) нелинейных систем.

Большой интерес вызывает построение областей устойчивости и неустойчивости систем в пространстве параметров.

Например, в [1] (стр. 285) исследуется линейное уравнение Матье: строится область детерминированной неустойчивости и изучается ее изменение, вызванное добавлением трения. Другой пример построения области устойчивости для уравнения второго порядка на основе теории Флоке приведен в [2], стр. 205.

Геометрическое описание позволяет сделать более наглядными общий характер зависимости устойчивости системы от действующих факторов и важные частные явления, такие как параметрический резонанс.

Стохастическая устойчивость динамических систем является менее изученной областью, но, тем не менее, исследованиям в этом направлении посвящен большой ряд работ, в частности [4]-[12].

В [6] (см. §19) рассматриваются параметрические колебания. В качестве простейших примеров систем приводятся колебательный контур с переменными индуктивностью и емкостью и маятник, совершающий горизонтальные колебания при вертикальных перемещениях точки подвеса. Рассматриваются случаи, когда случайные возмущения имеют малую интенсивность так, что колебания не теряют формы, близкой к синусоидальной. Наличие малого параметра позволяет применять асимптотические методы для исследования параметрического резонанса как первого, так и более высоких порядков.

В работе [11] (глава 2) рассматриваются колебания динамических систем с одной степенью свободы, подвергающиеся воздействию случайных возмущений. В частности, исследуется квазилинейная система, возбуждаемая внешними и параметрическими случайными возмущениями. Проведен ана-

лиз (глава 4) некоторых существенно нелинейных стохастических задач динамики машин и механизмов, содержащих неуравновешенные вращающиеся элементы. Стохастический анализ помехоустойчивости рассматривается как задача о вероятности достижения случайным процессом некоторой заданной границы и проводится с помощью нахождения и исследования стационарных решений уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова.

Начиная с работы [5] известно, что метод стохастических функций Ляпунова является основным для анализа устойчивости. С помощью этого метода анализ среднеквадратичной устойчивости линейной стохастической системы в [7] (глава 5) был сведен к анализу устойчивости некоторого детерминированного матричного дифференциального уравнения (уравнения относительно матрицы вторых моментов).

В работе [9] (§5.3) для решения задач устойчивости используется метод моментных функций. В качестве примера рассматривается стохастический аналог уравнения Маттье-Хилла с постоянными коэффициентами. Метод моментных функций дает необходимое и достаточное условие устойчивости в среднем квадратичном.

В работе [13] для исследования устойчивости линейных стохастических систем с периодическими коэффициентами описан подход, основанный на спектральной теории положительных операторов. Приводится критерий стохастической экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном. Для исследования уравнения вводится некоторый оператор стохастической устойчивости. Показателем стохастической устойчивости уравнения является спектральный радиус этого оператора.

Для этого же типа систем в стационарном случае в работе [7] приведен конструктивный критерий, основанный на методе моментных функций.

Аналитическая проверка условий спектрального критерия из [13] (как и многих других) возможна лишь в самых простых случаях систем (например, с кусочно постоянными коэффициентами). В данной работе предлагается итерационный метод для проверки условий этого критерия в общем случае, а также доказывающаяся его сходимости. Рассматриваются примеры применения данного метода для исследования систем.

Предлагаемый метод используется для построения областей стохастической устойчивости, а также для исследования изменения этих областей в зависимости от параметров системы. Знание характера поведения областей устойчивости, в свою очередь, дает возможность гибко управлять парамет-

рами системы в зависимости от уровня шумов для сохранения устойчивости.

В данной работе также показываются некоторые практические преимущества спектрального критерия над методом моментных функций.

В п.2 приводятся основные теоретические сведения о спектральном критерии экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном, вводится оператор стохастической устойчивости. В пп.3,4 рассматривается итерационный метод нахождения спектрального радиуса оператора стохастической устойчивости и доказывается его сходимости. Доказательство опирается на теорию положительных операторов ([14], [15]). Эффективность данного метода демонстрируется в п.5 на примере построения областей устойчивости и неустойчивости для модельной системы затухающих колебаний маятника при действующих случайных помехах (уравнение Матье с внесенным трением и действующим белым шумом). В п.6 приведены краткие характеристики предлагаемого численного метода.

