ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2015
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Об интегрировании дифференциальных неравенств в явном виде[1]

Ю.А.Ильин
С.Петербургский Государственный Университет,
математико-механический факультет
iljin_y_a@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача об отыскании в явном виде всех решений дифференциального неравенства $\dot{x} \leqslant f(t,x)$, полученного из дифференциального уравнения, которое может быть проинтегрировано в квадратурах. В отличие от метода теорем сравнения (метода Чаплыгина), нас интересует получение не оценок на решения, а именно вывод конкретной формулы, которая бы описывала все функции, удовлетворяющие данному неравенству. Основной прием, применяемый для этого, это замена переменной в неравенстве с помощью формулы общего решения соответствующего уравнения (метод вариации произвольной постоянной). Подробно разбираются возникающие при этом трудности, в том числе проблема максимального продолжения решений неравенства. В работе рассматриваются как общий случай, так и примеры конкретных неравенств, получаемых из дифференциальных уравнений классических интегрируемых типов.

Abstract

The article considers the problem of finding in explicit form all the solutions of the differential inequality $\dot{x} \leqslant f(t,x)$, which is obtained from a differential equation integrated in quadratures. In contrast to the method of comparison

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №13-01-00624).

theorems (Chaplygin method), we are interested not in obtaining estimations on solutions, but in derivation a formula describing all the functions which satisfy the given inequality. The main technique is the change of variable in inequality by using the formula of the general solution of the corresponding equation (method of variation of arbitrary constant). We discuss in detail the difficulties encountered, including the problem of the maximum extension of the inequality solutions. In the paper we consider both a general case, and the examples of specific inequalities obtained from differential equations of classical integrable types.

1 Постановка задачи

Задача, которой посвящена настоящая статья, формулируется просто и даже несколько по учебному: возьмем произвольное дифференциальное уравнение 1-го порядка $\dot{x} = f(t,x)$, которое интегрируется яным образом в квадратурах, например, из задачника А.Ф.Филиппова [6], и заменим в нем равенство на неравенство

$$\dot{x} \leqslant f(t,x) \quad \text{или} \quad \dot{x} \geqslant f(t,x).$$

Требуется решить полученное неравенство. Термин " решить" понимается в обычном классическом смысле: это значит найти такую формулу, которая бы явно описывала *все* функции, удовлетворяющие данному неравенству.

Несмотря на всю " обыденность" формулировки, нам не удалось найти в литературе удовлетворительного рассмотрения этой задачи. Все известные учебники по курсу дифференциальных равнений, в которых упоминаются дифференциальные неравенства (см., например, [1]), и отдельные монографии, целиком посвященные этому предмету (см. [3, 4]), и различные статьи (см. [7, 8, 9, 10]), как правило "решают" дифференциальные неравенства на языке теорем сравнения (метод Чаплыгина)(см. [5]), суть которых состоит в том, что решения неравенства лишь оцениваются с помощью решений соответствующих уравнений. Но не ставится цель описать *точно* все эти решения с помощью некоторой формулы. А между тем эта задача оказывается весьма интересной и вовсе не такой банальной даже для простых типов уравнений. При интегрировании неравенства возникают неожиданные и любопытные трудности, причем по причинам, которые кажутся явно случайными. Например, играет роль такой факт, как: будут ли все решения соответствующего уравнения описываться одной формулой или объединением нескольких формул. Данное обстоятельство никак не зависит ни от гладкости, ни от непрерывности правой части уравнения и ни от каких ее общих свойств, а является лишь индивидульной особенностью функций, входящих в нее. А процедура точного интегрирования неравенства при этом заметно усложняется.

2 Примеры

Мы начнем с того, что проиллюстрируем разницу между применением теорем сравнения (см. [1, 3, 5]) и точным решением дифференциального неравенства на очень простом примере.

Пример 1. *Найти функции $x(t)$ такие, что*

$$\dot{x}(t) \leqslant 1.$$

1 *(Теорема сравнения).* Просто проинтегрируем это неравенство от t_0 до t. Получим оценку $x(t) \leqslant t + C$, где $C = x(t_0) - t_0$, которая, собственно, и является ответом.

На первый взгляд, сделана самая естественную вещь. Но в действительности, полученная оценка – весьма грубая. Чтобы увидеть это, возьмем какое-нибудь решение неравенства с начальным условием $x(0) = 0$. Оценка дает $x(t) \leqslant t$. Геометрически это означает, что график $x(t)$ лежит под прямой $x = t$ и только. Но исходное неравенство содержит более жесткое требование: угловые коэффициенты касательных во всех точках графика должны быть $\leqslant 1$. Возьмем, например, $x(t) = t^2 - 3t$. Неравенство $x(t) \leqslant t$ выполняется при $t \in [0, 4]$, но $\dot{x}(3) = 3 > 1$. Метод теорем сравнения дает хорошие оценки лишь локально, в малой окрестности начальной точки.

2 *(Точное решение).* Чтобы “ решить” неравенство, воспользуемся формулой $x = t + C$ общего решения соответствующего уравнения $\dot{x} = 1$ и *методом вариации произвольной постоянной.* В соответствии с этим методом, сделаем замену $(t, x) \mapsto (t, C) : x = t + C(t)$, где $C(t)$ – новая неизвестноая функция. Получим $\dot{C}(t) \leqslant 0$. Решением этого неравенства являются все гладкие убывающие (не обязательно строго) функции и только они[2]. Поэтому, все решения исходного неравенства описываются формулой

$$x = t + C(t),$$

где $C(t)$ есть произвольная гладкая убывающая функция (не обязательно определенная на всем $\mathbb{R}$!).

[2]В статье используется термин *монотонная* и *строго монотонная* функция в естественном смысле.

Замечание. Следует обратить особое внимание на последние слова, сказанные об области определения $C(t)$. Иногда втречается неявное убеждение, что решения линейного дифференциального неравенства должны быть определены на том же интервале, что и коэффициенты правой части (авторы, видимо, рассуждают по аналогии с решениями линейных дифференциальных уравнений, для которых соответствующий факт справедлив). Но это не так. Например, убывающая функция $\operatorname{ctg} t$ удовлетворяет неравенству $\dot{x} \leqslant 1, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 0$, но определена только на $(0, \pi)$. Другой интересный пример дает нам $C(t) = \arccos t$. Это решение определено на *замкнутом* отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Невозможность продолжить его на больший промежуток существования вызвана тем, что функция $\arccos t$ перестает быть непрерывно дифференцируемой в точках $\pm\pi/2$. Все это означает, что если мы, по аналогии с дифференциальными уравнениями, захотим ввести понятие *максимального промежутка существования* и для решений дифференциальных неравенств, то действовать надо на порядок аккуратнее.

Прежде чем перейти к рассмотрению общей процедуры интегрирования неравенств, нам кажется целесообразным сначала разобрать три конкретных примера, которые помогут войти в курс дела.

Пример 2. *Решить линейное неравенство* $\dot{x} \leqslant x$.

