ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2019
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Б. Ф. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, Высшая школа технологии и энергетики,
Email: ivanov-bf@yandex.ru

Аннотация

В работе рассматривается линейная неоднородная система дифференциальных уравнений. Матрица-коэффициент в линейной части представляет собой сумму абсолютно суммируемой матрицы и матрицы суммируемой со степенью большей единицы, но не превосходящей двух. Предполагается, что преобразование Фурье каждой из функций, являющихся элементами второй матрицы, равно нулю в некоторой окрестности нуля. Кроме того, предполагается, что неоднородность суммируема со степенью большей единицы (или существенно ограничена) и обладает ограниченным интегралом, а сумма величин обратных показателям суммируемости второй матрицы и неоднородности меньше единицы.

В предыдущих работах автором были введены понятие множества резонансных точек, а также резонансное и нерезонансное условия для функций суммируемых с какой-либо степенью или существенно ограниченных.

В данной работе предложен критерий ограниченности решений системы в виде ряда условий на резонансные точки некоторых коэффициентов системы.

Доказано, что если для ряда коэффициентов системы выполнены нерезонансные условия, которые для конечных резонансных точек имеют вид арифметических соотношений между их координатами (т.е. между резонансными частотами), то каждое решение системы ограничено. Кроме того, установлено, что в резонансном случае всегда можно выбрать такие сколь угодно малые (в смысле норм соответствующих пространств) возмущения коэффициентов системы, при которых резонансные множества коэффициентов системы не увеличатся, будет выполняться резонансное условие, но у возмущенной системы возникнут неограниченные решения.

Ключевые слова: ограниченность решений линейных систем, резонанс

Abstract

We consider a linear nonhomogeneous system of differential equations. In this system, the matrix-coefficient in the linear part is the sum of an absolutely summable matrix and a matrix summable with the degree which greater one but not exceeding two. It is also assumed that there exists a neighborhood of zero in which the Fourier transform of each element of the second matrix equals zero. The nonhomogeneity is assumed to be summable with any degree which greater than one or essentially bounded, has a bounded integral, and the sum of the reciprocal of the summability of the second matrix and the nonhomogeneity is less than one.

In previous works we introduced the concepts of the set of resonant points, resonant and non-resonant conditions for functions summable with some degree or essentially bounded.

This paper proposes a criterion of boundedness of solutions in the form of conditions on the resonant points of the coefficients of the system. It was proved that if for a number of coefficients of the system non-resonant conditions (which for finite resonance points have the form of arithmetic relations between their coordinates, i.e resonant frequencies) are fulfilled, then each solution is bounded. In addition, it has been established that in the resonance case it is always possible to choose such an arbitrarily small perturbations of the coefficients of the system (in the sense of the norms of the corresponding spaces) that the resonance sets of the system coefficients will not increase, the resonance condition will be satisfied but the perturbed system will have unbounded solutions.

Keywords: boundedness of solutions of linear systems, resonance

Введение

Пусть $n \geq 1$, $p \in (1, 2]$, $r \in (1, +\infty]$ и $1/p + 1/r < 1$. Рассмотрим линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}(t) = P(t)y(t) + f(t), \tag{0.1}$$

где $y(t)$, $f(t) \in \mathbb{R}^n$ векторы; $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$; $P(t) = L(t) + H(t)$, $L(t) = \|l_{ij}(t)\|_1^n$, $H(t) = \|h_{ij}(t)\|_1^n$ – квадратные матрицы n–го порядка, причем координаты вектора $f(t)$ и элементы матриц $L(t)$ и $H(t)$ удовлетворяют условиям:

У1) $l_{ij} \in L^1(\mathbb{R}^1)$, $h_{ij} \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $f_j \in L^r(\mathbb{R}^1)$, $\int\limits_0^t f_j(\tau)d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$, $1 \leq i, j \leq n$;

У2) существует $\varepsilon > 0$ такое, что преобразование Фурье каждой из функций h_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ равно нулю в ε–окрестности нуля.

Перечисленным условиям (У1) и (У2) удовлетворяет, например, система, в которой

$$P(t) = \frac{1}{(1+|t|)^{1/p+\rho}} \cdot \begin{pmatrix} \sin\lambda_{11}t & \sin\lambda_{12}t \\ \sin\lambda_{21}t & \sin\lambda_{22}t \end{pmatrix}$$

$$f(t) = \frac{1}{(1+|t|)^{1/r+\rho}} \cdot \begin{pmatrix} \sin\mu_1 t \\ \sin\mu_2 t \end{pmatrix},$$

где $\lambda_{ij} \neq 0$, $\mu_l \neq 0$, $i, j, l \in \{1, 2\}$, $\rho > 0$, $1/p + 1/r + 2\rho < 1$.

В настоящей работе рассматривается вопрос об условиях ограниченности решений системы (0.1).

Вопрос о наличии ограниченных решений у линейных систем рассматривался многими авторами при различных предположениях относительно исходной системы (см., например, [1–14] и имеющуюся там библиографию). В отличие от работ других авторов, в настоящей статье предлагается коэффициентный критерий ограниченности решений в форме выполнения ряда требований на «резонансные» точки (понятие введенное автором в работах [15–16]) коэффициентов системы. Метод доказательства этого критерия основан на предложенном автором одном дополнении к неравенству Гельдера [15–18].

Работа состоит из введения и пяти параграфов. Первые три носят вспомогательный характер. В четвертом система (0.1) преобразуется в интегральное уравнение специального вида и устанавливается условие ограниченности его решений. В пятом содержатся основные утверждения статьи. Первое из них – теорема 5.1, которая состоит в следующем.

Положим $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ и будем считать окрестностью точки ∞ всякое множество вида $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a \leq b$.

Пусть $p_1 \in [1, +\infty]$ и $\widehat{\gamma}(y)$ – преобразование Фурье функции $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$.

Определение *Точка $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ называется нерезонансной точкой функции $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p \in [1, +\infty]$, если существует такая функция $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p+1/q = 1$, для которой $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в какой-либо окрестности точки u. Остальные точки множества $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ называются резонансными точками функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$ и их множество обозначается $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$.*

Отметим, что равенство $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в определении понимается, вообще говоря, в обобщенном смысле.

Определение *Будем говорить, что для системы (0.1) при $p \in (1, 2]$ выполнено нерезонансное условие, если для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ при каждом $j \in \{1, \ldots, n\}$ хотя бы одно из двух множеств*

$$\mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\}, \quad \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}$$

пусто или, если они оба не пусты, то по крайней мере одно из них не содержит бесконечную точку и при этом выполняется нерезонансное соотношение

$$0 \notin \mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \cap (-\infty, +\infty) + \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} \cap (-\infty, +\infty).$$

Теорема 5.1 *Пусть $n \geq 1$, $p \in (1, 2]$, $r \in (1, +\infty]$ и для системы (0.1) выполнено нерезонансное условие. Тогда каждое ее решение ограничено.*

Далее в теореме 5.2 установлено, что в «резонансном» случае (т. е. при невыполнении нерезонансного условия) всегда можно выбрать такие сколь угодно малые в смысле норм соответствующих пространств возмущения $\Delta H(t) = \|\Delta h_{ij}(t)\|_1^n$, $\Delta f(t) = (\Delta f_1(t), \ldots, \Delta f_n(t))$, $\Delta h_{ij} \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $\Delta f_j \in L^r(\mathbb{R}^1)$ $1 \leq i, j \leq n$, при которых резонансные множества коэффициентов системы не увеличатся, будет выполняться резонансное условие, но у возмущенной системы

$$\dot{z}(t) = [L(t) + H(t) + \Delta H(t)]z(t) + f(t) + \Delta f(t)$$

возникнут неограниченные решения.

В работе использованы следующие обозначения и формулы:

$\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$;

$\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ – множество резонансных точек функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$;

$\Omega(t, [a,b], \rho)$ – обратное преобразование Фурье свертки $\frac{1}{\rho^2}\,\xi_{[a,b]}(y)*\xi_{[-\rho/2,\,\rho/2]}(y)*\xi_{[-\rho/2,\,\rho/2]}(y)$, где $\xi_M(y)$ – характеристическая функция множества $M \subseteq \mathbb{R}^1$;

$\mathcal{R}_k$ – множество резонансных точек функции γ_k;

$0 \notin \sum\limits_{k=1}^{m} \mathcal{R}_k$ – нерезонансное соотношение (определение операции сложения множеств из $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ приводится);

$V(D,\delta)$ – δ–окрестность множества $D \subset \mathbb{R}^1$;

$V(D,\delta,\Delta)$ – множество $V(D \cap \mathbb{R}^1, \delta) \cup (-\infty, \Delta) \cup (\Delta, +\infty)$, $D \subset \widetilde{\mathbb{R}}^1$;

$V(\mathcal{R}_k)$ – общее обозначение для $V(\mathcal{R}_k, \delta)$ и $V(\mathcal{R}_k, \delta, \Delta)$.

§1. Определения, обозначения и некоторые вспомогательные утверждения.

В этом параграфе, носящем вспомогательный характер, для функций из пространств $L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $p_1 \in [1, +\infty]$ вводится понятие (определение 1.1) множества «резонансных»точек, являющееся (пример 1.1) аналогом понятия множества частот тригонометрического многочлена. Приводятся установленные автором ранее теоремы (теоремы 1.2, 1.3) о разложении, т. е. о представлении данной функции из пространства $L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ в виде суммы функции из $L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ и функции из $L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, где $1/p + 1/q < 1$ и $p \in (1, +\infty]$ некоторый другой показатель суммируемости, а также устанавливается (теорема 1.4), содержащая ряд оценок для функций, преобразование Фурье которых обращается в ноль в некоторой окрестности нуля.

Пусть функция $u \in L^1(\mathbb{R}^1)$. Обозначим преобразование Фурье этой функции через $\widehat{u}$ и выберем его в виде

$$\widehat{u}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-iy\tau} u(\tau)\, d\tau. \tag{1.1}$$

Обратное преобразование Фурье функции $v \in L^1(\mathbb{R}^1)$ будем обозначать через $\widetilde{v}$. Оно имеет вид

$$\widetilde{v}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iy\tau} v(y) dy.$$

Обозначим также через $S(\mathbb{R}^1)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности, и через $S'(\mathbb{R}^1)$ – пространство медленно растущих обобщенных функций или, что то же самое, пространство обобщенных функций медленного роста.

Пусть $p \in [1, +\infty]$ и $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$, тогда, как известно (см., например, [19, с. 77]), функционал

$$(\gamma, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \overline{\gamma(t)} \varphi(t) dt, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^1)$$

принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^1)$.

Известно также, что преобразованием Фурье медленно растущей обобщенной функции f называется линейный непрерывный функционал на $S(\mathbb{R}^1)$, обозначаемый в соответствии с (1.1) через $\widehat{f}$ и задаваемый (с учетом выбора определения для (f, φ) и вида записи преобразования Фурье) формулой $(\widehat{f}, \widehat{\varphi}) = 2\pi(f, \varphi)$.