2. Спектральный критерий стохастической устойчивости

Рассматривается дифференциальное уравнение n -го порядка со стохастически возмущенными T -периодическими коэффициентами (1):

$$y^{(n)} + (a_1(t) + \alpha_1(t) \cdot \dot{w}_1)y^{(n-1)} + \dots + (a_n(t) + \alpha_n(t) \cdot \dot{w}_n)y = 0, \quad (1)$$

где $w_r, r = 1, \dots, n$ – независимые стандартные винеровские процессы ($\dot{w}_r, r = 1, \dots, n$ – белые шумы), $\alpha_r, r = 1, \dots, n$ – интенсивности шумов (T -периодические функции). В работе изучается экспоненциальная стохастическая устойчивость уравнения (1) в среднем квадратичном (см. [7]). Такой тип устойчивости для краткости будем называть стохастической устойчивостью. Предполагается, что невозмущенное уравнение (при $\alpha_r \equiv 0, r = 1, \dots, n$) является экспоненциально устойчивым. Это условие является необходимым для стохастической устойчивости этого уравнения (см. далее теорему 1).

Для исследования уравнения со случайными возмущениями в [13] вводится некоторый оператор стохастической устойчивости B . Спектральный радиус этого оператора является показателем устойчивости уравнения (см. далее Теорему 1).

Пусть Σ^n – пространство непрерывных T -периодических симметричных матричных функций размера $n \times n$, $\Sigma = \Sigma^1$ – пространство непрерывных T -периодических скалярных функций. Пусть $K = \{\varphi \in \Sigma | \varphi(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]\}$

– конус неотрицательных непрерывных функций, $K_1 = \{\varphi \in \Sigma | \varphi(t) > 0, \forall t \in [0, T]\}$ – его внутренность.

Оператор стохастической устойчивости B , действующий в пространстве Σ , определяется следующим образом:

$$B[\varphi] = -\text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\varphi Q]G),$$

где

$$\mathcal{A}[V] = V'(s) + A^T(s)V(s) + V(s)A(s),$$

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(s) & -a_{n-1}(s) & -a_{n-2}(s) & \dots & -a_1(s) \end{pmatrix},$$

$$Q(t) = \text{diag}(\alpha_n^2(t), \dots, \alpha_1^2(t)), G = e^T e, e = (0, 0, \dots, 1).$$

Здесь \mathcal{A} – матричный оператор Ляпунова для детерминированной системы

$$dx = A(t)xdt, \tag{2}$$

действующий на множестве непрерывно дифференцируемых функций из Σ^n , с областью значений в Σ^n . Система (2) является экспоненциально устойчивой в силу экспоненциальной устойчивости уравнения (1). Это условие обеспечивает существование обратного оператора \mathcal{A}^{-1} , присутствующего в определении оператора B (см. [13]).

В теореме 2 в [13] приведен критерий устойчивости стохастически возмущенной системы n дифференциальных уравнений первого порядка, на основании которого там же формулируется критерий устойчивости уравнения (1):

Теорема 1. Уравнение (1) стохастически устойчиво тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- а) система (2) экспоненциально устойчива,
- б) $\rho(B) < 1$,

где $\rho(B)$ – спектральный радиус оператора B .

3. Итерационный метод нахождения спектрального радиуса оператора B

Для вычисления спектрального радиуса предлагается использовать следующий метод.

Рассмотрим итерационный процесс

$$\varphi_{i+1} = \frac{B(\varphi_i)}{\|B(\varphi_i)\|} \quad (3)$$

с некоторым начальным приближением $\varphi_0 \in K \setminus \{0\}$.

Пусть этот метод сходится к некоторому элементу $\tilde{\varphi} \in K_1$, $\|\tilde{\varphi}\| = 1$ (далее будут сформулированы и доказаны достаточные условия сходимости). Этот элемент является собственным вектором оператора B , соответствующим собственному значению $\lambda_0 = \rho$. Отсюда, учитывая то, что $\tilde{\varphi} > 0$ (это следует из леммы 2, п.4), получаем значение ρ :

$$\rho = \frac{B(\tilde{\varphi})}{\tilde{\varphi}}.$$

При расчетах на практике итерационный метод останавливается на некотором шаге. В связи с этим в правой части равенства стоит функция, не являющаяся постоянной. В качестве значения ρ берется среднее значение этой функции. Модуль разности ее максимума и минимума является оценкой погрешности метода.