Решение. Решения соответствующего уравнения задаются формулой $x = Ce^t$. Как и в примере 1, воспользуемся методом вариации произвольной постоянной и сделаем в неравенстве замену $(t, x) \mapsto (t, C)$, где $x = Ce^t$. Заметим, что эта замена является диффеоморфизмом $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Получим

$$\dot{C}e^t + Ce^t \leqslant Ce^t \iff \dot{C}e^t \leqslant 0 \iff \dot{C} \leqslant 0.$$

Поэтому, все решения неравенства имеют вид $x = C(t)e^t$, где $C(t)$ есть произвольная убавающая функция (с областью определения $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$). Опять таки заметим, что решения неравенства не обязаны быть определены на всем $\mathbb{R}$, в отличии от решений уравнения. Например, $C(t) = -\operatorname{tg} t$ и $C(t) = \arccos t$ удовлетворяют условию $\dot{C} \leqslant 0$, и поэтому $x = -e^t \operatorname{tg} t$ и $x = -e^t \arccos t$ будут тоже решениями исходного неравенства.

Пример 3. *Решить неравенство* $\dot{x} \leqslant x^2$.

Решение. Все решения уравнения $\dot{x} = x^2$, в силу единственности (см. [1, 2]), задаются объединением формул $x = 1/(C - t)$ и $x = 0$. Сделаем замену $(t, x) \mapsto (t, C): \ x = 1/(C(t) - t)$ или $C(t) = t + 1/x$. Однако теперь наша замена определена не на всем $\mathbb{R}^2$, а лишь при условии $x \neq 0$. Поэтому необходимо рассмотреть отдельно два случая[3].

Случай 1: Пусть решение неравенства $x(t) \neq 0$ на (a, b). Тогда, делая замену переменной, имеем

$$-\frac{\dot{C}(t)-1}{(C(t)-t)^2} \leqslant \frac{1}{(C(t)-t)^2} \Longleftrightarrow \frac{-\dot{C}(t)}{(C(t)-t)^2} \leqslant 0 \Longleftrightarrow \dot{C}(t) \geqslant 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае решения представляются в виде

$$x = 1/(C(t)-t),$$

где $C(t)$ – произвольная возрастающая функция на $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, для которой $C(t) \neq t$.

Случай 2: Пусть $x(t)$ обращается в 0. Прежде всего, заметим, что такое возможно. Например, $x \equiv 0$ удовлетворяет неравенству. Более того, так как правая часть неравенства $\geqslant 0$, то ему удовлетворяет любая убывающая функция. Поэтому, мы можем взять и $x = -t$, и $x = -t^3$. Эти примеры показывают, что решения нашего неравенства могут совпадать, пересекать и пересекать с касанием ось Ot. Можно даже брать составные решения, вроде такого

$$x = \begin{cases} -(t-a_1)^3, & \text{при } t < a_1, \\ 0, & \text{при } t \in [a_1, b_1], \\ -(t-b_1)^3, & \text{при } t > b_1. \end{cases}$$

Заметим однако, что во всех этих примерах $x(t)$ пересекает ось Ot сверху вниз с ростом t. Покажем, что пересечение всегда будет только таким!

Пусть $x(t_1) = 0$ и $x(t_2) > 0$ в некоторой точке $t_2 > t_1$. Будем считать, что t_1 есть ближайшая к t_2 точка слева, где $x(t) = 0$. Тогда $x(t) > 0$ на (t_1, t_2). Согласно Случаю 1, имеем $x(t) = 1/(C(t)-t)$, где $C(t)$ – некоторая возрастающая на (t_1, t_2) функция. Но

$$\lim_{t \to t_1+0} C(t) = \lim_{t \to t_1+0} \left(t + \frac{1}{x(t)} \right) = t_1 + \frac{1}{+0} = +\infty,$$

что противоречит возрастанию $C(t)$ на (t_1, t_2). Из этого следует, что во всех точках $t > t_1$ должно выполняться $x(t) \leqslant 0$. Аналогично показывается, что при $t < t_1$ должно выполняться $x(t) \geqslant 0$.

[3]Это – следствие того, что имеет место единственность решений и что решения задаются двумя формулами, ср. с примером 4.

Заметим, наконец, что если решение $x(t)$ пересекает ось Ot, то оно не может задаваться с помощью одной непрерывной функции $C(t)$: для верхней и нижней полуплоскостей надо брать разные $C(t)$.

Подводя итог, заключаем, что в рассматриваемом случае решения неравенства описываются формулой

$$x = \begin{cases} 1/(C_1(t) - t), & \text{при } t \in (a, a_1), \\ 0, & \text{при } t \in [a_1, b_1], \\ 1/(C_2(t) - t), & \text{при } t \in (b_1, b), \end{cases} \tag{1}$$

где $\lim\limits_{t \to a_1 - 0} C_1(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to b_1 + 0} C_2(t) = -\infty$. При этом надо разрешить случаи $a = -\infty$, $a_1 = +\infty$, $a_1 = b_1$, $b_1 = -\infty$, $b = +\infty$. Если a или b конечные, то должно выполнятся одно их двух: в этих точках либо $x(t)$ имеет вертикальные асимптоты, либо $C(t)$ перестает быть непрерывно дифференцируемой. Кроме того, $C_1(t)$ и $C_2(t)$ надо выбирать так, чтобы в случае $a_1 = b_1$ выполнялось

$$\lim_{t \to a_1 - 0} \dot{x}(t) = \lim_{t \to a_1 + 0} \dot{x}(t),$$

а в случае $a_1 < b_1$ выполнялось

$$\lim_{t \to a_1 - 0} \dot{x}(t) = \lim_{t \to a_1 + 0} \dot{x}(t) = 0.$$

Также возможно, что решение будет определено только на (a, a_1) или (b_1, b). Понятно, что тогда в a_1 (соответственно, b_1) решение имеет вертикальные асмптоты.

И последнее замечание. Может показаться, что наша замена имеет еще одну “особенность”, а именно: когда $C(t) = t$, то x не определено. Но в действительности, это не приводит к потере решений. Из равенства $C(t_1) = t_1$ следует, что $x(t)$ в этой точке имеет вертикальную асимптоту и поэтому этот факт влияет лишь на область определения $x(t)$. Таким образом, если неубывающая функция $C(t)$ такова, что $C(t) = t$ в последовательности точек $\{t_1, t_2, \dots\}$, то формула $x = 1/(C(t) - t)$ просто определяет не одно, а много решений на интервалах $(a, t_1), (t_1, t_2)$ и т.д. Например, если $C(t) = t + \sin t$, то имеем $x(t) = 1/\sin t$, – это бесконечный набор решений, рассматриваемых на интервалах $(\pi k, \pi + \pi k)$.

Пример 4. *Решить неравенство* $\dot{x} \leqslant 3x^{2/3}$.