В силу введенных выше обозначений известные формулы (см., например, [20, гл. II, §2], [21, гл. II, §9]) принимают вид:

$$\begin{aligned} &\{\delta(\tau)\}^{\widehat{}}(y) = 1, \quad \{\gamma_1(\tau) * \gamma_2(\tau)\}^{\widehat{}}(y) = \widehat{\gamma}_1(y)\widehat{\gamma}_2(y), \\ &\{\widehat{\gamma}_1(y)\widehat{\gamma}_2(y)\}^{\widetilde{}}(\tau) = \gamma_1(\tau) * \gamma_2(\tau), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in S'(\mathbb{R}^1)$.

Положим $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ и будем считать окрестностью точки ∞ всякое множество вида $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}^1$, $a \leq b$.

Пусть числа $p_1, p \in [1, +\infty]$.

Определение 1.1 *Точка $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ называется нерезонансной точкой функции $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$, если существует такая функция $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p + 1/q = 1$, для которой $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в какой-либо окрестности точки u. Остальные точки множества $\widetilde{\mathbb{R}}^1$ называются резонансными точками функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$ и их множество обозначается $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$.*

Отметим, что равенство $\widehat{\gamma}(y) = \widehat{\alpha}_u(y)$ в определении 1.1 понимается, вообще говоря, в обобщенном смысле.

Из определения 1.1, очевидно, следует, что $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ замкнутое множество и, если $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p + 1/q = 1$, то $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$.

Следующий пример показывает, что координаты резонансных точек тригонометрических многочленов относительно любых пространств $L^p(\mathbb{R}^1)$, $p > 1$ являются частотами (или показателями Фурье) этих многочленов.

Пример 1.1 [15, с. 440] Пусть $\gamma(\tau) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k \tau}$, где $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^1$, $1 \le k \le n$, $\tau \in \mathbb{R}^1$. Тогда для любого $p \in (1, +\infty]$

$$\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\lambda_k\}.$$

Теорема 1.1 [15, с. 443] *Пусть* $p_1, p \in (1, +\infty]$ *и* $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$. *Тогда* $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p + 1/q = 1$ *в том и только в том случае, когда* $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$.

Замечание 1.0 Как видно из доказательства [15, с. 443], теорема 1.1 справедлива и в случае когда $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$.

Пусть $\delta > 0$ и $D \subset \mathbb{R}^1$. Обозначим через $V(D, \delta)$ δ–окрестность множества D.

Теорема 1.2 [15, с. 443] *Пусть* $p_1, p \in (1, +\infty]$, $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, *резонансное множество* $\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} \neq \varnothing$ *и* $\infty \notin \mathcal{R}_\gamma$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *можно указать функцию* $\mathcal{F}(\tau) = \mathcal{F}(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta)$, *удовлетворяющую условиям:* $\mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\widehat{\mathcal{F}}(y) = 1$, *если* $y \in V(\mathcal{R}_\gamma, \delta/4)$, *и* $\widehat{\mathcal{F}}(y) = 0$, *если* $y \notin V(\mathcal{R}_\gamma, \delta)$; *и разложение:*

$$\gamma(\tau) = A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) + a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta), \tag{1.3}$$

где $A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \gamma(\tau) * \mathcal{F}(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $supp\, \widehat{A}(y, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta)}$, $a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau) * \mathcal{F}(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p + 1/q = 1$.

Из теоремы 1.2 очевидным образом получаем два следствия.

Следствие 1.2.1 *Пусть выполнены условия теоремы 1.2,* $\delta > 0$ *и функция* $\mathcal{F}(\tau) = \mathcal{F}(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta)$ *удовлетворяет этой теореме. Тогда*

$$\|A(\,\cdot\,, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)},\ \|a(\,\cdot\,, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)} < C_{121} \|\gamma\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)},$$

$$\|a(\,\cdot\,, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta)\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} < C_{121},$$

где $C_{121} = \max\{1 + \|\mathcal{F}\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}, \|a(\,\cdot\,, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta)\|_{L^q(\mathbb{R}^1)}\} < \infty$.

Следствие 1.2.2 *Пусть выполнены условия теоремы 1.2 и функция* $\mathcal{F}(\tau) = \mathcal{F}(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta)$ *удовлетворяет этой теореме. Тогда, если функция* $\xi \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ *такова, что* $\mathcal{R}\{\xi, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}_\gamma$, *то имеет место разложение:*

$$\xi(\tau) = A(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta) + a(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta),$$

где $A(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \xi(\tau) * \mathcal{F}(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $supp\, \widehat{A}(y, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta)}$, $a(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \xi(\tau) - \xi(\tau) * \mathcal{F}(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из определения функций $A(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta)$, $a(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta)$, формул (1.2) и равенств: $\widehat{A}(y, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \widehat{\xi}(y)\widehat{\mathcal{F}}(y)$, $\widehat{a}(y, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \widehat{\xi}(y) - \widehat{\xi}(y) \cdot \widehat{\mathcal{F}}(y)$. $\square$

Пусть $\delta, \Delta > 0$ и $D \subset \widetilde{\mathbb{R}}^1$. Обозначим

$$V(D, \delta, \Delta) = V(D \cap \mathbb{R}^1, \delta) \cup (-\infty, -\Delta) \cup (\Delta, +\infty).$$

Теорема 1.3 [15, с. 444] *Пусть* $p_1, p \in (1, +\infty]$, $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\infty \in \mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$, $\mathcal{R}_\gamma \neq \widetilde{\mathbb{R}}^1$ *и числа* $\delta, \Delta > 0$ *таковы, что* $\overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)} \subsetneqq \widetilde{\mathbb{R}}^1$. *Тогда существует функция* $G(\tau) = G(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$, *удовлетворяющая условиям:* $G \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\widehat{G}(y) = 0$, *если* $y \in V(\mathcal{R}_\gamma, \delta/2, \Delta)$ *и* $\widehat{G}(y) = 1$, *если* $y \notin V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$; *и разложение*

$$\gamma(\tau) = A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) + a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta), \tag{1.4}$$

где $a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) = \gamma(\tau) * G(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p + 1/q = 1$ *и* $A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau) * G(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $supp\ \widehat{A}(y, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)}$.

Замечание 1.1 *В случае* $\mathcal{R}_\gamma = \widetilde{\mathbb{R}}^1$ *по определению полагаем:* $a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) \equiv 0$, $A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) = \gamma(\tau)$.

Из этой теоремы легко получаем два следствия.

Следствие 1.3.1 *Пусть выполнены условия теоремы 1.3 и функция* $G(\tau) = G(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$ *удовлетворяет этой теореме. Тогда*

$$\|A(\,\cdot\,, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)}, \quad \|a(\,\cdot\,, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)} < C_{131}\|\gamma\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)},$$

$$\|a(\,\cdot\,, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} < C_{131},$$

где $C_{131} = \max\{1 + \|G\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}, \|a(\,\cdot\,, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)\|_{L^q(\mathbb{R}^1)}\} < \infty$.

Следствие 1.3.2 *Пусть выполнены условия теоремы 1.3 и функция* $G(\tau) = G(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)$ *удовлетворяет этой теореме. Тогда, если функция* $\xi \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ *такова, что* $\mathcal{R}\{\xi, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}_\gamma$, *то выполняется разложение:*

$$\xi(\tau) = A(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) + a(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta),$$

где $a(\tau,\xi,\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta) = \xi(\tau)*G(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)\cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p+1/q=1$ *и* $\underline{A(\tau,\xi,\mathcal{R}_\gamma,\delta},\Delta) = \xi(\tau)-\xi(\tau)*G(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, *supp* $\widehat{A}(y,\xi,\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta)}$.

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из определения функций $a(\tau,\xi,\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta)$, $A(\tau,\xi,\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta)$, формул (1.2) и равенств: $\widehat{a}(y,\xi,\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta) = \widehat{\xi}(y)\cdot\widehat{G}(y)$, $\widehat{A}(y,\xi,\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta) = \widehat{\xi}(y)-\widehat{\xi}(y)\cdot\widehat{G}(y)$. $\square$

Далее, в работе, если это не станет приводить к путанице, вместо $V(\mathcal{R}_\gamma,\delta)$ и $V(\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta)$ будем писать $V(\mathcal{R}_\gamma)$ а вместо $A(\tau,\xi,\mathcal{R}_\gamma,\delta)$, $A(\tau,\xi,\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta)$, $a(\tau,\xi,\mathcal{R}_\gamma,\delta)$, и $a(\tau,\xi,\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta)$ - соответственно $A(\tau,\xi,\mathcal{R}_\gamma)$ и $a(\tau,\xi,\mathcal{R}_\gamma)$.

Теперь рассмотрим оценки некоторых интегралов от функций, преобразование Фурье которых обращается в ноль в окрестности нуля. Для этого введем ряд обозначений.

Пусть $a,b\in\mathbb{R}^1$, $a<b$ и число $\rho>0$ столь мало, что $a+\rho<b-\rho$. Обозначим через $\Omega(\tau,[a,b],\rho)$ такую функцию, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\Omega}(y,[a,b],\rho) = \frac{1}{\rho^2}\,\xi_{[a,b]}(y)*\xi_{[-\rho/2,\,\rho/2]}(y)*\xi_{[-\rho/2,\,\rho/2]}(y),$$

где ξ_M характеристическая функция множества $M\subseteq\mathbb{R}^1$.

Нетрудно проверить, что выполняются соотношения:

$$0\le\widehat{\Omega}(y,[a,b],\rho)\le 1, \tag{1.5}$$

$$\widehat{\Omega}(y,[a,b],\rho)=0,\quad y\notin(a-\rho,b+\rho), \tag{1.6}$$

$$\widehat{\Omega}(y,[a,b],\rho)=1,\quad y\in(a+\rho,b-\rho), \tag{1.7}$$

$$\left|\frac{d}{dy}\,\widehat{\Omega}(y,[a,b],\rho)\right|\le\frac{2}{\rho},\qquad \left|\frac{d^2}{dy^2}\,\widehat{\Omega}(y,[a,b],\rho)\right|\le\frac{1}{\rho^2}, \tag{1.8}$$

$$\Omega(\tau,[a,b],\rho)\in L^\nu(\mathbb{R}^1),\quad \nu\in[1,+\infty]. \tag{1.9}$$

Обозначим

$$K(t,[-b,b],\rho) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iyt}\,\frac{1-\widehat{\Omega}(y,[-b,b],\rho)}{iy}\,dy.$$

Тогда в силу выбора формы записи преобразования Фурье имеем:

$$\widehat{K}(y,[-b,b],\rho) = \frac{1-\widehat{\Omega}(y,[-b,b],\rho)}{iy},$$

откуда, используя (1.5)–(1.7), получаем, что:

$$1)\ \widehat{K}(y,[-b,b],\rho) = \begin{cases} 0, & y \in [-b+\rho, b-\rho], \\ 1/iy, & y \notin [-b-\rho, b+\rho]; \end{cases} \tag{1.10}$$

2) $|\widehat{K}(y,[-b,b],\rho)| < \dfrac{1}{|y|},\ \ y \neq 0;$

3) $\widehat{K}(y,[-b,b],\rho)$ – нечетная функция по y, имеющая вследствие (1.8) ограниченную вторую производную.