Замечание 1. Для вычисления значений оператора B используются методы вычисления значений обратного оператора A^{-1} , описанные в [13].

4. Сходимость итерационного метода

Для доказательства сходимости данного метода используется теория положительных операторов, изложенная в [14], [15]. В частности, используются теоремы 11.5 и 15.4 из [15]. Доказательство представлено в виде трех лемм и основной части. В леммах формулируются условия на коэффициенты уравнения, а также доказывается полная непрерывность, сильная положительность и v -ограниченность оператора B . Лемма 2 используется для доказательства леммы 3.

Теорема 2. Пусть T -периодичные функции $a_i, \alpha_i (1 \leq i \leq n)$ удовлетворяют следующим условиям:

а) $a_i (1 \leq i \leq n)$ непрерывны,

б) $\forall s_1, s_2, 0 \leq s_1 < s_2 < +\infty$

$$\int_{s_1}^{s_2} |\alpha_n(t)| dt > 0.$$

Тогда итерационный метод (3) сходится при любой начальной функции $\varphi_0 \in K \setminus \{0\}$.

Лемма 1. Оператор B является вполне непрерывным.

Доказательство.

Оператор B является композицией четырех операторов

$$B = -\text{tr} \cdot \mathbb{G} \cdot \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathbb{Q},$$

где $\mathbb{Q}(\varphi) = \varphi Q, \mathbb{G}(V) = VG$.

Операторы $-\text{tr}, \mathbb{Q}, \mathbb{G}$ непрерывны. Поэтому достаточно доказать, что оператор \mathcal{A}^{-1} является вполне непрерывным, так как композиция вполне непрерывного оператора и непрерывного является вполне непрерывным оператором (см. [17], глава IX, §2).

Значением оператора $\mathcal{A}^{-1}(V)$ является периодическое решение системы $\frac{n(n+1)}{2}$ (так как матрицы симметричны) линейных неоднородных (если $V \neq 0$) уравнений с непрерывными коэффициентами вида:

$$y(t)' = M(t)y(t) + f(t).$$

Эта система имеет фундаментальную систему решений $Y(t)$ ($Y(t)$ – непрерывная функция), и ее периодическое решение задается следующей формулой (формула Коши, в которой произвольная постоянная найдена из условия периодичности решения):

$$y(t) = Y(t) \left(\int_0^t Y^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + \tilde{C} \right),$$

где

$$\tilde{C} = [Y(0) - Y(T)]^{-1} \int_0^T Y^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.$$

С использованием этого представления полная непрерывность оператора B легко доказывается с помощью теоремы Арцела (см. [16]). ■

Определение 1. Конус называется телесным, если он содержит внутренние точки.

Определение 2. Пусть K – телесный конус и $\forall x \in K \setminus \{0\}$ значение Ax является внутренним элементом K . Тогда оператор A называется сильно положительным.

Лемма 2. Оператор B является сильно положительным.

Доказательство.

K является телесным конусом, так как любая положительная непрерывная функция является его внутренней точкой.

Пусть $\varphi \in K \setminus \{0\}$. Докажем, что $B[\varphi] \in K_1$, то есть $B[\varphi] > 0$.

Согласно замечанию 1 в [13], стр. 22, оператор B имеет следующее представление:

$$B[\varphi](s) = -\operatorname{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\varphi Q]G)(s) = \int_s^\infty x^T(t)\varphi(t)Q(t)x(t)dt,$$

где $x(t) = x(t, s, x_0)$ – решение системы (2) с начальным условием $x(s) = x_0 = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Продолжая равенство, получаем следующее представление для оператора B :

$$\begin{aligned} B[\varphi](s) &= \int_s^\infty \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \varphi(t) \begin{pmatrix} \alpha_n^2(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{n-1}^2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_1^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_s^\infty \varphi(t) \left[\sum_{i=1}^n \alpha_{n-i+1}^2(t) x_i^2(t, s) \right] dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Нужно доказать, что при $0 \leq s < T$ этот интеграл положителен. Рассмотрим полуинтервал $I = [T, 2T)$.