Решение. Решения уравнения $\dot{x} = 3x^{2/3}$ задаются формулами $x =$

$(t + C)^3$ или $x = 0$[4]. Особенностью этого уравнения является то, что вдоль решения $x = 0$ нарушается свойство единственности (см. [1], [2]), и поэтому, хотя формул, как и в примере 3, тоже две, но в первой формуле теперь x может обращаться в 0. В соответствии с методом вариации сделаем замену $(t, x) \mapsto (t, C)$:

$$x = (t + C)^3 \tag{2}$$

или

$$C = \sqrt[3]{x} - t. \tag{3}$$

Эта замена хоть и определена теперь на всей плоскости, но зато не является взаимно–гладкой[5]. Если $x(t) \neq 0$, то $C(t) \in C^1$. Если же $x(t_1) = 0$, то $C(t)$ может оказаться как дифференцируемой, так и не дифференцируемой в точке t_1. Сделаем замену (2)–(3), считая пока, что $C(t)$ дифференцируема всюду. При этом, конечно, мы какие-то решения теряем, но этот вопрос мы рассмотрим отдельно. Заменяя x согласно (2), получим

$$3(t+C(t))^2\,(1+\dot{C}(t)) \leqslant 3(t+C(t))^2 \;\Leftrightarrow\; (t+C(t))^2\,\dot{C}(t) \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \dot{C}(t) \leqslant 0, \\ C(t) = -t. \end{array}\right.$$

Поскольку $C(t) = -t$ также удовлетворяет неравенству $\dot{C}(t) \leqslant 0$, то нет необходимости этот случай выделять отдельно. Таким образом, функции, задаваемые формулой

$$x = (t + C(t))^3, \tag{4}$$

где $C(t)$ – произвольная гладкая убывающая функция на $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$, являются решениями исходного неравенства .

Замечание. Важно отметить, что в примере 4 (и это есть следствие того, что вдоль решения $x = 0$ нарушается единственность) решения неравенства уже могут пересекать ось Ot как сверху вниз, так и снизу вверх. Примером служит $x = \sin^3 t$, получаемое из $C(t) = \sin t - t$. Но если пересечение происходит снизу вверх, то обязательно с касанием. В самом деле, если t_1 есть точка такого пересечения, то должно выполняться $x(t_1) = 0$ и $\dot{x}(t_1) \geqslant 0$. Но из неравенства следует, что $\dot{x}(t_1) \leqslant 3x^{2/3}(t_1) = 0$. Откуда $\dot{x}(t_1) = 0$.

Легко понять, что формула (4) не дает еще всех решений, так как мы не имеем право требовать, чтобы $C(t)$ всегда была гладкой. Например, убыва-

[4]На самом деле, это не совсем так. Решение $x = 0$ состоит из точек ветвления, в которых интегральные кривые можно склеивать друг с другом и получать новые интегральные кривые, не содержащиеся в этих формулах.

[5]Следствие того, что правая часть уравнения – не гладкая, и поэтому не работает теорема о дифференциируемости по начальным данным.

ющая функция $x = -t$ заведомо удовлетворяет нашему дифференциальному неравенству, но для нее $C(t) = -\sqrt[3]{t} - t \notin C^1$.

Как было сказано, гладкость может нарушаться лишь в точках, где $x(t_1) = 0$ или $C(t_1) = -t_1$. Дифференцируя (3) при $x(t) \neq 0$, находим

$$\dot{C}(t) = \frac{\dot{x}(t) - 3x^{2/3}(t)}{3x^{2/3}(t)}.$$

Числитель этой дроби всегда $\leqslant 0$, а знаменатель $\geqslant 0$. Из этого следует, что правые верхнее $D^+C(t_1)$ и нижнее $D_+C(t_1)$ производные Дини (см. [3]) неположительны (или равны $-\infty$). Поэтому функция $C(t)$ должна быть убывающей на всей области определения.

Какие $C(t)$ можно брать? Функция $C(t)$ должна быть непрерывной, убываающей и непрерывно–дифференцируемой во всех точках, за исключением быть может тех, в которых

$$C(t) + t = 0. \tag{5}$$

Но при этом функция $(t + C(t))^3$ уже должна быть дифференцируемой и в корнях уравнения (5). Из сказанного и формулы $\dot{x}(t) = 3(t + C(t))^2\,(1 + \dot{C}(t))$ следует, что если $C(t)$ имеет в корнях уравнения (5) конечные правые и левые верхние и нижние производные Дини, то она подходит; при этом в этих корнях $\dot{x} = 0$.

Таким образом, в качестве $C(t)$ можно брать, например, такие непрерывные, кусочно–гладкие, убывающие функции (со стыковочными точками на прямой $C = -t$), как

$$C(t) = \begin{cases} -t, & \text{при } t \leqslant 0, \\ -2t, & \text{при } t > 0, \end{cases} \Leftrightarrow\ x = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leqslant 0, \\ -t^3, & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

или

$$C(t) = \begin{cases} -t, & \text{при } t \leqslant -1, \\ t^2, & \text{при } t \in (-1, 0], \\ -2t^2, & \text{при } t \in (0, 1/2], \\ -t, & \text{при } t \in (1/2, 1], \\ -1, & \text{при } t > -1. \end{cases} \Leftrightarrow\ x = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leqslant -1, \\ (t + t^2)^3, & \text{при } t \in (-1, 0], \\ (t - 2t^2)^3, & \text{при } t \in (0, 1/2], \\ 0, & \text{при } t \in (1/2, 1], \\ (t - 1)^3, & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

Однако, $C(t)$ может иметь и бесконечные производные Дини, как, например, $C(t) = -\sqrt[3]{t} - t$. Видимо, в этом случае не остается ничего другого, как просто требовать дифференцируемости $(t + C(t))^3$ в корнях уравнения (5). Впрочем, последнее будет выполняться, если в каждом корне t_1 уравнения (5) функция $C(t)$ будет иметь асимптотику $C(t) = -t_1 + (t - t_1)^\alpha + o((t - t_1)^\alpha)$, где $\alpha > 1/3$.

3 Общий случай

Рассмотрим теперь процесс интегрирования дифференциального неравенства в общем случае. Пусть имеется неравенство

$$\dot{x} \leqslant f(t,x), \tag{6}$$

где $f, f'_x \in C(G)$ в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$. Заметим, что неравенство $\dot{x} \geqslant f(t,x)$ заменой $t = -\tau$ переводится в $\dot{x} \leqslant -f(-\tau, x)$, то есть сводится к рассматриваемому случаю.

При сделанных предположениях, согласно теореме Пикара ([1, 2]), область G для уравнения

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{7}$$

будет областью существования и единственности. Напомним, что функция

$$x = F(t,C) \tag{8}$$

называется *общим решением* уравнения (7) в области $G_1 \subseteq G$, если выполнены условия: 1) $F \in C^1(G_1)$; 2) при каждом $C \in F(G_1)$ формула (8) задает одно решение уравнения (7), определенное на некотором интервале (a_c, b_c); 3) для любого решения $x(t)$ уравнения (7), график которого лежит в G_1, существует такое C, что $x(t) \equiv F(t,C)$.

Хорошо известно (см. [2, Гл.1, §3]), что при сделанных относительно f предположениях, общее решение будет локально существовать в окрестности любой точки из G (но не обязано существовать на всей области G!). Поскольку это важно для дальнейшего, напомним как общее решение строиться.