Лемма 1.0 *При сделанных выше обозначениях и ограничениях можно указать такую константу* $K_0 = K_0(b,\rho) > 0$, *что*

$$|K(t,[-b,b],\rho)| < \frac{K_0}{1+t^2}.$$

Доказательство. Используя свойства (1.5)–(1.8), в результате двукратного интегрирования по частям получаем:

$$K(t,[-b,b],\rho) = \frac{1}{2\pi i t^2}\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iyt}\left\{-\frac{2}{y^3}[1-\widehat{\Omega}(y,[-b,b],\rho)]\right\}dy-$$

$$-\frac{1}{2\pi i t^2}\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iyt}\left\{\frac{2}{y^2}\frac{d}{dy}\widehat{\Omega}(y,[-b,b],\rho)\right\}dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi i t^2}\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iyt}\left\{\frac{1}{y}\frac{d^2}{dy^2}\widehat{\Omega}(y,[-b,b],\rho)\right\}dy = \frac{O(1)}{t^2}.$$

Кроме того, в силу нечетности $\widehat{K}(y,[-b,b],\rho)$ и свойств (1.6)–(1.7) функция $K(t,[-b,b],\rho)$ ограничена, поскольку:

$$K(t,[-b,b],\rho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{b-\rho}^{b+\rho}\frac{\sin yt}{y}[1-\widehat{\Omega}(y,[-b,b],\rho)]dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{b+\rho}^{\infty}\frac{\sin yt}{y}\,dy = O(1).$$

Следовательно, можно указать такую константу K_0 , при которой выполняется утверждение леммы. □

Лемма 1.1 *Пусть* $p \in (1,+\infty]$, $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $\varepsilon > 0$, *supp* $\widehat{\gamma}(y) \cap (-\varepsilon,\varepsilon) = \varnothing$ *и* $M \in (1,+\infty)$. *Тогда для любого* $t \in \mathbb{R}^1$ *справедливо равенство:*

$$\int\limits_0^t \gamma(\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^1} K\left(\tau, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^1} K\left(\tau-t, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau. \qquad (1.11)$$

Доказательство. Пусть сначала $p \in (1,2]$ и $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$, тогда по теореме Хаусдорфа-Юнга [22, с. 128] $\widehat{\gamma}(y) \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p + 1/q = 1$. Кроме того, при каждом $t \in \mathbb{R}^1$ для $\xi_{[0,t]}(\tau)$ – характеристической функции отрезка $[0,t]$ имеем:

$$\widehat{\xi}_{[0,t]}(y) = \int\limits_0^t e^{-iy\tau}d\tau = \frac{1-e^{-iyt}}{iy}.$$

Следовательно, в силу формулы Парсеваля [22, с. 140]

$$\int\limits_0^t \gamma(\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \gamma(\tau)\xi_{[0,t]}(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^1} \widehat{\gamma}(y)\cdot\overline{\frac{1-e^{-iyt}}{iy}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iyt}\frac{1}{iy}\,\widehat{\gamma}(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{iy}\,\widehat{\gamma}(y)dy.$$

Так как по условию теоремы $\widehat{\gamma}(y) = 0$ при $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, то с учетом (1.10) имеем:

$$\frac{1}{iy}\,\widehat{\gamma}(y) = \widehat{K}\left(y, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\widehat{\gamma}(y), \quad y \in \mathbb{R}^1.$$

Тогда опять-таки по формуле Парсеваля [22 с. 140, с. 68] в силу вещественности ядра $K\left(\tau, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)$ выполняется равенство:

$$\int\limits_0^t \gamma(\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^1} K\left(t-\tau, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^1} K\left(-\tau, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau,$$

откуда ввиду нечетности ядра и следует (1.11).

Справедливость утверждения леммы в случае $p \in (2, +\infty]$ установлена автором в [23, с. 36]. $\square$

Лемма 1.2 *Пусть* $q \in [1, +\infty)$, $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1/p+1/q=1$, $\varepsilon > 0$ *и* $supp\, \widehat{\gamma}(y) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \varnothing$. *Тогда для любого* $M \in (1, +\infty)$ *выполняется соотношение*

$$K\left(\tau, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right) \in L^q(\mathbb{R}^1)$$

и при этом:

$$\inf_{M \in (1,+\infty)} \left\| K\left(\tau, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} < \frac{4}{\varepsilon^{1/q}}.$$

Доказательство. В работе автора [24, с. 32] было доказано следующее утверждение.

Лемма *Пусть* $a > 0$, $M \in (1, +\infty)$ *и* $q \in [1, +\infty)$. *Тогда*

$$\left\| K\left(t, [-a, a], \frac{1}{M}\,a\right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} = \frac{1}{a^{1/q}}\, C_1(M, q),$$

где

$$C_1(M, q) = \left\{ 4M \int\limits_0^\infty \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_x^\infty \frac{\sin 2M\theta \cdot \sin^2\theta}{\theta^3}\, d\theta \right|^q dx \right\}^{1/q}.$$

Следовательно, при каждом $\varepsilon > 0$, $M \in (1, +\infty)$ и $q \in [1, +\infty)$:

$$\left\| K\left(\tau, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right)^{1/q}}\, C_1(M, q) = \frac{1}{\varepsilon^{1/q}} \cdot \left(\frac{M+1}{M}\right)^{1/q} C_1(M, q) < +\infty.$$

Обозначим

$$C_2(M, q) = \left(\frac{M+1}{M}\right)^{1/q} C_1(M, q) =$$

$$= \left\{ 4(M+1) \int\limits_0^\infty \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_x^\infty \frac{\sin 2M\theta \cdot \sin^2\theta}{\theta^3}\, d\theta \right|^q dx \right\}^{1/q}, \quad q \in [1, +\infty).$$

В работе автора [15, с. 439] показано, что $\inf_{M>1} C_2(M, q) < 4$, откуда и следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 1.3 *Пусть* $p \in (1, +\infty)$, $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $\varepsilon > 0$, $supp\, \widehat{\gamma}(y) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \varnothing$ *и* $M \in (1, +\infty)$. *Тогда:*

1) существуют интегралы

$$\int_0^{\pm\infty} \gamma(\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}^1} K\left(\tau, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau, \qquad (1.12)$$

2) для любого $t \in \mathbb{R}^1$:

$$\int_t^{sign\, t\cdot\infty} \gamma(\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}^1} K\left(\tau - t, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\times$$

$$\times\gamma(\tau)d\tau. \qquad (1.13)$$

Доказательство. 1) Установим справедливость равенства (1.12). Для этого проверим, что в (1.11)

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_{\mathbb{R}^1} K\left(\tau - t, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau = 0.$$

В силу леммы 1.2 выполняется соотношение:

$$K\left(\tau, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right) \in L^q(\mathbb{R}^1)$$

Выберем произвольное $\delta > 0$ и укажем по нему такое число $T_1 > 0$, что

$$\|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^1\setminus[-T_1,T_1])} < \frac{\delta/2}{\left\|K\left(\tau, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^1)}},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда

$$\left|\int_{\mathbb{R}^1} K\left(\tau - t, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{-T_1}^{T_1} K\left(\tau - t, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\mathbb{R}^1\setminus[-T_1,T_1]} K\left(\tau-t,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau\right|\leq$$

$$\leq\left|\int\limits_{-T_1}^{T_1} K\left(\tau-t,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau\right|+\frac{\delta}{2}.$$

Выберем число $T_2>0$ столь большим, чтобы при $|t|>T_2$ выполнялось неравенство:

$$\left\{\int\limits_{-T_1-t}^{T_1-t}\left|K\left(\tau,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\right|^q d\tau\right\}^{1/q}<\frac{\delta/2}{\|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}}.$$

Тогда при $|t|>T_2$ справедлива оценка:

$$\left|\int\limits_{-T_1}^{T_1} K\left(\tau-t,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau\right|\leq$$

$$\leq\left\{\int\limits_{-T_1-t}^{T_1-t}\left|K\left(\theta,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\right|^q d\theta\right\}^{1/q}\times$$

$$\times\|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}<\frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, переходя в (1.11) к пределу при $t\to\pm\infty$, получаем выполнение равенства (1.12).

2) Из (1.11) и (1.12) получаем:

$$\int\limits_{t}^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau=\int\limits_{0}^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau-\int\limits_{0}^{t}\gamma(\tau)d\tau=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^1} K\left(\tau-t,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\gamma(\tau)d\tau.$$

Лемма 1.4 *Пусть $p\in(1,+\infty)$ и $\varepsilon>0$. Тогда для любой функции $\gamma(\tau)\in L^p(\mathbb{R}^1)$ такой, что:*

$$supp\;\widehat{\gamma}(y)\cap(-\varepsilon,\varepsilon)=\varnothing$$

справедливы оценки:

1) $$\left|\int\limits_0^{\pm\infty}\gamma(\tau)d\tau\right| \le \frac{1}{\varepsilon^{1/q}}\cdot 4\|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1; \tag{1.14}$$

2) $$\left\|\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} \le \frac{1}{\varepsilon^{1/q}}\cdot 4\|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1; \tag{1.15}$$

3) $$\left\|\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau\right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \le \frac{1}{\varepsilon}\cdot 4\|\gamma(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}; \tag{1.16}$$

4) если $p\in(1,2]$, *то*

$$\left\|\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau\right\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} \le \frac{4}{\varepsilon^{2/q}}\,\|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}, \tag{1.17}$$

где $1/p+1/q=1$.

Доказательство. 1) Согласно (1.12), при любом $M\in(1,+\infty)$ имеем:

$$\left|\int\limits_0^{\pm\infty}\gamma(\tau)d\tau\right| \le$$

$$\le \left\|K\left(\tau,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^1)}\|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}$$

Переходя к инфимуму по $M\in(1,+\infty)$ получаем в силу леммы 1.2 неравенство (1.14).

2) Оценка (1.15) получается аналогично (1.13).

3) Из (1.13) с учетом леммы 1.2 имеем:

$$\left\|\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau\right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \le$$

$$\le \left\|K\left(\tau,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}\|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}. \tag{1.18}$$

Переходя в правой части (1.18) к инфимуму по $M\in(1,+\infty)$, как и выше, получаем в силу леммы 1.2 требуемую оценку (1.16).