Функция φ по предположению не равна нулю тождественно, следовательно, существует интервал $I_1 \subset I$ такой, что на нем $\varphi(t) > 0$ (если в качестве I

взять полуинтервал $[s, T)$, то такого подынтервала можно было и не найти – если точки, где $\varphi > 0$ лежат левее s).

Докажем, что на I_1 существует точка, в которой x_1 не равно нулю. Предположим противное. Пусть $x_1(t) \equiv 0, t \in I_1$. Тогда, в силу системы (2), $x_i(t) \equiv 0, t \in I_1, 1 < i \leq n$. Следовательно, $x_n(t) \equiv 0, t \geq s$, так как (2) – линейная однородная система с непрерывными коэффициентами. Это противоречит начальному условию $x_0 = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Таким образом, существует интервал $I_2 \subset I_1$, на котором $x_1 > 0$. Учитывая требование, накладываемое на α_n , получаем, что интеграл (4) положителен. Сильная положительность оператора B доказана. ■

Определение 3. Пусть $v \in K \setminus \{0\}$. Оператор A называется v -ограниченным, если при некоторых скалярных функциях $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ выполняется неравенство

$$\alpha(x)v \leq Ax \leq \beta(x)v$$

для всех $x \in K$, причем $\alpha(x), \beta(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Лемма 3. Оператор B является v -ограниченным для любого $v \in K_1$.

Доказательство.

Пусть $x \in K \setminus \{0\}, v \in K_1$.

По лемме 2 $B[x] > 0$. Пусть

$$\bar{\alpha}(x) = \min_{[0, T]} B[x] > 0,$$

$$\bar{\beta}(x) = \max_{[0, T]} B[x] > 0.$$

Тогда

$$\frac{\bar{\alpha}(x)}{\max v} v \leq \bar{\alpha}(x) \leq B[x] \leq \bar{\beta}(x) \leq \frac{\bar{\beta}(x)}{\min v} v.$$

Таким образом, в качестве искомым $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ можно взять следующие функции:

$$\alpha(x) = \frac{\bar{\alpha}(x)}{\max v}, \beta(x) = \frac{\bar{\beta}(x)}{\min v}. \blacksquare$$

Доказательство теоремы.

Основной теоремой, используемой при доказательстве, является теорема 15.4 из [15] (стр. 121).

Докажем выполнение условий теоремы 15.4. Из лемм 1, 3 следует выполнение условий теоремы 11.5 из [15] (стр. 88). Теорема 11.5 обеспечивает выполнение основных условий теоремы 15.4.

Далее требуется положительность спектрального радиуса оператора B . Для доказательства этого факта достаточно применить теорему 16.1 из [15], где в качестве x_0 взята любая функция из K_1 .

И, наконец, очевидно, что конус K является воспроизводящим в Σ . Таким образом, условия теоремы 15.4 выполняются.

Теорема 15.4 дает следующее.

Пусть $\tilde{\varphi}$ – собственный вектор оператора B : $B\tilde{\varphi} = \rho\tilde{\varphi}$, $\|\tilde{\varphi}\| = 1$, f – собственный вектор сопряженного оператора B^* , соответствующий собственному значению ρ ($f \in E^*$ – линейный непрерывный функционал), и $f(\tilde{\varphi}) = 1$.

Пусть $g_0 \in K_1$, $g_i = Bg_{i-1}$, $f(g_0) > 0$. Тогда последовательность g_i сходится к вектору $\tilde{\varphi}$ по направлению в том смысле, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|Qg_i\|}{\|Pg_i\|} = 0,$$

где $P(x) = f(x)\tilde{\varphi}$, $Q(x) = x - f(x)\tilde{\varphi}$.

Для положительных операторов условие $f(g_0) > 0$ выполняется всегда (см. [15], п.15.3, стр. 122).