Возьмем произвольную точку $(t_0, x_0) \in G$ и рассмотрим решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, которое , как обычно, обозначим через $x(t, t_0, x_0)$. Пусть I – его максимальный интервал существования. Выберем некоторый отрезок $[a,b] \subset I$, так, чтобы $t_0 \in (a,b)$. Тогда по теореме об интегральной непрерывности (см. [1, Гл.5], [2, Гл.5]) существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x(t, t_0, x_1)$ будет также определено на отрезке $[a,b]$ при $|x_1 - x_0| < \delta$. Определим теперь G_1 как “ прямоугольник” из интегральных кривых

$$G_1 = \{(t,x) \mid t \in (a,b),\ x(t,t_0,x_0-\delta) < x < x(t,t_0,x_0+\delta)\}.$$

Поскольку всякое решение из G_1 определено на всем (a,b), то его график обязательно пересекает прямую $t = t_0$, причем разные решения, в силу единственности, будут пересекать ее в разных точках. Поэтому всякое решение $x(t)$ из G_1 однозначно записывается в виде $x(t) = x(t, t_0, C)$, где $C \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Положим

$$F(t, C) = x(t, t_0, C).$$

Условия 2) и 3) из определения общего решения выполнены автоматически, а что касается 1), то оно следует из теоремы о дифференцируемости решений по начальным данным (см. [1, 2]). Более того, как следует из той же теоремы, $F'_c(t, C) = x'_c(t, t_0, C)$ будет решением линейного однородного уравнения в вариациях $\dot{y} = f'_x(t, x(t, t_0, C))y$ с начальным условием $y(t_0) = 1$. Поэтому

$$F'_C(t, C) = e^{\int_{t_0}^{t} f'_x(s, x(s, t_0, C))\, ds}.$$

Из этого следует, что

$$F'_C(t, C) > 0, \tag{9}$$

и что из формулы $x = F(t, C)$ можно однозначно выразить C через x и t.

Вернемся к дифференциальному неравенству (6). Пусть область G_1 и общее решение $x = F(t, C)$ построены так, как выше. Сделаем в неравенстве замену переменных $(t, x) \mapsto (t, C)$ по формуле $x = F(t, C)$ (которую в литературе обычно называют *методом вариации произвольной постоянной*). Согласно (9), эта замена является диффеоморфизмом, отображающим G_1 на $\widetilde{G}_1 = (a, b) \times (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Имеем

$$F'_t(t, C) + F'_C(t, C)\dot{C} \leqslant f(t, F(t, C)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(t, F(t, C)) + F'_C(t, C)\dot{C} \leqslant f(t, F(t, C) \Longleftrightarrow F'_C(t, C)\dot{C} \leqslant 0.$$

Учитывая (9), получим $\dot{C} \leqslant 0$. Таким образом, справедливо

Предложение 1 *Все решения неравенства (6), располагающиеся в области G_1, могут быть получены по формуле*

$$x = F(t, C(t)), \tag{10}$$

где $C(t)$ произвольная гладкая невозрастающая функция, действующая из $\langle a_1, b_1 \rangle \subseteq (a, b)$ на $(\alpha_1, \beta_1) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Замечание. Если f не является гладкой, но вместо этого, допустим, удовлетворяет условию Липшица, то ситуация усложняется. Единственность решений по-прежнему имеет место, но теорема о дифференцируемости по начальным данным уже не применима. Функция F не будет гладкой и указанную выше замену делать нельзя. Утешением, однако, может служить то обстоятельство, что для конкретных уравнений, интегрируемых в квадратурах, гладкость обычно нарушается не фатально, а лишь в отдельных точках или вдоль конечного числа кривых. И на дополнении к ним указанный метод применять все-таки можно. А после этого отдельно уже можно попытаться изучить поведение решений при подходе к точкам, где нарушается гладкость.

Если же f только непрерывна, то нарушается не только гладкость, но и единственность решений. И здесь все будет сильно зависеть от конкретного уравнения. Так в примере 4, разобранном выше, хотя и нельзя написать формулу общего решенеия, но какую-то формулу для решений, гладкую в одну сторону, написать можно. С ее помощью удалось получить часть решений неравенства. А дальше мы пробовали изучить поведение решений при приближении к прямой $x = 0$, вдоль которой нарушается и гладкость правой части и единственность решений.

Сформулируем и докажем еще одно утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем и которое связано с процедурой “деления на ноль” при решении дифференциального неравененства.

Предложение 2 *Пусть уравнение (7) имеет решение $x = x^*$. Тогда для любого решения неравенства (6) с начальным условием $x(t_0) = x^*$ выполняется: $x(t) \leqslant x^*$ при $t \geqslant t_0$ и $x(t) \geqslant x^*$ при $t \leqslant t_0$, для тех t, для которых $x(t)$ определено.*

Доказательство. Воспользуемся стандартной теоремой сравнения (см. [1, 3, 5]), которая утверждает, что решение $x(t)$ неравенства (6) при $t \geqslant t_0$ не превосходит так называемого *максимального* решения задачи Коши $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x^*$. Поскольку $f \in C^1$, то любая задача Коши имеет единственное решение. Поэтому максимальное решение совпадает с $x = x^*$, откуда и следует требуемое. Случай $t \leqslant t_0$ разбирается аналогично. □

Замечание 1. В предложении 2 не обязательно требовать, чтобы f была глобально гладкой. Достаточно лишь потребовать, чтобы решение $x = x^*$ уравнения (7) не содержало точек ветвления (см. [1]).

Замечание 2. Из предложения 2 следует, что решения неравенства (6) могут пересекать решение $x = x^*$ только сверху вниз. Мы уже видели это, когда решали пример 3, но доказали тогда этот факт “в лоб”. Заметим, что если решение $x = x^*$ содержит точки ветвления, то пересечение может быть уже каким угодно. С этим мы столкнулись в примере 4, и это усложнило решение неравенства.

Замечание 3. Разумеется, предложение 2 справедливо не только для постоянных, но вообще для любых решений уравнения (7); собственно, в этом и заключается теорема сравнения. Поэтому, график любого решения неравенства (6) пересекает "сверху вниз" *все* интегральные кривые уравнения (7). С геометрической точки зрения, это утверждение выглядит буквально очевидным, ведь угловые коэффициенты касательных к решениям неравенства в каждой точке не превосходят угловых коэффициентов интегральных кривых соответствующего уравнения. Однако, в который раз позволим себе это заметить, что эта очевидность обманчива, и что если для уравнения нарушается свойство единственности решений, то данное утверждение становится неверным.