4) Т. к. $p \in (1,2]$, то $q \geq p$. Поэтому выполняется неравенство:

$$\left| \int\limits_{t}^{sign\, t\cdot\infty} \gamma(\tau)d\tau \right|^{q} \leq \left\| \int\limits_{t}^{sign\, t\cdot\infty} \gamma(\tau)d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)}^{q-p} \cdot \left| \int\limits_{t}^{sign\, t\cdot\infty} \gamma(\tau)d\tau \right|^{p},$$

откуда с учетом (1.15) и (1.16) получаем (1.17). $\square$

Теорема 1.4 *Пусть* $p_1 \in (1,+\infty)$, $p \in (1,+\infty]$, $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, *резонансное множество* $\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} \neq \varnothing$, $\varepsilon > 0$,

$$supp\, \widehat{\gamma}(y) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \varnothing \tag{1.19}$$

и $\mathcal{R}\{\int\limits_{t}^{sign\, t\cdot\infty} \gamma(\tau)d\tau, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$.

Тогда:

$$\left\| A(\tau, \int\limits_{\tau}^{sign\, \tau\cdot\infty} \gamma(\theta)d\theta, \mathcal{R}_\gamma) \right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)} \leq \frac{4}{\varepsilon^{1/q_1}} \|A(\tau,\gamma,\mathcal{R}_\gamma)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)}, \tag{1.20}$$

$$\left\| a(\tau, \int\limits_{\tau}^{sign\, \tau\cdot\infty} \gamma(\theta)d\theta, \mathcal{R}_\gamma) \right\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)} \leq \frac{4}{\varepsilon^{1/q_1}} \|a(\tau,\gamma,\mathcal{R}_\gamma)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)}, \tag{1.21}$$

где $1/p_1 + 1/q_1 = 1$.

Доказательство. Так как в силу (1.19) $\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} \neq \widetilde{\mathbb{R}^1}$, то возможны два случая:

а) $\infty \notin \mathcal{R}_\gamma$,

б) $\infty \in \mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$, $\mathcal{R}_\gamma \neq \widetilde{\mathbb{R}^1}$.

а) Сначала рассмотрим случай, когда $\infty \notin \mathcal{R}_\gamma$. Выберем произвольное число $\delta > 0$ и докажем (1.20), (1.21). Для упрощения записи обозначим:

$$\xi(t) = \int\limits_{t}^{sign\, t\cdot\infty} \gamma(\tau)d\tau.$$

В силу (1.16) $\xi \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$. Запишем разложение функции ξ на сумму двух функций, одна из которых принадлежит классу $L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, а другая – классу

$L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p + 1/q = 1$. Так как по условию $\mathcal{R}_\xi \subseteq \mathcal{R}_\gamma$, то согласно теореме 1.2 и следствию 1.2.2 существуют:

1) функция $\mathcal{F}(\tau) = \mathcal{F}(\tau, \mathcal{R}_\gamma, \delta)$, удовлетворяющую условиям: $\mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\widehat{\mathcal{F}}(y) = 1$, если $y \in V(\mathcal{R}_\gamma, \delta/4)$, и $\widehat{\mathcal{F}}(y) = 0$, если $y \notin V(\mathcal{R}_\gamma, \delta)$;

2) разложение:

$$\xi(t) = A(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta) + a(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta),$$

где $A(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \xi(\tau) * \mathcal{F}(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $supp\,\widehat{A}(y, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta)}$, $a(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \xi(\tau) - \xi(\tau) * \mathcal{F}(\tau) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p + 1/q = 1$.

Далее, выберем произвольное $M \in (1, +\infty)$ и обозначим

$$K_1(-\tau) = K\left(\tau, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right).$$

Тогда, т. к. $K_1(\tau) \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то по теореме 1.2 получаем:

$$A(\tau, \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma(\theta)d\theta, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma(\theta)d\theta * \mathcal{F}(\tau) =$$

$$= [\gamma(\tau) * K_1(\tau)] * \mathcal{F}(\tau) = [\gamma(\tau) * \mathcal{F}(\tau)] * K_1(\tau) = A(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) * K_1(\tau);$$

$$a(\tau, \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma(\theta)d\theta, \mathcal{R}_\gamma, \delta) = \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma(\theta)d\theta -$$

$$- \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma(\theta)d\theta * \mathcal{F}(\tau) = \gamma(\tau) * K_1(\tau) - \gamma(\tau) * K_1(\tau) * \mathcal{F}(\tau) =$$

$$= [\gamma(\tau) - \gamma(\tau) * \mathcal{F}(\tau)] * K_1(\tau) = a(\tau, \gamma, \mathcal{R}_\gamma, \delta) * K_1(\tau),$$

откуда с учетом леммы 1.2 получаем оценки (1.20) и (1.21).

б) Случай, когда $\infty \in \mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$, $\mathcal{R}_\gamma \neq \widetilde{\mathbb{R}^1}$ и числа $\delta, \Delta > 0$ таковы, что $\overline{V(\mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta)} \subsetneqq \mathbb{R}^1$, рассматривается практически так же, как и предыдущий случай (а), но с использованием ссылки на теорему 1.3 и следствие 1.3.2, согласно которым:

$$\xi(\tau) = A(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta) + a(\tau, \xi, \mathcal{R}_\gamma, \delta, \Delta).$$

§2. Свойства резонансных множеств.

Определим на $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = R^1 \cup \{\infty\}$ операцию сложения следующим образом. Суммой элементов $\omega_1, \omega_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ будем называть элемент из $\widetilde{\mathbb{R}}^1$, обозначаемый $\omega_1 + \omega_2$ и определяемый для конечных элементов как обычно, а в остальных случаях по правилам:

1) выражение $\infty + \infty$ не определено;

2) $\omega + \infty = \infty, \ \omega \in \mathbb{R}^1$.

Введенную так операцию будем предполагать коммутативной и ассоциативной, сумму более чем трех слагаемых определять индуктивно и при этом выражение, содержащее более одного символа ∞, считать не имеющим смысла.

Для $A, B, \ldots, C \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}^1$ положим:

$$A + B + \ldots + C = \{x \,|\, x = a + b + \ldots + c, \ a \in A, \ b \in B, \ldots, \ c \in C\}.$$

Сумма множеств считается определенной, если определены соответствующие суммы элементов этих множеств.

Отметим некоторые свойства множества резонансных точек.

Автором были установлены следующие два утверждения.

Лемма 2.1 [17, с. 73] *Пусть числа $p_1, p \in (1, +\infty]$ и функция $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, тогда:*

1) для любого $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$

$$\mathcal{R}\{c\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\};$$

2) для любых функций $\gamma_1, \gamma_2 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ выполняется включение

$$\mathcal{R}\{\gamma_1 + \gamma_2, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{\gamma_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\gamma_2, L^p(\mathbb{R}^1)\};$$

3) если $\omega \in \mathbb{R}^1$, то

$$\mathcal{R}\{e^{i\omega\tau}\gamma(\tau), L^p(\mathbb{R}^1)\} = \{\omega\} + \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}.$$

Лемма 2.2 [17, с. 74] *Пусть числа $p_1, p \in (1, +\infty]$, функция $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ и точка $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$. Тогда, если существует V_u окрестность точки u, в которой*

$$\widehat{\gamma}, \ \frac{d\widehat{\gamma}}{dy}, \ \frac{d^2\widehat{\gamma}}{dy^2} \in L^1(V_u),$$

то $u \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$.

Продолжим описание свойств резонансных множеств.

Теорема 2.1 *Пусть* $p_1 \in (1, +\infty)$, $p \in [1, +\infty]$, $\gamma \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\varepsilon > 0$ *и* $supp\,\widehat{\gamma}(y) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \varnothing$. *Тогда:*

$$\mathcal{R}\left\{\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty} \gamma(\tau)d\tau, L^p(\mathbb{R}^1)\right\} \subseteq \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}.$$

Доказательство. Так как $p_1 \in (1, +\infty)$, то согласно (1.16) существует $\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty} \gamma(\tau)d\tau \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$. Пусть сначала $|u| < +\infty$, $u \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$. Покажем, что в этом случае

$$u \notin \mathcal{R}\left\{\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty} \gamma(\tau)d\tau, L^p(\mathbb{R}^1)\right\}.$$

Так как $u \notin \mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^1)\}$, $|u| < +\infty$, то существует $\rho > 0$ такое, что в 3ρ–окрестности точки u функция $\widehat{\gamma}(y)$ совпадает с преобразованием Фурье какой-либо функции $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^1)$, $1/p + 1/q = 1$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\beta(t) = \gamma(t) * \Omega(t, [u-2\rho, u+2\rho], \rho)$. В силу (1.2), (1.6) и (1.7): $\widehat{\beta}(u) = \widehat{\gamma}(y)\widehat{\Omega}(y, [u-2\rho, u+2\rho], \rho) = \widehat{\alpha}_u(y) \cdot \widehat{\Omega}(y, [u-2\rho, u+2\rho], \rho)$. Но тогда $\beta(t) = \alpha_u(t) * \Omega(t, [u-2\rho, u+2\rho], \rho) \in L^q(\mathbb{R}^1)$, поскольку согласно (1.9) ядро $\Omega(t, [u-2\rho, u+2\rho], \rho) \in L^1(\mathbb{R}^1)$.

Выберем произвольное $M \in (1, +\infty)$. В силу (1.2) и (1.13):

$$\left\{\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty} \gamma(\tau)d\tau\right\}^{\wedge}(y) =$$

$$= -\widehat{K}\left(y, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\widehat{\gamma}(y),$$

откуда

$$\left\{\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty} \gamma(\tau)d\tau\right\}^{\wedge}(y) \cdot \widehat{\Omega}(y, [u-2\rho, u+2\rho], \rho) =$$

$$= -\widehat{K}\left(y, \left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon, \frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right], \frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\widehat{\beta}(y)$$

и, следовательно,

$$\left\{\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau\right\}*\Omega(t,[u-2\rho,u+2\rho],\rho)=$$

$$=-K\left(t,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)*\beta(t)\in L^q(\mathbb{R}^1),$$

поскольку согласно лемме 2.0 $\quad K\left(t,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\in L^1(\mathbb{R}^1)$.

Таким образом, в интервале $(u-\rho,u+\rho)$ преобразование Фурье функции $\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau$ совпадает с преобразованием Фурье функции класса $L^q(\mathbb{R}^1)$, т. е. u – нерезонансная точка функции $\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau$.

Пусть теперь $u=\infty$, $u\notin\mathcal{R}\{\gamma,L^p(\mathbb{R}^1)\}$. Покажем, что и в этом случае $u\notin\mathcal{R}\left\{\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau,L^p(\mathbb{R}^1)\right\}$.