Осталось доказать, что при этих условиях метод (3) сходится к $\tilde{\varphi}$: $\varphi_i \rightarrow \tilde{\varphi}$.

Имеем:

$$\frac{\|Qg_i\|}{\|Pg_i\|} = \frac{\|g_i - f(g_i)\tilde{\varphi}\|}{\|f(g_i)\tilde{\varphi}\|} \rightarrow 0.$$

Методом математической индукции докажем, что $f(g_i) > 0$ для всех $i \geq 0$. Имеем $f(g_0) > 0$, $f(g_{i+1}) = f(Bg_i) = B^*(f)(g_i) = \rho f(g_i) > 0$.

Функциям $\varphi_i, i > 1$ из (3) здесь соответствует $\frac{B(g_i)}{\|B(g_i)\|}$. Следовательно

$$\frac{\|\varphi_i - f(\varphi_i)\tilde{\varphi}\|}{\|f(\varphi_i)\tilde{\varphi}\|} \rightarrow 0. \tag{5}$$

Пусть $\psi_i = \varphi_i - f(\varphi_i)\tilde{\varphi}$. В знаменателе дроби (5) стоит ограниченная величина, так как $\|\varphi_i\| = 1$, f – ограниченный функционал. Поэтому

$$\|\psi_i\| \rightarrow 0, \tag{6}$$

$$\varphi_i = f(\varphi_i)\tilde{\varphi} + \psi_i. \tag{7}$$

Так как $\|\varphi_i\| = \|\tilde{\varphi}\| = 1$ и $f(\varphi_i) > 0$, то из (7) следует, что $f(\varphi_i) \rightarrow 1$. Следовательно, учитывая (6) и (7), получаем $\varphi_i \rightarrow \tilde{\varphi}$. ■

5. Построение областей устойчивости

Рассмотрим следующее стохастическое уравнение (см. также [9], §5.3):

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega^2(1 + \varepsilon \cos(t) + \alpha\dot{w})y = 0. \quad (8)$$

Это стохастический аналог детерминированного уравнения Матье

$$\ddot{y} + \omega^2(1 + \varepsilon \cos(t))y = 0,$$

исследовавшегося в [1].

В стохастическом уравнении присутствует постоянный коэффициент трения $\gamma > 0$, что является необходимым условием для асимптотической устойчивости соответствующего детерминированного уравнения. Случайные помехи $\omega^2\alpha\dot{w}$ представляют собой белый шум постоянной интенсивности ($\omega^2\alpha$) (см. п.2).

Коэффициенты этого стохастического уравнения при $\alpha \neq 0$ удовлетворяют условиям теоремы сходимости (п. 4). Поэтому для вычисления спектрального радиуса оператора B будем применять описанный выше итерационный метод (см. п.3).

Уравнение имеет четыре параметра: γ , ω , ε , α .

5.1. Области устойчивости в плоскости параметров γ и α .

Пусть, например, $\omega = 2$. Исследуем стохастическую устойчивость уравнения в области значений параметров $0.01 \leq \gamma \leq 2$, $0.01 \leq \alpha \leq 1$ при $\varepsilon = 0, 1, 2$.

В случае $\varepsilon = 0$ имеем уравнение с постоянными коэффициентами. Поэтому в уравнение $B[\varphi] = \rho\varphi$ для поиска спектрального радиуса ρ можно просто подставить $\varphi \equiv 1$. В этом случае матричное дифференциальное уравнение для нахождения значений оператора \mathcal{A}^{-1} вырождается в алгебраическую систему уравнений. Таким образом, имеем тождество

$$\rho = B[1] = -\text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[Q]G). \quad (9)$$

Это, в частности, означает, что при $\varepsilon = 0$ константа $\varphi \equiv 1$ является собственным вектором оператора B .

В случае уравнения (8) вычисления по формуле (9) дают равенство

$$\rho = \frac{\omega^2 \alpha^2}{2\gamma}. \quad (10)$$

Обозначим через S_ε множество пар (γ, α) , для которых спектральный радиус оператора B меньше единицы при заданном значении ε . Множество S_ε есть область стохастической устойчивости уравнения (8).