О продолжимости. Для решений дифференциальных неравенств можно, по аналогии с дифференциальными уравнениями (см. [1, Гл.2, §3], [2, Гл.2, §4]), ввести естественным образом понятия *сужения*, *продолжения* и *максимально продолженного* решения (это решение, которое не является сужением никакого другого). Промежуток существования максимально продолженного решения назовем *максимальным промежутком существования*. Очевидно, что решение $x = F(t, C(t))$ будет продолжимо в области G_1 тогда и только тогда, когда $C(t)$ есть сужение какой-то другой функции того же типа в области $\widetilde{G}_1$. Соответственно, решение непродолжимо, если $C(t)$ непродолжимо в $\widetilde{G}_1$. Последнее, как несложно понять, имеет место тогда и только тогда, когда график $C(t)$ выходит на границу области $\widetilde{G}_1$ или $C(t)$ перестает быть непрерывно дифференцируемой на концах интервала определения. Поскольку $C(t)$ убывающая функция, то следующее утверждение очевидно

Предложение 3 *Пусть $x = F(t, C(t))$ есть максимально продолженное в области G_1 решение неравенства (6), определенное на (a_1, b_1). Тогда либо $b_1 = b$ (соответственно, $a_1 = a$), либо $\lim\limits_{t \to b_1 - 0} C(t) = x_0 - \delta$ (соответственно, $\lim\limits_{t \to a_1 + 0} C(t) = x_0 + \delta$), либо $\liminf\limits_{t \to b_1 - 0} \dot{C}(t) = -\infty$ (соответственно, $\limsup\limits_{t \to a_1 + 0} \dot{C}(t) = -\infty$).*

Замечание. В классической теории дифференциальных уравнений непродолжимость, как известно (см. [1, 2]), связана с выходом графика решения на границу области G. Из этого, в частности, следует, что решение, график которого целиком лежит в некотором компакте из G, – продолжимо. Для решений дифференциальных неравенств, как мы видим, это не так. График решения может целиком лежать в некотором компакте, но решение будет непродолжимым из-за того, что на концах его интервала определения перестает существовать производная (см. решение $\arccos t$ для $\dot{x} \leqslant 1$.)

В оставшейся части работы мы рассмотрим дифференциальные неравенства, получаемые из основных типов дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах.

4 Линейное уравнение

Рассмотрим неравенство

$$\dot{x} \leqslant p(t)x + q(t), \tag{11}$$

где $p, q \in C(a, b)$. Это один из самых простых случаев и это неравенство постоянно встречается в литературе (см. [3, 4, 7, 10]), хотя, как уже отмечалось выше, большинство работ его не решает, а только оценивает решения с помощью теорем сравнения. Соответсвующее уравнение имеет вид $\dot{x} = p(t)x + q(t)$, и для него, как известно, $G = (a, b) \times \mathbb{R}$ будет областью существования и единственности. Более того, во всей этой области определено общее решение

$$x = F(t, C) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} \left(C + \int_{t_0}^{t} q(u) e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} du \right),$$

при этом $F'_c = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} > 0$, что дает возможность применить предложение 1. Согласно ему все решения неравенства (11) задаются формулой

$$x = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} \left(C(t) + \int_{t_0}^{t} q(u) e^{-\int_{t_0}^{u} p(s)\, ds} du \right),$$

где $C(t)$ – произвольная гладкая функция, определенная на $\langle a_1, b_1 \rangle \subseteq (a, b)$, для которой $\dot{C}(t) \leqslant 0$. Согласно предложению 3, чтобы решение неравенства было максимально продолженным, должно выполняется одно из условий:

1. $a_1 = a, \ \ (b_1 = b)$;
2. $\lim\limits_{t \to a_1 + 0} C(t) = +\infty, \ \ (\lim\limits_{t \to b_1 - 0} C(t) = -\infty)$;
3. $\lim\limits_{t \to a_1 + 0} D^+ C(t) = -\infty, \ \ (\lim\limits_{t \to b_1 + 0} D_- C(t) = -\infty)$.

Приведем примеры некоторых максимально продолженных решений и их интервалов существования для линейного неравенства из примера 2.

1. $e^{t/2}, -e^{2t}, e^{-t}, -t; \quad \langle a_1, b_1\rangle = \mathbb{R};$
2. $e^t/t; \quad \langle a_1, b_1\rangle = (0, +\infty);$
3. $e^t/t; \quad \langle a_1, b_1\rangle = (-\infty, 0);$
4. $e^t \operatorname{ctg} t; \quad \langle a_1, b_1\rangle) = (0, \pi);$
5. $-e^t\sqrt{t}; \quad \langle a_1, b_1\rangle = [0, +\infty);$
6. $e^t \arccos t; \quad \langle a_1, b_1\rangle = [-\pi/2, \pi/2].$

Если нас интересует решение неравенства, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, то надо брать $C(t_0) = x_0$.

5 Уравнение Бернулли

Рассмотрим неравенство

$$\dot{x} \leqslant p(t)x + q(t)x^n, \tag{12}$$

где $p, q \in C(a, b)$. Здесь все сильно зависит от числа n. Прежде всего, неравенство может оказаться неопределенным при $x < 0$. Далее, если $n \geqslant 1$, то для уравнения Бернулли $\dot{x} = p(t)x + q(t)x^n$ выполнены условия теоремы единственности, а при $0 < n < 1$ решение $x = 0$ целиком состоит из точек ветвления. При $n < 0$ оно вообще не будет решением. Важность решения $x = 0$ объясняется тем, что в области $G_1 = \{x > 0,\ a < t < b\}$ (и, аналогично, в $G_2 = \{x < 0,\ a < t < b\}$, если это позволяет n) можно написать формулу общего решения, и тогда интегрирование неравенства проводиться по общей схеме пункта 2. И единственное, что надо изучать – это переход решений из G_1 в G_2. Вместо утомительного разбора всех возможных случаев, нам кажется более целесообразным разобрать несколько конкретных вариантов, из которых будет ясен общий алгоритм действий.

Случай 1: $n = 2k$ – *четно*. Правая часть неравенства определена при любых x. Как известно (см. [2]), уравнение Бернулли сводится к линейному заменой $(t, x) \mapsto (t, y): \ \ y = x^{1-n}$. В рассматриваемом случае эта замена будет взаимно однозначной и взаимно гладкой на множестве $G = G_1 \cup G_2$. Сделаем эту замену в исходном неравенстве (12) при $x \neq 0$

$$\dot{y} = (1-2k)x^{-2k}\dot{x} \geqslant (1-2k)x^{-2k}\big(p(t)x + q(t)x^{-2k}\big) = (1-2k)p(t)y + (1-2k)q(t),$$

(знак неравенства переворачивается, так как $1-2k<0$). Согласно пункту 3, решения этого неравенства, расположенные в областях G_1 и G_2, задаются формулой

$$y(t)=e^{(1-2k)\int_{t_0}^{t}p(s)\,ds}\left(C(t)+(1-2k)\int_{t_0}^{t}q(u)e^{(2k-1)\int_{t_0}^{u}p(s)\,ds}du\right),$$

где $\dot{C}(t)\geqslant 0$, т.е. $C(t)$– возрастающая функция. Решениями исходного неравенства будут

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt[2k-1]{y(t)}}. \tag{13}$$

Изучим вопрос о продолжении решений (13). Будем сперва считать, что решение $x(t)$ проходит через какую-то точку области G_1, то есть $x(t_0)=x_0>0$. Пусть $\langle a_1,b_1\rangle$ есть максимальный промежуток существования этого решения в G_1. Прежде всего, вполне может быть, что $\langle a_1,b_1\rangle=(a,b)$, то есть, что решение целиком располагается в G_1. В этом случае $C(t)$ должна быть произвольной возрастающей функцией, определенной на всем (a,b), для которой $y(t)\neq 0$. Таким решением для неравенства $\dot{x}\leqslant x^2$ из примера 3, которое можно рассматривать как неравенство Бернулли ($p(t)=0, q(t)=1, n=2$), будет, например, убывающая функция e^{-t}.