Если $u\notin\mathcal{R}\{\gamma,L^p(\mathbb{R}^1)\}$, то по определению окрестности точки ∞ получаем, что существуют такие $a\le b$ и функция $\alpha_\infty(\tau)\in L^q(\mathbb{R}^1)$, что $\widehat{\alpha}_\infty(y)=\widehat{\gamma}(y)$, $y\in(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$. Выберем произвольное $\rho>0$ и рассмотрим функцию $\beta(t)=\gamma(t)*[\delta(t)-\Omega(t,[a-2\rho,b+2\rho],\rho)]=\gamma(t)-\gamma(t)*\Omega(t,[a-2\rho,b+2\rho],\rho)$. Имеем

$$\widehat{\beta}(y)=\widehat{\gamma}(y)-\widehat{\gamma}(y)\widehat{\Omega}(y,[a-2\rho,b+2\rho],\rho).$$

В силу свойств (1.5)–(1.7) получаем, что

$$\widehat{\beta}(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\in(a-\rho,b+\rho),\\ \widehat{\gamma}(y), & \text{если } y\notin(a-3\rho,b+3\rho).\end{cases}$$

Кроме того,

$$\widehat{\beta}(y)=\widehat{\gamma}(y)\left\{1-\widehat{\Omega}(y,[a-2\rho,b+2\rho],\rho)\right\}=$$

$$=\widehat{\alpha}_\infty(y)\left\{1-\widehat{\Omega}(y,[a-2\rho,b+2\rho],\rho)\right\}=$$

$$=\widehat{\alpha}_\infty(y)-\widehat{\alpha}_\infty(y)\widehat{\Omega}(y,[a-2\rho,b+2\rho],\rho),$$

откуда $\beta(t)=\alpha_\infty(t)-\alpha_\infty(t)*\Omega(t,[a-2\rho,b+2\rho],\rho)\}\in L^q(\mathbb{R}^1)$. Не умаляя общности можно считать, что $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset(a,b)$. Поэтому далее имеем:

$$-\left\{\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau\right\}^{\frown}(y)=$$

$$= \widehat{K}\left(y,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\widehat{\gamma}(y),$$

откуда

$$-\left\{\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau\right\}\widehat{\ }(y)\cdot\left\{1-\widehat{\Omega}(y,[a-2\rho,b+2\rho],\rho)\right\}=$$

$$= \widehat{K}\left(y,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\cdot\widehat{\gamma}(y)\times$$

$$\times\left\{1-\widehat{\Omega}(y,[a-2\rho,b+2\rho],\rho)\right\}=$$

$$= \widehat{K}\left(y,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\widehat{\beta}(y).$$

Так как в силу леммы 2.0 функция

$$K\left(t,\left[-\frac{M}{M+1}\,\varepsilon,\frac{M}{M+1}\,\varepsilon\right],\frac{1}{M+1}\,\varepsilon\right)\in L^1(\mathbb{R}^1),$$

то функция $\left\{\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau\right\}\widehat{\ }(y)\cdot\left\{1-\widehat{\Omega}(y,[a-2\rho,b+2\rho],\rho)\right\}$ совпадает с преобразованием Фурье функции из $L^q(\mathbb{R}^1)$. Следовательно, $\infty\notin\mathcal{R}\left\{\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty}\gamma(\tau)d\tau, L^p(\mathbb{R}^1)\right\}$. $\Box$

Теорема 2.2 *Пусть $p_1,p\in[1,+\infty]$, $\gamma\in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$. Тогда, если γ – вещественнозначная функция, то множество $\mathcal{R}\{\gamma,L^p(\mathbb{R}^1)\}$ симметрично.*

Доказательство. Пусть функция $\gamma\in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ вещественна и $u_0\notin\mathcal{R}\{\gamma,L^p(\mathbb{R}^1)\}$. Тогда существует функция $\alpha\in L^q(\mathbb{R}^1)$ такая, что в некоторой окрестности точки u_0 выполняется равенство $\widehat{\gamma}(y)=\widehat{\alpha}(y)$.

Так как γ – вещественнозначная функция, то в силу [20, с. 23, с. 30] справедливо равенство $\widehat{\gamma}(-y)=\overline{\widehat{\gamma}(y)}$. Следовательно, если в окрестности точки $y=u_0$ функция $\widehat{\gamma}(y)$ совпадает с $\widehat{\alpha}(y)$, то в окрестности точки $y=-u_0$ функция $\widehat{\gamma}(y)$ совпадает с $\overline{\widehat{\alpha}(y)}$, являющейся преобразованием Фурье функции $\overline{\alpha}(-t)$. Но $\overline{\alpha}(-t)\in L^q(\mathbb{R}^1)$. Таким образом, точка $y=-u_0$ также является нерезонансной, т. е. $\mathcal{R}\{\gamma,L^p(\mathbb{R}^1)\}$ симметрично. $\Box$

§3. Оценка интеграла от произведения функций специального вида.

Пусть числа $p_1, p_2 \in (1, +\infty]$ удовлетворяют неравенству :

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1 \tag{3.1}$$

и функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\gamma_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^1)$. В этом параграфе мы рассмотрим вопрос об оценке интегралов вида:

$$\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma_1(\theta) d\theta \Big\} \gamma_2(\tau) d\tau. \tag{3.2}$$

Обозначим $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}\{\gamma_1, L^{p_2}(\mathbb{R}^1)\}$, $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}\{\gamma_2, L^{p_1}(\mathbb{R}^1)\}$ и воспользуемся определением операции сложения для элементов из $\widetilde{\mathbb{R}}^1$, сделанным в §2.

Определение 3.1 Будем говорить, что для функций $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\gamma_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^1)$ выполнено нерезонансное условие, если хотя бы одно из множеств $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ пусто, или, если оба они не пусты, то не более чем одно из них содержит бесконечную точку и при этом выполнено нерезонансное соотношение

$$0 \notin \sum_{k=1}^{2} \mathcal{R}_k. \tag{3.3}$$

Замечание 3.1 Ясно, что если $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ не пусты и по крайней мере одно из них не содержит бесконечную точку, то множество $\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$ замкнуто.

Пусть резонансные множества $\mathcal{R}_k \neq \varnothing,\ 1 \leqslant k \leqslant 2$, не более чем одно из них содержит бесконечную точку и выполнено нерезонансное соотношение (3.3). Обозначим $d = \operatorname{dist}\left[0, \sum\limits_{k=1}^{2} \mathcal{R}_k\right]$. Тогда $d > 0$ и можно указать такие $\delta = \delta(d) > 0$ и $\Delta = \Delta(d) > 0$, что для $V(\mathcal{R}_k)$–окрестностей резонансных множеств $\mathcal{R}_k,\ 1 \leqslant k \leqslant 2$, будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{2} d \leqslant \operatorname{dist}\left[0, \sum_{k=1}^{2} V(\mathcal{R}_k)\right]. \tag{3.4}$$

Пусть, далее, функции $\xi_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ и $\xi_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^1)$ таковы, что: $\mathcal{R}\{\xi_1, L^{p_2}(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}\{\xi_2, L^{p_1}(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}_2$. Функции $A(t, \xi, \mathcal{R}_\gamma)$, $a(t, \xi, \mathcal{R}_\gamma)$, построенные в следствиях 1.2.2 и 1.3.2 будем для $\delta(d)$ и $\Delta(d)$ обозначать соответственно через $A(t,\xi,\mathcal{R}_\gamma,d)$ и $a(t,\xi,\mathcal{R}_\gamma,d)$. Таким образом, согласно следствиям 1.2.2 и 1.3.2 при каждом $1 \leqslant k \leqslant 2$ будет выполняться включение $\operatorname{supp}\widehat{A}(y,\xi,\mathcal{R}_\gamma,d) \subset V(\mathcal{R}_k)$, а разложения, построенные на основании следствий 1.2.2 и 1.3.2, примут вид:

1)

$$\xi_1(\tau) = A(\tau,\xi_1,\mathcal{R}_1,d) + a(\tau,\xi_1,\mathcal{R}_1,d),$$

где $A(\tau,\xi_1,\mathcal{R}_1,d) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $supp\,\widehat{A}(y,\xi_1,\mathcal{R}_1,d) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_1)}$, $a(\tau,\xi_1,\mathcal{R}_1,d) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \cap L^{q_2}(\mathbb{R}^1)$, $1/p_2 + 1/q_2 = 1$;

2)

$$\xi_2(\tau) = A(\tau,\xi_2,\mathcal{R}_2,d) + a(\tau,\xi_2,\mathcal{R}_1,d),$$

где $A(\tau,\xi_2,\mathcal{R}_1,d) \in L^{p_2}(\mathbb{R}^1)$, $supp\,\widehat{A}(y,\xi_2,\mathcal{R}_1,d) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_1)}$, $a(\tau,\xi_2,\mathcal{R}_1,d) \in L^{p_2}(\mathbb{R}^1) \cap L^{q_1}(\mathbb{R}^1)$, $1/p_1 + 1/q_1 = 1$.

Доказательство нижеследующей теоремы практически дословно повторяет доказательство теоремы 3.1 из работы автора [16, с. 591–592].

Теорема 3.1 *Пусть числа $p_1, p_2 \in (1,+\infty]$ удовлетворяют условию (3.1); функции $\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant 2$; резонансные множества $\mathcal{R}_k \neq \varnothing$, $1 \leqslant k \leqslant 2$, причем не более чем одно из них содержит бесконечную точку; выполнено нерезонансное соотношение (3.3), $d = \operatorname{dist}\left[0, \sum\limits_{k=1}^{2}\mathcal{R}_k\right]$, а $V(\mathcal{R}_k)$-окрестности резонансных множеств $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant 2$, выбраны так, что выполняется (3.4). Тогда, если функции $\xi_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$ и $\xi_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^1)$ таковы, что $\mathcal{R}\{\xi_1, L^{p_2}(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}\{\xi_2, L^{p_1}(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}_2$, то:*

$$\left|\int\limits_0^t \prod_{k=1}^{2}\xi_k(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}}\cdot\left(\frac{2}{d}\right)^{1/r} + 1\right\}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{2}\Big\{\|A(\tau,\xi_k,\mathcal{R}_k,d)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} + \|a(\tau,\xi_k,\mathcal{R}_k,d)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} +$$

$$+\|a(\tau,\xi_k,\mathcal{R}_k,d)\|_{L^{r_k}(\mathbb{R}^1)}\Big\}, \tag{3.5}$$

где $1/s = \sum_{j=1}^{2} 1/p_j$, $1/r = 1 - 1/s$ и $1/r_1 = 1 - 1/p_2$, $1/r_2 = 1 - 1/p_1$.

Доказательство. При сделанных выше обозначениях и предположениях:

$$\xi_k(\tau) = A(\tau,\xi_k,\mathcal{R}_k,d) + a(\tau,\xi_k,\mathcal{R}_k,d),$$

где $\operatorname{supp}\widehat{A}(y,\xi_k,\mathcal{R}_k,d)\subset V(\mathcal{R}_k),\ 1\leqslant k\leqslant 2$. Обозначив для упрощения записи: $A_k(\tau)=A(\tau,\xi_k,\mathcal{R}_k,d)$ и $a_k(\tau)=a(\tau,\xi_k,\mathcal{R}_k,d),\ 1\leqslant k\leqslant 2$, имеем:

$$\left|\int\limits_0^t\left[\prod_{k=1}^2\xi_k(\tau)\right]d\tau\right|\leqslant\left|\int\limits_0^t\prod_{k=1}^2A_k(\tau)\,d\tau\right|+\sum_{\alpha=1}^2\left|\int\limits_0^t\left[\prod_{\substack{j=1\\j\neq\alpha}}^2A_j(\tau)\right]a_\alpha(\tau)\,d\tau\right|+$$

$$+\left|\int\limits_0^t\prod_{\alpha=1}^2a_\alpha(\tau)\,d\tau\right|. \tag{3.6}$$

Оценим каждое слагаемое из правой части (3.6). Рассмотрим первое слагаемое. Согласно следствиям 1.2.2, 1.3.2 $A_k(\tau)\in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, причем $\operatorname{supp}\widehat{A}_k(y)\subset V(\mathcal{R}_k),\ 1\leqslant k\leqslant 2$, а множества $V(\mathcal{R}_k),\ 1\leqslant k\leqslant 2$, по условию удовлетворяют (3.4).