При построении областей устойчивости в случае, когда один из параметров – уровень шума (мультипликативный параметр), существенную роль играет следующий факт (см. [13], п. 2):

$$\rho(\alpha) = \alpha^2 \rho(1). \quad (11)$$

Это дает возможность при заданном трении γ вычислить критическое значение α^* такое, что при $\alpha < \alpha^*$ система будет устойчива, а при $\alpha \geq \alpha^*$ – неустойчивой:

$$\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma, 1)}}.$$

Таким образом, вместо построения двумерной области устойчивости достаточно построить одномерную линию, являющуюся графиком критических значений интенсивности шума. Этот факт дает большое преимущество спектральному критерию перед методом моментных функций, так как в ММФ нет возможности избежать итераций по двумерной области.

На Рис. 1 изображены области устойчивости S_0 , S_1 и S_2 .

Как видно из рисунка, границей области S_0 (множество точек, где $\rho = 1$) является кривая δ , задаваемая уравнением $\gamma = 2\alpha^2$, что хорошо согласуется с формулой (10) ($\omega = 2$). Данное совпадение может служить подтверждением корректности программной реализации рассматриваемого итерационного метода.

Добавление периодической составляющей в коэффициент уравнения повлекло сужение области стохастической устойчивости ($S_1 \subset S_0$). При фиксированном трении усиление помех вызывает снижение стохастической устойчивости. А при фиксированном уровне помех увеличение трения приводит к усилению стохастической устойчивости.

Знание границы области устойчивости позволяет, регулируя трение, сохранять устойчивость системы при изменении интенсивности шумов.

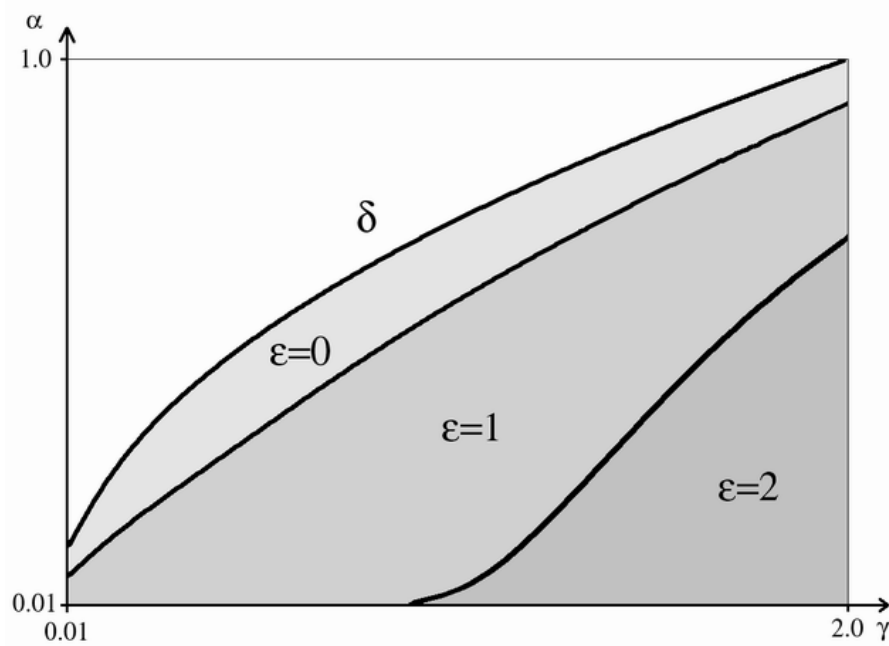


Рис. 1. Области стохастической устойчивости уравнения (8) в плоскости его параметров $0.01 \leq \gamma \leq 2, 0.01 \leq \alpha \leq 1$.

В рассмотренной области граница области устойчивости S_0 является графиком выпуклой вверх функции от γ (см. (10)). Граница области S_1 не является выпуклой вверх примерно до $\gamma = 0.64$, а затем становится выпуклой вверх. Это происходит из-за непостоянной составляющей в коэффициенте, влияние которой затухает по мере возрастания α . Еще лучше влияние непостоянной составляющей видно по форме границы области S_2 .