Если же $a_1>a$, то решение $x(t)$ должно или покидать область G_1, или "терять" гладкость в точке a_1. В первом случае имеются 2 варианта:

1. $\lim\limits_{t\to a_1+0}x(t)=+0\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to a_1+0}y(t)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to a_1+0}C(t)=+\infty;$

2. $\lim\limits_{t\to a_1+0}x(t)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to a_1+0}y(t)=+0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\lim_{t\to a_1+0}C(t)=(2k-1)\int_{t_0}^{a_1}q(u)e^{(2k-1)\int_{t_0}^{u}p(s)\,ds}du.$$

Вариант 1 невозможен в силу предложения 2 (или в силу того, что $C(t)$ – возрастающая). Значит должен выполняться вариант 2. Он означает, что $x(t)$ имеет вертикальную асимптоту в a_1.

В случае $b_1<b$ также имеем либо "потерю" гладкости в b_1, либо 2 возможности:

1. $\lim\limits_{t\to b_1-0}x(t)=+0\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to b_1-0}y(t)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to b_1-0}C(t)=+\infty;$

2. $$\lim_{t\to b_1-0} x(t) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{t\to b_1-0} y(t) = +0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to b_1-0} C(t) = (2k-1)\int_{t_0}^{b_1} q(u)e^{(2k-1)\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du.$$

Теперь оба этих варианта могут иметь место. Например, вариант 2 реализуется для решения $x(t) = 1/\sin t$ из упомянутого примера 3. Заметим, что формула $x(t) = 1/\sin t$ задает бесконечный набор решений, которые определены на интервалах $(\pi k, \pi(k+1))$. Концы интервалов являются вертикальными асимптотами. При k четных, решения лежат в G_1, а при нечетных – в G_2. Любопытно отметить, что соответствующие им решения $y(t) = \sin t$ и $C(t) = t + \sin t$ определены и непрерывно дифференцируемы при всех $t \in \mathbb{R}$.

Вариант 1 означает, что решение $x(t)$ “ выходит” на прямую $x = 0$ в точке b_1. Согласно предложению 2, далее оно может оставаться на прямой вдоль некоторого отрезке $[b_1, a_2]$, а затем перейдет в область G_2 (не запрещаются случаи $b_1 = a_2$ и $a_2 = +\infty$.)

Для максимально продолженного решения неравенства в области G_2, определенного на $\langle a_2, b_2\rangle$, ситуация – обратно симметричная. Во-первых, также возможен случай, когда $\langle a_2, b_2\rangle = (a, b)$; например $-e^t$ для неравенства из примера 3. Если же $b_2 \neq b$, то обязательно

$$\lim_{t\to b_2-0} x(t) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{t\to b_2-0} y(t) = -0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to b_2-0} C(t) = (2k-1)\int_{t_0}^{b_2} q(u)e^{(2k-1)\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du,$$

а для $a_2 \neq a$ есть 2 варианта: 1) $x(a_2 + 0) = -0$ или 2) $x(a_2 + 0) = -\infty$. То, что 2й вариант реализуется, мы видели на примере решения $x = 1/\sin t$. А в случае 1го варианта, наше решение состыковывается в точке a_2 с любым подходящим решением из области G_1.

Из сказанного ясно, как устроена структура всех решений неравенства в случае 1.

Замечание. Не надо думать, что рассмотренные выше возможности для максимального промежутка существования решения $\langle a_1, b_1\rangle$ реализуются в полном обьеме для каждого неравенства указанного вида. Какие-то случаи могут не иметь места, и зависит это от конкретных особенностей правых частей. Например, для неравенства $\dot{x} \leqslant x^2$ из примера 3, существуют решения, располагающиеся при всех $t \in \mathbb{R}$ в области G_1 (например, $x = e^{-t}$ или $x = 1$)

и G_2 (например, $x = -e^t$ или $x = -1$). Но для неравенства $\dot{x} \leqslant -x^2$ таких решений уже нет! В самом деле, пусть $x(t_0) = x_0$. Тогда по теореме сравнения при $t > t_0$ выполняется $x(t) < \varphi(t)$, а при $t < t_0$ выполняется $x(t) > \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ есть решение задачи Коши

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(t_0) = x_0,$$

и t берутся такие, в которых $x(t)$ определено. Несложно найти, что

$$\varphi(t) = \frac{x_0}{x_0(t - t_0) + 1}.$$

Эта функция имеет асимптоту в точке $t^* = t_0 - 1/x_0$. Если $x_0 > 0$, то $t^* < t_0$, и так как $x(t) > \varphi(t)$ при $t < t_0$, то $x(t)$ не может быть продолжено на отрезок $[t^*, t_0]$. Для a_1 справедлива оценка $a_1 \geqslant t_0 - 1/x(t_0)$. Поэтому в G_1 нет решений, для которых $a_1 = -\infty$. Аналогично, если $x_0 < 0$, то $t^* > t_0$, и всякое решение неравенства в G_2 будет иметь вертикальную асимптоту при продолжении вправо. Решений, для которых $b_2 = +\infty$, тоже нет. Можно заметить, что единственное решение нашего неравенства, которое определено при всех t, это $x = 0$.

Случай 2: $n = 2k + 1$ – *нечетно.* Для области G_1, где $x > 0$, выкладки из случая 1 остаются в силе, и там будем иметь

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[2k]{y(t)}}, \quad \text{где} \quad y(t) = e^{-2k\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}\left(C(t) - 2k\int_{t_0}^{t} q(u)e^{2k\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du\right),$$

и где $C(t)$ по-прежнему есть любая возрастающая функция. Поведение максимально продолженных решений неравенства в области G_1 будет аналогичным случаю 1.

Для $x < 0$ надо делать замену $y = (-x)^{-2k}$. Получим

$$\dot{y} = (-2k)(-x)^{-2k-1}(-\dot{x}) \leqslant (-2k)x^{-2k-1}\big(p(t)x + q(t)x^{2k+1}\big) = \\ = (-2k)p(t)y - 2kq(t).$$

(знак неравенства не меняется, так как само x тоже отрицательно). Поэтому, для решений, расположенных в области G_2, получим

$$x(t) = -\frac{1}{\sqrt[2k]{y(t)}}, \quad \text{где} \quad y(t) = e^{-2k\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}\left(C(t) - 2k\int_{t_0}^{t} q(u)e^{2k\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du\right),$$

и где $\dot{C}(t) \leqslant 0$, т.е. $C(t)$ теперь убывающая функция. Пусть $\langle a_2, b_2\rangle$ есть максимальный промежуток существования максимально продолженного решения $x(t)$ в области G_2.

По-прежнему возможно, что $\langle a_2, b_2 \rangle = (a, b)$. Например, функция $x = -1/\sqrt{4 - 2\sin t}$ удовлетворяет неравенству $\dot{x} \leqslant x^3 \cos t$ и определена при всех t. С другой стороны, у неравенства $\dot{x} \leqslant x^3$ таких решений уже нет: любое решение, начинающееся в G_2, при продолжении вправо будет уходить на $-\infty$ с вертикальной асимптотой. Это проверяется аналогично случаю 1 с помощью теоремы сравнения (см. Замечание). В общем случае сказанное будет зависеть от свойств коэффициента $q(t)$.