В работе автора [16, с. 590] было доказано следующее утверждение (приводится с небольшими изменениями в обозначениях).

Лемма *Пусть $m\geqslant 2$, числа $p_1,\ldots,p_m\in(1,+\infty]$ удовлетворяют условию:*

$$\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_m}<1$$

$d>0$, множества $W_1,\ldots,W_m\subset\widetilde{\mathbb{R}}^1$, причем не более чем одно из них содержит бесконечную точку и

$$\frac{d}{2}\leqslant\operatorname{dist}\left[0,\sum_{k=1}^mW_k\right],$$

а функции $x_1\in L^{p_1}(\mathbb{R}^1),\ldots,x_m\in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$ таковы, что $\operatorname{supp}\widehat{x}_k\subseteq W_k$, $1\leqslant k\leqslant m$. Тогда

$$\left|\int\limits_0^t\prod_{k=1}^mx_k(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}}\cdot\frac{2}{d}^{1/r}\prod_{k=1}^m\|x_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}, \tag{3.7}$$

где

$$\frac{1}{s}=\sum_{k=1}^m\frac{1}{p_k}\quad\text{и}\quad\frac{1}{r}=1-\frac{1}{s}.$$

Следовательно, по этой лемме выполняется неравенство (3.7) при $x_k(\tau)=A_k(\tau),\ 1\leqslant k\leqslant 2$:

$$\left|\int\limits_0^t\prod_{k=1}^2A_k(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}}\cdot\frac{1}{(d/2)^{1/r}}\prod_{k=1}^2\|A_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} \tag{3.8}$$

Оценим слагаемые, входящие в первую сумму из правой части (3.6). Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^t \Big[A_j(\tau)\Big] a_\alpha(\tau)\,d\tau, \qquad j \neq \alpha.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим:

$$\left|\int\limits_0^t \Big[A_j(\tau)\Big] a_\alpha(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \|A_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^1)} \cdot \|a_\alpha\|_{L^{r_\alpha}(\mathbb{R}^1)}, \qquad j \neq \alpha \tag{3.9}$$

где $1/r_\alpha = 1 - 1/p_j,\ \ j \neq \alpha$. Для последнего слагаемого имеем:

$$\left|\int\limits_0^t \prod_{j=1}^2 a_j(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \|a_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)} \cdot \|a_2\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^1)}, \quad \big(\leqslant \|a_1\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^1)} \cdot \|a_2\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^1)}\big), \tag{3.10}$$

где $1/r_2 = 1 - 1/p_1,\ 1/r_1 = 1 - 1/p_2$. Так как при всех $1 \leqslant j \leqslant 2$:

$$\|a_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^1)}, \quad \|a_j\|_{L^{r_j}(\mathbb{R}^1)} \leqslant \|a_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^1)} + \|a_j\|_{L^{r_j}(\mathbb{R}^1)},$$

где $1/r_1 = 1 - 1/p_2,\ 1/r_2 = 1 - 1/p_1$, то в силу (3.8), (3.9) и (3.10) неравенство (3.5) выполняется. $\square$

Используя эту теорему, построим оценку интеграла (3.2).

Теорема 3.2 *Пусть числа $p_1, p_2 \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (3.1); существует окрестность нуля, в которой $\widehat{\gamma}_1(y) \equiv 0$; функции $\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant k \leqslant 2$; $\widehat{\gamma}_1(y) \equiv 0$ в некоторой окрестности нуля; резонансные множества $\mathcal{R}_k \neq \varnothing$, $1 \leqslant k \leqslant 2$, причем не более чем одно из них содержит бесконечную точку; выполнено нерезонансное соотношение (3.3), $d = \operatorname{dist}\left[0, \sum\limits_{k=1}^2 \mathcal{R}_k\right]$, а $V(\mathcal{R}_k)$–окрестности резонансных множеств $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant 2$, выбраны так, что выполняется (3.4). Тогда:*

$$\left|\int\limits_0^t \Big\{\int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma_1(\theta)d\theta\Big\}\gamma_2(\tau)d\tau\right| \leqslant 4\left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}} \cdot \left(\frac{2}{d}\right)^{1/r} + 1\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{2}{d^{1/r_2}} + \frac{1}{d^{1/p_2}}\right\}\prod_{k=1}^2\Big\{\|A(\tau,\gamma_k,\mathcal{R}_k,d)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}+$$

$$+\|a(\tau,\gamma_k,\mathcal{R}_k,d)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} + \|a(\tau,\gamma_k,\mathcal{R}_k,d)\|_{L^{r_k}(\mathbb{R}^1)}\Big\}, \tag{3.11}$$

где $1/s = \sum_{j=1}^{2} 1/p_j,\ 1/r = 1 - 1/s$ *и* $1/r_1 = 1 - 1/p_2,\ 1/r_2 = 1 - 1/p_1.$

Доказательство. Так как по условию теоремы $\widehat{\gamma}_1(y) \equiv 0$ в некоторой окрестности нуля, то согласно (1.16) существует:

$$\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma_1(\theta)d\theta \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1).$$

Обозначим $\xi_1(\tau) = \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma_1(\theta)d\theta, \quad \xi_2(\tau) = \gamma_2(\tau)$. тогда $\xi_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$. Т. к. согласно теореме 2.1 выполняется включение

$$\mathcal{R}_{\xi_1} = \mathcal{R}\Big\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma_1(\theta)d\theta, L^{p_2}\Big\} \subseteq \mathcal{R}\{\gamma_1, L^{p_2}\},$$

то для $V(\mathcal{R}_{\xi_1})$ и $V(\mathcal{R}_{\xi_2})$ выполняется условие (3.4):

$$\frac{1}{2}d \leqslant \operatorname{dist}\left[0, \sum_{k=1}^{2} V(\mathcal{R}_{\xi_k})\right]$$

Следовательно, по теореме 3.1 будет выполняться неравенство:

$$\left|\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma_1(\theta)d\theta\Big\}\gamma_2(\tau)d\tau\right| = \left|\int\limits_0^t \xi_1(\tau)\cdot\xi_2(\tau)d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}}\cdot\left(\frac{2}{d}\right)^{1/r} + 1\right\} \times \prod_{k=1}^{2}\Big[\|A(\tau, \xi_k, \mathcal{R}_k, d)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}] +$$

$$+\|a(\tau, \xi_k, \mathcal{R}_k, d)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)} + \|a(\tau, \xi_k, \mathcal{R}_k, d)\|_{L^{r_k}(\mathbb{R}^1)}\Big] =$$

$$= \left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}}\cdot\left(\frac{2}{d}\right)^{1/r} + 1\right\}\Big[\|A(\tau, \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma_1(\theta)d\theta, \mathcal{R}_1, d)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)} +$$

$$+\|a(\tau, \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} \gamma_1(\theta)d\theta, \mathcal{R}_1, d)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)} +$$

$$+\|a(\tau,\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty}\gamma_1(\theta)d\theta,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^1)}\Bigg]\Bigg\{\|A(\tau,\gamma_2,\mathcal{R}_2,d)\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^1)}+$$

$$+\|a(\tau,\gamma_2,\mathcal{R}_2,d)\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^1)}+\|a(\tau,\gamma_2,\mathcal{R}_2,d)\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^1)}\Bigg\},$$

где $1/s=\sum_{j=1}^{2}1/p_j,\ 1/r=1-1/s$ и $1/r_1=1-1/p_2,\ 1/r_2=1-1/p_1$.

В силу (1.20) и (1.21) получим:

$$\|A(\tau,\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty}\gamma_1(\theta)d\theta,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)}\leqslant\frac{4}{d^{1/r_2}}\|A(\tau,\gamma_1,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)}$$

$$\|a(\tau,\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty}\gamma_1(\theta)d\theta,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)}\leqslant\frac{4}{d^{1/r_2}}\|a(\tau,\gamma_1,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)}$$

поскольку $1/r_2=1-1/p_1$. Аналогично:

$$\|a(\tau,\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty}\gamma_1(\theta)d\theta,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^1)}\leqslant\frac{4}{d^{1/p_2}}\|a(\tau,\gamma_1,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^1)},$$

т. к. $1/p_2=1-1/r_1$. Следовательно,

$$\|A(\tau,\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty}\gamma_1(\theta)d\theta,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)}+\|a(\tau,\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty}\gamma_1(\theta)d\theta,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)}+$$

$$+\|a(\tau,\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty}\gamma_1(\theta)d\theta,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^1)}\leqslant\frac{4}{d^{1/r_2}}\|A(\tau,\gamma_1,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)}+$$

$$+\frac{4}{d^{1/r_2}}\|a(\tau,\gamma_1,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^1)}+\frac{4}{d^{1/p_2}}\|a(\tau,\gamma_1,\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^1)},$$

откуда и получаем выполнение неравенства (3.11). □

§4. Вспомогательное интегральное уравнение и условие ограниченности его решений.

В этом параграфе исходное дифференциальное уравнение (0.1) преобразуется (теорема 4.1) в некоторое интегральное, для которого устанавливается (теорема 4.2) необходимое и достаточное условие ограниченности решений. При этом в теореме 4.2 на коэффициенты уравнения (0.1) налагается ряд дополнительных ограничений, исследование которых будет продолжено в следующем параграфе.

Выберем произвольный вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и наряду с системой (0.1) рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) = y_0 + \int\limits_0^t P(\tau)y(\tau)d\tau + \int\limits_0^t f(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^1. \tag{4.1}$$

Как известно (см., например, [4, с. 106–108]), решением $y(t, y_0)$ уравнения (0.1) с начальным условием $y(0, y_0) = y_0$ является функция $y(t) = y(t, y_0)$, удовлетворяющая интегральному уравнению (4.1). При этом подстановка решения $y(t)$ из (4.1) в уравнение (0.1) дает выполнение равенства (0.1) для п. в. $t \in \mathbb{R}^1$. Укажем точки оси $\mathbb{R}^1$, в которых выполняется равенство (0.1).