Таким образом, для сохранения стохастической устойчивости при увеличении интенсивности шумов зависимость между параметрами $\gamma = \gamma(\alpha)$ нужно подбирать выпуклой вниз, например вида $\gamma(\alpha) \sim C\alpha^b$, где $b > 2$ – из-за ограничения параболой.

5.2. Области неустойчивости в плоскости параметров ε и ω .

В [1] исследования уравнения Матье проводятся в плоскости параметров ω, ε (без стохастических шумов). Рассматривается поведение области детерминированной неустойчивости при разных значениях коэффициента γ (трения). При отсутствии трения область неустойчивости представляет собой зубцы, которые касаются оси ω в полужелтых точках (см. [1] или Рис. 2).

Затем в систему вносится трение (здесь $\gamma = 0.03$), что делает ее более

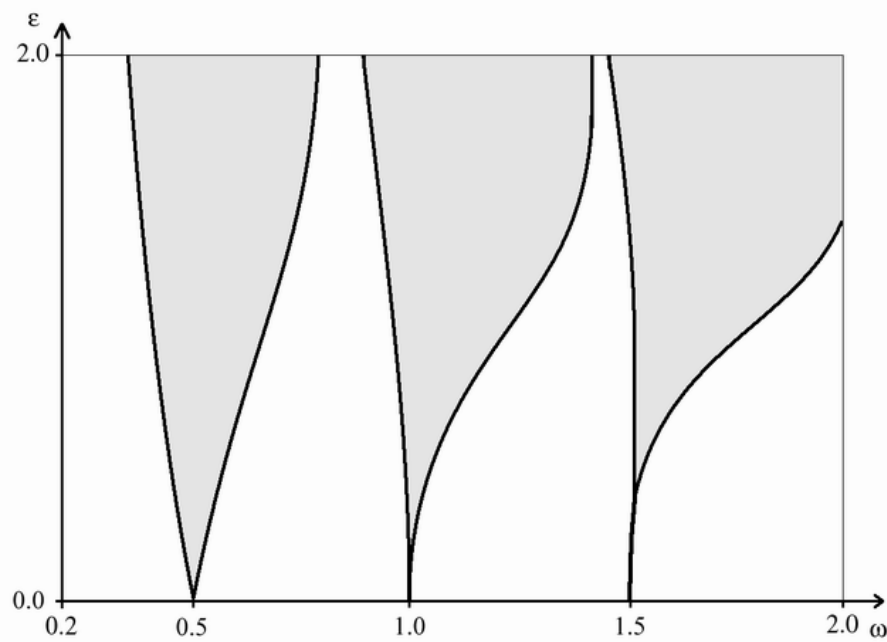


Рис. 2. Область детерминированной неустойчивости уравнения Матье без трения в плоскости его параметров $0.2 \leq \omega \leq 2$, $0 \leq \varepsilon \leq 2$.

устойчивой. Зубцы области неустойчивости отрываются от оси ω : правые зубцы отрываются сильнее левых (см. [1] или Рис. 3, область A).

Наличие трения является необходимым условием для исследования уравнения Матье на стохастическую устойчивость описываемыми в данной работе методами. Детерминированная область устойчивости представляет собой область стохастической устойчивости к шумам нулевой интенсивности. Такие области рассчитываются методами детерминированного анализа (см. [1]), так как для вычислений описываемым методом требуется ненулевой уровень шума (см. условия теоремы 2).

Рассмотрим поведение области неустойчивости с внесенным трением при добавлении белого шума ненулевой интенсивности. На Рис. 3 показаны области B и C . Область B представляет собой расширение области A при шуме с интенсивностью $\alpha = 0.1$. Область C представляет собой дальнейшее расширение области неустойчивости при увеличении интенсивности шума до 0.2.