Если $b_2 \neq b$, то вариант $\lim\limits_{t \to b_2 - 0} x(t) = -0$, как и раньше, невозможен в силу предложения 2. Поэтому

$$\lim_{t \to b_2 - 0} x(t) = -\infty \Longleftrightarrow \lim_{t \to b_2 - 0} y(t) = +0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{t \to b_2 - 0} C(t) = 2k \int_{t_0}^{b_2} q(u) e^{2k \int_{t_0}^{u} p(s)\, ds} du.$$

Если $a_2 \neq a$, то при $t \to a_2 + 0$, также как и в случае 1, имеем 2 возможности:

1. $\lim\limits_{t \to a_2 + 0} x(t) = -0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{t \to a_1 + 0} y(t) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{t \to a_1 + 0} C(t) = +\infty,$
2. $\lim\limits_{t \to a_2 + 0} x(t) = -\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{t \to a_1 + 0} y(t) = +0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \lim_{t \to a_1 + 0} C(t) = 2k \int_{t_0}^{a_2} q(u) e^{2k \int_{t_0}^{u} p(s)\, ds} du.$$

Таким образом, ситуация в целом ничем не отличается от случая 1, и поэтому структура множества решений будет такая же. Вариант 1 позволяет нам склеивать решения из G_1 и G_2 друг с другом, и получать такие решения, как, например,

$$x(t) = \begin{cases} -t, & \text{при } t \in (-\infty; 1], \\ \frac{-1}{\sqrt{3 - 2t}}, & \text{при } t \in (1; \frac{3}{2}), \end{cases}$$

для неравенства $\dot{x} \leqslant x^3$.

Случай 3: $n = \frac{k}{l}$, $\frac{k}{l} > 1$, l*–нечетно.* Этот случай есть объединение случаев 1 и 2. Правая часть неравенства определена при всех x. А четность k, влияя на формулу решений, не влияет на их общую структуру, – как мы видели в случаях 1 и 2.

Случай 4: $n = \frac{k}{l}$, $\frac{k}{l} > 1$, l*–четно.* Этот случай проще предыдущего. Неравенство определено только в G_1, и все сказанное для этой области при разборе случаев 1–2 остается в силе и здесь. Перехода из G_1 в G_2 теперь, естественно, нет, но решение может выйти на ось Ot и дальше целиком оставаться на ней до границы b.

Случай 5: $n = \frac{k}{l},\ \frac{k}{l} < 1,\ l$*–нечетно.* Особенностью этого случая является то, что теперь решение $x = 0$ соответствующего уравнения содержит точки ветвления. Предложение (2) не выполняется, и решения неравенства (12) могут многократно пересекать ось Ot в любом направлении. Иллюстрацией к этому служит $x = \sin^3 t$ из примера 4, который как раз является неравенством разбираемого типа. Мы взяли l нечетным, чтобы неравенство было определено при любых x, а четность k, как и в случаях 1–2–3, не играет существенной роли. Поэтому дальше мы будем проводить выкладки для k четного. Сделаем стандартную замену $(t, x) \mapsto (t, y) :\ \ y = x^{1-n}$. Как и раньше, она будет взаимо однозначной и взаимо гладкой в областях G_1 и G_2. Поскольку теперь $1 - n \in (0, 1)$, то замена определена и при $x = 0$:

$$\dot{y} = (1-n)x^{-n}\dot{x} \leqslant (1-n)x^{-n}\big(p(t)x + q(t)x^n\big) = (1-n)p(t)y + (1-n)q(t),$$

(знак неравенства не переворачивается, так как $1 - n > 0$). Решениями исходного неравенства в $G_1 \bigcup G_2$ будут

$$x(t) = (y(t))^{n-1}, \tag{14}$$

где

$$y(t) = e^{(1-n)\int_{t_0}^t p(s)\,ds}\left(C(t) + (1-n)\int_{t_0}^t q(u)e^{(n-1)\int_{t_0}^u p(s)\,ds}du\right),$$

и где $\dot{C}(t) \leqslant 0$, т.е. $C(t)$ убывающая функция.

Отличия возникают при анализе продолжимости решений. Пусть сперва $x(t)$ берется из G_1, и (a_1, b_1) есть его максимальный интервал существования.

Во-первых, возможно, что $(a_1, b_1) = (a, b)$, как например, для $x = 1$ из примера 4.

Если $a_1 > a$, то возможны варианты

1. $\lim\limits_{t\to a_1+0} x(t) = +0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to a_1+0} C(t) = (n-1)\int_{t_0}^{a_1} q(u)e^{(n-1)\int_{t_0}^u p(s)\,ds}du;$
2. $\lim\limits_{t\to a_1+0} x(t) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to a_1+0} C(t) = +\infty.$

Первый вариант иллюстрируется решением $x = \sin^3 t$, а второй – решениями $x = 1/t,\ t > 0$ или $x = \operatorname{ctg} t,\ t \in (0, \pi)$ из примера 4. Для $b_1 < b$ имеем

1. $\lim\limits_{t\to b_1-0} x(t) = +0 \iff \lim\limits_{t\to b_1-0} C(t) = (n-1)\int_{t_0}^{b_1} q(u)e^{(n-1)\int_{t_0}^{u} p(s)\,ds}du;$
2. $\lim\limits_{t\to b_1-0} x(t) = +\infty \iff \lim\limits_{t\to b_1-0} C(t) = +\infty.$

Первый вариант реализуется на решениях $x = \sin^3 t$ или $x = \operatorname{ctg} t,\ t \in (0,\pi)$ из примера 4, а второй вариант невозможен, так как $\dot{C}(t) \leqslant 0$. Таким образом, в отличие от случаев 1-2-3, теперь решения неравенства (12), располагающиеся в области G_1, не могут уходить на бесконечность с вертикальной асимптотой при продолжении вправо. Этот результат, разумеется, можно получить и в общем виде с помощью теоремы сравнения. Он следует из того, что решения неравенства при $t > t_0$ будут не превосходить решений соответствующего уравнения, которые имеют вид (14) (где $C(t)$ надо заменить на C) и вертикальных асимптот не имеют.

Перечислим теперь возможности для решений $x(t)$, располагающихся в области G_2.

Случай $(a_2, b_2) = (a, b)$, может иметь место; например, для $x = -1$ из примера 4. Если $a_2 > a$, то возможны варианты

1. $\lim\limits_{t\to a_2+0} x(t) = -0;$
2. $\lim\limits_{t\to a_2+0} x(t) = -\infty.$

Первый случай возможен, иллюстрацией служит $x = \operatorname{ctg} t$ или $x = -t$ из примера 4. А второй невозможен по тем же причинам, по которым решения неравенства в G_1 не могут иметь вертикальных асимптот при продолжении вправо. В самом деле, при продолжении влево, решения неравенства, по теореме сравнения, теперь будут оцениваться решениям уравнения снизу, а решения уравнения асимптот не имеют.