Определение (см., например, [25, с. 236]). *Точка t называется точкой Лебега суммируемой функции $h(\tau)$, если $h(t) \neq \pm\infty$ и*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \int\limits_t^{t+\rho} [h(\tau) - h(t)]d\tau = 0.$$

Как известно [25, с. 237], если $h(\tau)$ суммируема на некотором отрезке $[a, b]$, то почти всякая точка указанного отрезка является точкой Лебега этой функции.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1 *Если точка t_0 является одновременно точкой Лебега матрицы $P(t) = \|p_{ij}(t)\|_1^n$ и вектора $f(t)$ из системы (0.1) (т. е. точкой Лебега для каждой из функций $p_{ij}(t)$ и $f_l(t)$, $1 \leq i, j, l \leq n$), то для функции $y(t, y_0)$, $y(0, y_0) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, задаваемой уравнением (4.1), равенство (0.1) выполняется в точке t_0.*

Пусть $n \geq 1$, $p \in (1, +\infty)$ и $r \in (1, +\infty]$. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (0.1):

$$\dot{y}(t) = P(t)y(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

где по условию $P(t) = L(t) + H(t)$ и перепишем его в виде:

$$\dot{y}(t) = [L(t) + H(t)]y(t) + f(t). \tag{4.2}$$

Отметим, что так как система (4.2) удовлетворяет условию (У2), то согласно лемме 1.4 для системы (4.2) определены и локально интегрируемы функции:

$$\int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} H(\theta)d\theta, \quad B_2(t) = \int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} H(\theta)d\theta \cdot H(t).$$

Теорема 4.1 *Пусть* $m \geq 2$, $n \geq 1$, $p \in (1, +\infty)$, $r \in (1, +\infty]$; *коэффициенты уравнения (4.2) удовлетворяют условиям (У1), (У2) и* $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *– произвольный вектор. Тогда, если функция* $y(t) = y(t, y_0)$, $y(0, y_0) = y_0$ *является решением уравнения (4.2), то она является решением и уравнения*

$$\begin{gathered}\Psi_2(t)y(t) = \Psi_2(0)\cdot y_0 + \int\limits_0^t \Psi_2(\tau)L(\tau)y(\tau)d\tau + \\ + \int\limits_0^t \Psi_2(\tau)f(\tau)d\tau + \int\limits_0^t B_2(\tau)y(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^1,\end{gathered} \tag{4.3}$$

где

$$\Psi_2(\tau) = E + \int\limits_\tau^{sign\, \tau\cdot\infty} H(\theta)d\theta, \quad B_2(\tau) = \int\limits_\tau^{sign\, \tau\cdot\infty} H(\theta)d\theta \cdot H(\tau).$$

Доказательство. Проведем рассуждения для случая $t \geq 0$. (Случай $t < 0$ рассматривается аналогично.) Пусть $y(t)$ является решением уравнения (4.2) и, следовательно, решением интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 + \int\limits_0^t \big[L(\tau) + H(\tau)\big]y(\tau)d\tau + \int\limits_0^t f(\tau)d\tau. \tag{4.4}$$

Преобразуем интегральное уравнение (4.4). Так как $y(t) = y(t, y_0)$ – решение уравнения (4.2) с начальным условием $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$, то в результате интегрирования по частям имеем:

$$\int\limits_0^t H(\tau)y(\tau)d\tau = \int\limits_0^\infty H(\theta)d\theta \cdot y_0 - \int\limits_t^\infty H(\theta)d\theta \cdot y(t) +$$
$$+ \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^\infty H(\theta)d\theta \Big\} \{L(\tau)\} \, y(\tau)d\tau + \tag{4.5}$$
$$+ \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^\infty H(\theta)d\theta \Big\} f(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^\infty H(\theta)d\theta \Big\} H(\tau)y(\tau)d\tau.$$

Подставив полученное выражение (4.5) в (4.4) вместо слагаемого

$$\int\limits_0^t H(\theta)y(\theta)d\theta,$$

после преобразований получим уравнение (4.3). □

Теперь рассмотрим вопрос об ограниченности решений системы (0.1).

Теорема 4.2 *Пусть* $n \geq 1$, $p \in (1, +\infty)$, $r \in (1, +\infty]$; *коэффициенты системы (0.1) удовлетворяют условиям (У1), (У2) и:*

$$B_2(t) = \int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} H(\theta)d\theta \cdot H(t) \in L^1(\mathbb{R}^1). \tag{4.6}$$

Тогда для ограниченности каждого решения системы (0.1) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int\limits_0^t \Psi_2(\tau)f(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \Big\{ E + \int\limits_\tau^{sign\, \tau\cdot\infty} H(\theta)d\theta \Big\} f(\tau)d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^1) \qquad (4.7).$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (4.7). Обозначим

$$\psi_2(\tau) = \int\limits_\tau^{sign\, \tau\cdot\infty} H(\theta)d\theta.$$

В силу выполнения условий (У2) и (1.13) можно указать такое число $T_2 > 0$, что

$$\|\psi_2(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1\setminus[-T_2,T_2])} < \frac{1}{2}. \tag{4.8}$$

Далее для упрощения записи будем полагать, что $t \geq 0$. (Случай $t < 0$ рассматривается аналогично). На отрезке $[0, T_2]$ каждое решение системы (0.1) ограничено. Рассмотрим случай, когда $t \geq T_2$. Согласно теореме 4.1 в этом случае из ограниченности решений (4.3) будет следовать ограниченность решений (0.1).

Обозначим в (4.3) :

$$\mathcal{L}_0(\tau) = \Psi_2(\tau)L(\tau) + B_2(\tau),$$

$$Q_0(t) = \int\limits_0^t \Psi_2(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Тогда (4.3) можно переписать в виде:

$$\Psi_2(t)y(t) = \Psi_2(0)y_0 + Q_0(t) + \int\limits_0^t \mathcal{L}_0(\tau)y(\tau)d\tau. \tag{4.9}$$

Так как в силу (1.15) выполняется соотношение

$$\int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} H(\theta)d\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^1),$$

то с учетом (4.6) получаем, что $\mathcal{L}_0(\tau) \in L^1(\mathbb{R}^1)$.

Покажем, что при $t > T_2$ каждое решение уравнения (4.9) ограничено. Обозначим:

$$z(t) = \Psi_2(t)y(t), \quad Q_1(t) = \Psi_2(0)y_0 + Q_0(t),$$
$$\mathcal{L}_1(\tau) = \mathcal{L}_0(\tau)\{E + \psi_2(\tau)\}^{-1}.$$

Тогда уравнение (4.9) примет вид

$$z(t) = Q_1(t) + \int\limits_{T_m}^t \mathcal{L}_1(\tau)z(\tau)d\tau, \tag{4.10}$$

где вектор $Q_1(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$ и матрица $\mathcal{L}_1(t) \in L^1(\mathbb{R}^1)$. По лемме Гроноулла [26, с. 37] каждое решение уравнения (4.10) ограничено, а т. к. в силу (4.8) матрица

$$\Psi_2(t) = E + \psi_2(t) = E + \int\limits_t^\infty H(\theta)d\theta$$

неособая при $t > T_2$, то при $t > T_2$ ограничено на интервале $[T_2, +\infty)$ и каждое решение уравнения (0.1).

Необходимость. Пусть каждое решение уравнения (0.1) ограничено. Тогда в силу неособенности при больших значениях переменной t матрицы $\Psi_2(t)$ ограничен вектор $z(t)$. Но тогда т. к. в силу условия теоремы $\mathcal{L}_1(\tau) \in L^1(\mathbb{R}^1)$ то в (4.10) будет ограничена матрица $Q_1(t)$ и, следовательно, интеграл

$$Q_0(t) = \int\limits_0^t \Psi_2(\tau) f(\tau) d\tau,$$

т. е. выполнится условие (4.7). □

§5. Условие ограниченности решений системы (0.1).

Пусть $p \in (1, 2]$. В этом параграфе установлено (теорема 5.1), что в случае выполнения для системы (0.1) нерезонансного условия (определение 5.1) каждое решение системы ограничено. Если же выполнено резонансное условие (определение 5.2), то доказано (теорема 5.2), что всегда можно выбрать такие сколь угодно малые в смысле соответствующих норм возмущения коэффициентов системы, при которых резонансные множества не увеличатся, будет выполняться резонансное условие, но у возмущенной системы появятся неограниченные решения.

Для нахождения условий ограниченности решений системы (0.1) воспользуемся теоремой 4.2. Согласно теореме 4.1, если функция $y(t, y_0)$ является решением уравнения (0.1) с начальным условием $y(0, y_0) = y_0$, то она также удовлетворяет и интегральному уравнению:

$$\Psi_2(t)y(t) = \Psi_2(0) \cdot y_0 + \int\limits_0^t \Psi_2(\tau)L(\tau)y(\tau)d\tau + + \int\limits_0^t \Psi_2(\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t B_2(\tau)y(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^1, \tag{5.1}$$

где

$$\Psi_2(\tau) = E + \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} H(\theta)d\theta, \quad B_2(\tau) = \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} H(\theta)d\theta \cdot H(\tau).$$

Лемма 5.1 *Пусть $n \geq 1$, $p \in (1, 2]$ и $r \in (1, +\infty]$. Тогда для ограниченности каждого решения уравнения (0.1) необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int_0^t \Big\{ \int_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} H(\theta)d\theta \Big\} f(\tau)d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^1). \tag{5.2}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (5.1). Так как по условию леммы $p \in (1, 2]$, то согласно (1.17) получаем, что

$$\int_t^{sign\,t\cdot\infty} H(\theta)d\theta \in L^q(\mathbb{R}^1), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Кроме того, как следует из ограничений на коэффициенты системы (0.1), $H \in L^p(\mathbb{R}^1)$. Поэтому выполняется соотношение

$$\int_t^{sign\,t\cdot\infty} H(\theta)d\theta \cdot H(t) \in L^1(\mathbb{R}^1)$$

Но тогда по теореме 4.2 для ограниченности каждого решения уравнения (0.1) необходимо и достаточно, чтобы:

$$\int_0^t \Big\{ E + \int_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} H(\theta)d\theta \Big\} f(\tau)d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^1).$$

Так как согласно (У1) справедливо $\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$, то получаем, что для ограниченности каждого решения уравнения (0.1) необходимо и достаточно выполнение соотношения (5.2). □

Определение 5.1 *Будем говорить, что для системы (0.1) при $p \in (1, 2]$ выполнено нерезонансное условие, если для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ при каждом $j \in \{1, \dots, n\}$ хотя бы одно из двух множеств*

$$\mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\}, \quad \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} \tag{5.3}$$

пусто или, если они оба не пусты, то по крайней мере одно из них не содержит бесконечную точку и при этом выполняется нерезонансное соотношение

$$0 \notin \mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\} + \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}. \tag{5.4}$$

Резонансные множества $\mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\}$, $\mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ из правой части соотношения (5.4) замкнуты и по крайней мере одно из них не содержит бесконечной точки, поэтому, как уже отмечалось в замечании 3.1, в силу определения операции сложения, данного в §2, множество из правой части (5.4) замкнуто.