Как видно из Рис. 3, помехоустойчивость системы снижается при увеличении собственной частоты колебаний. Это происходит из-за зависимости уровня шума от частоты колебаний в данной системе. Области B и C с увеличением ω становятся шире. При низких частотах ω шум имеет слабую интенсивность. Поэтому при этих частотах область стохастической неустойчивости

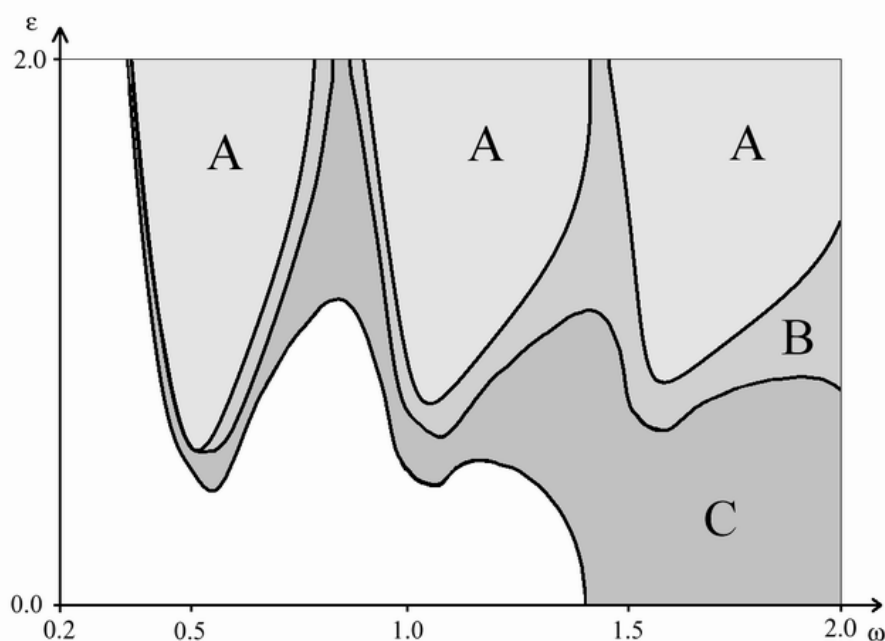


Рис. 3. Область A детерминированной неустойчивости ($\alpha = 0$) и области B и C стохастической неустойчивости ($\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.2$) уравнения Матье с трением $\gamma = 0.03$ в плоскости его параметров $0.2 \leq \omega \leq 2, 0 \leq \varepsilon \leq 2$.

несильно отличается от области детерминированной неустойчивости.

6. Заключение

В проведенных расчетах предложенный итерационный метод показал быструю сходимость: в среднем 3-4 итерации обеспечивают точность нахождения спектрального радиуса порядка 10^{-3} , чего вполне достаточно для теста на устойчивость. Сходимость метода в основном зависит от степени экспоненциальной устойчивости системы (2).

При построении двумерной области устойчивости вычисляется значение спектрального радиуса $\rho(\omega, \varepsilon)$, когда точка (ω, ε) пробегает по некоторой равномерной сетке. Равномерную сетку можно обходить так, чтобы очередная точка $(\omega_i, \varepsilon_j)$ находилась недалеко от предыдущей. В этом случае для вычисления спектрального радиуса в новой точке в качестве начального приближения φ_0 можно брать собственную функцию, посчитанную на предыдущем шаге. Этот метод дает прирост точности вычислений на несколько порядков (10^{-6} вместо 10^{-3}).

Другими достоинствами метода являются слабые условия на коэффици-

енты уравнения и произвольность начальной функции.

Список литературы

- [1] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000, стр. 285.
- [2] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости, Москва: "Наука", 1967, стр. 205.
- [3] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, Москва: "Наука", 1972.
- [4] Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ 1933. Т. 3. Вып. 3. С. 165.
- [5] Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. Прикл. матем. и мех., 27, 5, 1960, стр. 809-823.
- [6] Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
- [7] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
- [8] Рытов С.М. Введение в стохастическую радиофизику. М. Наука, 1976.
- [9] Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
- [10] Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
- [11] Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
- [12] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
- [13] Ryashko L.B. Stability and stabilization of SDEs with periodic coefficients // Dynamic systems and applications, March 1999, Vol. 8, Num. 1, pp. 21-33.
- [14] Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений, Москва: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1962.

- [15] Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов, Москва: "Наука", 1985.
- [16] Треногин В.А. Функциональный анализ, Москва: "Наука", 1980, п. 19.6, стр. 207.
- [17] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.