Для $b_2 < b$ имеем

1. $\lim\limits_{t\to b_2-0} x(t) = -0;$
2. $\lim\limits_{t\to b_2-0} x(t) = -\infty.$

Оба этих варианта могут реализовываться, например, для $x = \sin^3 t$ и $x = \operatorname{ctg} t,\ t \in (0,\pi)$ из примера 4.

Нарушение единственности вдоль решения $x = 0$ приводит к тому, что в случае 5 появляются решения, многократно переходящие из G_1 в G_2 и обратно, как, например, $x = \sin^3 t$ из примера 4. Но как мы помним, есть еще одна проблема, связанная с нарушением гладкости. До сих пор мы рассматривали только функции $C(t) \in C^1$. Но $C(t)$ может терять гладкость в точках, в которых $y(t) = 0$. Мы не будем пытаться говорить что-либо по этому поводу в общем случае, а лишь отметим, что $C(t)$ должна выбираться так, чтобы итоговая функция $x(t)$ уже была гладкой на всем промежутке определения.

6 Уравнение с разделяющимися переменными

Рассмотрим неравенство
$$\dot{x} \leqslant f(t)g(x), \tag{15}$$
где $f \in C(a, b),\ g \in C^1(\alpha, \beta)$. При сделанных предположениях область $G = (a, b) \times (\alpha, \beta)$ будет областью существования и единственности для уравнения
$$\dot{x} = f(t)g(x). \tag{16}$$

Что касается общего решения, то дело обстоит следующим образом. Если $g(x) \neq 0$ на (α, β), то общее решение задается формулой (см. [2])
$$H(x) = F(t) + C, \quad \text{где} \quad H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{g(s)}, \ \ F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds. \tag{17}$$
При этом, так как $H'(x) = 1/g(x) \neq 0$, то $H(x)$ обратима, и формула (17) может быть переписана в виде
$$x = H^{-1}(F(t) + C). \tag{18}$$

Сделаем в неравенстве замену $(t, x) \mapsto (t, C)$:
$$\dot{C} = H'(x)\dot{x} - \dot{F}(t) = \frac{\dot{x}}{g(x)} - f(t).$$

Если $g(x) > 0$, то получим
$$\dot{C} \leqslant \frac{f(t)g(x)}{g(x)} - f(t) = 0.$$

А если $g(x) < 0$, то
$$\dot{C} \geqslant \frac{f(t)g(x)}{g(x)} - f(t) = 0.$$

В любом случае, подставляя такие $C(t)$ в формулу (17) или (18), получим все решения исходного неравенства в виде
$$H(x) = F(t) + C(t), \quad \text{или} \quad x = H^{-1}(F(t) + C(t)). \tag{19}$$

Согласно предложению 3, $C(t)$ надо брать или определенной на всем (a, b), или такой, чтобы при приближении к концам ее промежутка определения либо “терялась” дифференцируемость, либо выполнялось бы

$$H^{-1}(F(t) + C(t)) \to \ \alpha \text{ или } \beta$$

(в согласии с монотонностью).

Допустим теперь, что $g(x)$ может обращаться в ноль. Множество $M = \{x \in (\alpha, \beta) \mid g(x) \neq 0\}$ открыто в $\mathbb{R}$ и поэтому представимо в виде не более чем счетного объединения открытых дизъюнктных интервалов $M = \bigcup(\alpha_k, \beta_k)$. На каждой области $G_k = (a, b) \times (\alpha_k, \beta_k)$ применимы рассуждения, проведенные выше, и на них решения неравенства описываются формулой (19). Заметим, что прямые $x = \alpha_k$ и $x = \beta_k$ являются решениями уравнения (16), поскольку $g(\alpha_k) = g(\beta_k) = 0$ (за исключением α и β). Согласно предложению 2, решения неравенства (15) могут пересекать их только сверху вниз. Поэтому, максимально продолженное в области G_k решение $x(t)$ нашего неравенства, определенное на максимальном интервале существования (a_k, b_k), может быть устроено только следующим образом:

1. $(a_k, b_k) = (a, b)$,
2. $a_k = a,\ b_k < b,$ тогда $\lim\limits_{t\to b_k-0} x(t) = \alpha_k$,
3. $a_k > a,\ b_k = b,$ тогда $\lim\limits_{t\to a_k+0} x(t) = \beta_k$,
4. $a_k > a,\ b_k < b,$ тогда $\lim\limits_{t\to a_k+0} x(t) = \beta_k,\ \lim\limits_{t\to b_k-0} x(t) = \alpha_k$.

В том случае, если $\alpha_k = \alpha$ или $\beta_k = \beta$, может также выполняться $\lim\limits_{t\to a_k+0} x(t) = \alpha$ или $\lim\limits_{t\to b_k-0} x(t) = \beta$.

Ни в поведении решений в областях G_k, ни в стыковке друг с другом решений из соседних областей, не появляется ничего нового, по сравнению со сказанным в случаях 1-2-3 из пункта 4 для уравнения Бернулли. Поэтому, мы не будем повторяться.

Мы также ничего не будем говорить о случае, когда функция g просто непрерывна, и поэтому решения $x = \alpha_k$ и $x = \beta_k$ могут содержать точки ветвления. Для содержательного анализа здесь важна уже конкретная информация о g и f. Мы также не касаемся случаев, когда множество нулей функции g имеет сложную структуру. Кажется, что содержательный ответ в общем случае вряд ли возможен. Как бы то ни было, – вспомним исходную постановку задачи, – если сырьем для дифференциального неравенства служит какое-либо уравнения из обычного задачника, типа [6], то входящие в запись уравнения функции как правило являются достаточно хорошими, с изолированными нулями, почти всюду голоморфными и т.д. А тогда сказанного в примере 4 и случае 5 пункта 5 будет достаточно для решения таких неравенств.

Список литературы

[1] Hartman P. Ordinary Differential Equations, J.Wiley, New York, 1964.

[2] Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Из-во СпбГУ, 2005

[3] Szarski J. Differential Inequalities, PWN, Warszawa, 1967.

[4] Lakshmikantham V., Leela S. Differential and integral inequalities; theory and applications, Academic Press, New York, 1969

[5] Васильева А.Б., Нефедов Н.Н. Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина (учеб. пос.), МГУ, Физ. ф-т., 2007

[6] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, Из-во РХД, Москва, 2000.

[7] Lungu N., Popa D. On some Differential Inequalities, Seminar on Fixed Point Theory Cluj-Napoca, Vol.3, 2002, 323-326 (www.math.ubbcluj.ro/ nodeacj/journal.htm).

[8] Pouso R.L. Greatest solutions and differential inequalities: a journey in two directions, arXiv:1304.3576vl [math.CA] 12 Apr 2013

[9] Uhl R. Ordinary Differential Inequalities and Quasimonotonicity in Ordered Topological Vector Spaces, Proc. Amer. Math.Soc., vol.126, No7, 1998, 1999-2003

[10] Hoang N.S., Ramn A.G. Nonlinear Differential Inequality, MIA, Math.Inequal.Appl., Vol. 14, 4, 2011, 967-976.