Теорема 5.1 *Пусть $n \geq 1$, $p \in (1, 2]$, $r \in (1, +\infty]$ и для системы (0.1) выполнено нерезонансное условие. Тогда каждое ее решение ограничено.*

Доказательство. Пусть выполнено нерезонансное условие. Согласно лемме 5.1 для ограниченности решений системы (0.1) достаточно, чтобы при всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ выполнялись неравенства

$$\Big\| \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta) d\theta \Big\} f_j(\tau) d\tau \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} < +\infty. \tag{5.5}$$

Предположим сначала, что есть пара чисел $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, для которых хотя бы одно из двух резонансных множеств (5.3) пусто. Рассмотрим сначала случай, когда

$$\mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing. \tag{5.6}$$

В силу теоремы 1.1 и замечания 1.0 это возможно тогда и только тогда, когда $h_{ij} \in L^{r'}(\mathbb{R}^1)$, $1/r + 1/r' = 1$.

Если $h_{ij} \in L^{r'}(\mathbb{R}^1)$ и $r = \infty$, то $r' = 1$, а так как согласно (У1) $h_{ij} \in L^p(\mathbb{R}^1)$, то из (5.6) получаем, что $h_{ij} \in L^p(\mathbb{R}^1) \cap L^1(\mathbb{R}^1)$. Таким образом, при выполнении (5.6) в результате интегрирования по частям имеем:

$$\Big\| \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta) d\theta \Big\} f_j(\tau) d\tau \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} \leq$$

$$\leq \Big\| \int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty} h_{ij}(\theta) d\theta \cdot \int\limits_0^t f_j(\theta) d\theta + \int\limits_0^t h_{ij}(\tau) \Big\{ \int\limits_0^\tau f_j(\theta) d\theta \Big\} d\tau \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} \leq$$

$$\leq 2\|h_{ij}\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} \| \int\limits_0^t f_j(\theta) d\theta \|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} < +\infty$$

Если же $h_{ij} \in L^{r'}(\mathbb{R}^1)$ и $r \in (1, +\infty)$, то $r' \in (1, +\infty)$ и согласно неравенству (1.15):

$$\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta \in L^{r'}(\mathbb{R}^1). \tag{5.7}$$

Используя неравенство Гельдера, получаем с учетом (5.7) выполнение (5.5):

$$\Big\| \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta \Big\} f_j(\tau)d\tau \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} \leq$$

$$\leq \Big\| \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta \Big\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^1)} \cdot \|f_j\|_{L^r(\mathbb{R}^1)} < +\infty.$$

Теперь предположим, что

$$\mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing. \tag{5.8}$$

В силу теоремы 1.1 для выполнения (5.8) необходимо и достаточно, чтобы $f_j \in L^q(\mathbb{R}^1),\ \ 1/p + 1/q = 1$. И так как

$$\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta \in L^p(\mathbb{R}^1),$$

то, используя неравенство Гельдера, получаем выполнение (5.8).

Таким образом, если хоть одно из множеств $\mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\}$, $\mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ пусто, то каждое решение системы (0.1) ограничено.

Теперь рассмотрим случай, когда существует непустое множество Q пар $(i, j),\ \ i, j \in \{1, \ldots, n\}$ таких, что если $(i, j) \in Q$, то среди множеств

$$\mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\}, \quad \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} \tag{5.9}$$

нет пустых, причем в каждой паре (5.9) по крайней мере одно не содержит бесконечную точку и выполняется нерезонансное соотношение (5.4):

$$0 \notin \mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\} + \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}.$$

Покажем, что и в этом случае выполняется (5.5) для любой пары $(i, j) \in Q$.

Так как выполняется (5.4), то ввиду замкнутости множества из правой части этого соотношения можно указать такое число $d > 0$, что

$$(\mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\} + \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}) \cap (-d, d) = \varnothing.$$

В силу теоремы 2.1 имеет место включение

$$\mathcal{R}\Big\{\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} \subseteq \mathcal{R}\{h_{ij,}L^r(\mathbb{R}^1)\}.$$

Поэтому

$$0 \notin \mathcal{R}\Big\{\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} + \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} \qquad (5.10)$$

и, следовательно, в силу замкнутости множества из правой части (5.10) и конечности Q число $d>0$ можно выбрать таким, что

$$\left(\mathcal{R}\Big\{\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} + \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}\right) \cap (-d,d) =$$

$$= \varnothing, \quad (i,j)\in Q.$$

Теперь для оценки интегралов

$$\int\limits_0^t \Big\{\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta\Big\} f_j(\tau)d\tau, \quad (i,j)\in Q$$

воспользуемся теоремой 3.2. Для этого в (3.1) и (3.2) положим: $p_1 = p, \quad p_2 = r, \quad \gamma_1 = h_{ij}, \quad \gamma_2 = f_j$, $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\}, \quad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}$, а числа δ и Δ выберем так, чтобы выполнялось (3.4) для всех интегралов, в которых индексы у подинтегральных функций образуют пары из Q. (Это возможно, т. к. Q конечное множество). Тогда согласно (3.11) и следствиям 1.2.1, 1.3.1:

$$\left|\int\limits_0^t \Big\{\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta\Big\} f_j(\tau)d\tau\right| \leqslant 4\left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}}\cdot\left(\frac{2}{d}\right)^{1/s'}+1\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{2}{d^{1/q}}+\frac{1}{d^{1/r}}\right\}\Big\{\|A(\tau,h_{ij},\mathcal{R}_1,d)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} + \|a(\tau,h_{ij},\mathcal{R}_1,d)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}+$$

$$+\|a(\tau,h_{ij},\mathcal{R}_1,d)\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^1)}\Big\}\Big\{\|A(\tau,f_j,\mathcal{R}_2,d)\|_{L^r(\mathbb{R}^1)}+$$

$$+\|a(\tau,f_j,\mathcal{R}_2,d)\|_{L^r(\mathbb{R}^1)} + \|a(\tau,f_j,\mathcal{R}_2,d)\|_{L^q(\mathbb{R}^1)}\Big\} < \infty,$$

где $1/s = 1/p + 1/r$, $1/s' = 1 - 1/s$ и $1/r' = 1 - 1/r$, $1/q = 1 - 1/p$. Следовательно, и в этом случае условия (5.8) выполняются для любой пары $(i, j) \in Q$. $\square$

Определение 5.2 *Будем говорить, что для системы (0.1) при $p \in (1, 2]$ выполнено условие резонанса, если существуют хотя бы одна пара чисел i, j, $1 \le i, j \le n$, такая,что каждое из множеств*

$$\mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}$$

не пусто и при этом: либо каждое из них содержит бесконечную точку, либо, если хотя бы одно из них ее не содержит, то выполняется резонансное соотношение

$$0 \in \mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\} + \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}.$$

Замечание 5.1 *Нетрудно видеть, что определение 5.2 равносильно невыполнению для системы (0.1) нерезонансного условия.*

Теорема 5.2 *Пусть $n \ge 1$, $p \in (1, 2]$, $r \in (1, +\infty]$ и для системы (0.1) выполнено резонансное условие. Тогда для любого $\sigma > 0$ можно указать такие возмущения $\Delta H(\theta) = \|\Delta h_{ij}(\theta)\|_1^n \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $\Delta f(\tau) = (\Delta f_1(\tau), \dots, \Delta f_n(\tau)) \in L^r(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющие условиям:*

$$\mathcal{R}\{\Delta h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\}, \quad \mathcal{R}\{h_{ij} + \Delta h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{h_{ij}, L^r(\mathbb{R}^1)\};$$

$$\mathcal{R}\{\Delta f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}, \quad \mathcal{R}\{f_j + \Delta f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\};$$

$$\|\Delta h_{ij}\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \le \sigma, \quad \|\Delta f_j\|_{L^r(\mathbb{R}^1)} \le \sigma;$$

$1 \le i, j \le n$, *при которых для возмущенной системы*

$$\{y(t) + \Delta y(t)\}' = \{L(t) + H(t) + \Delta H(t)\}\{y(t) + \Delta y(t)\} + f(t) + \Delta f(t) \quad (5.11)$$

будет выполняться нерезонансное условие и появятся неограниченные решения.

Доказательство. Построим удовлетворяющие теореме возмущения коэффициентов системы (0.1), которые в резонансном случае приводят к появлению неограниченных решений.

Выберем произвольное $\sigma > 0$ и дадим матрице $H(t)$ и вектору $f(t)$ какие-либо возмущения $\Delta H(t) = \|\Delta h_{ij}(t)\|_1^n$, $\Delta f(t) = (\Delta f_1(t), \dots, \Delta f_n(t))$ такие, что: $\Delta H(t)$ удовлетворяет условиям (У1) и (У2); $\Delta f(t)$ удовлетворяет условию (У1) и $\|\Delta h_{ij}\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \le \sigma,\ \ \|\Delta f_j\|_{L^r(\mathbb{R}^1)} \le \sigma,\quad 1 \le i,j \le n$. Тогда в силу леммы 5.1 для ограниченности решений возмущенной системы (5.11) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} [H(\theta)+\Delta H(\theta)]d\theta \Big\}[f(\tau)+\Delta f(\tau)]d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^1),$$

что равносильно выполнению n условий

$$\sum_{j=1}^n \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} [h_{ij}(\theta)+\Delta h_{ij}(\theta)]d\theta \Big\}[f_j(\tau)+\Delta f_j(\tau)]d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^1),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Если хотя бы при одном $i \in \{1, \ldots, n\}$ неограничено выражение

$$\sum_{j=1}^n \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta \Big\} f_j(\tau)d\tau, \tag{5.12$_i$}$$

то необходимо неограничен при этом i хотя бы один интеграл

$$\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta \Big\} f_j(\tau)d\tau. \tag{5.13}$$

Но тогда согласно замечанию 5.1 и теореме 5.1 для интеграла (5.13) выполнено условие резонанса (в противном случае интеграл был бы ограничен). Следовательно теорема выполняется при $\Delta H(t) \equiv 0$ и $\Delta f(t) \equiv 0$.

Теперь предположим, что при каждом $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выражение $(5.12)_i$ ограничено. Выберем пару чисел $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ таких, что для функций h_{ij} и f_j не выполнено нерезонансное условие (определение 3.1 из §3). Для упрощения записи будем полагать, что это имеет место при $i = 1$, $j = 1$. Т. е. будем предполагать, что $\mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \ne \varnothing$, $\mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} \ne \varnothing$ и при этом или

$$\infty \in \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \cap \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} \tag{5.14}$$

или, если хотя бы одно из резонансных множеств не содержит бесконечной точки, то

$$0 \in \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} + \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}. \tag{5.15}$$

Сначала рассмотрим первый случай – когда выполняется условие (5.14). Справедливы следующие три вспомогательных утверждения.

Предложение 5.2.1 *Пусть функция*

$$G_0(t) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{1j}(\theta)d\theta \Big\} f_j(\tau)d\tau.$$

ограничена, а функции $\varkappa_1 \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $\varkappa_2 \in L^r(\mathbb{R}^1)$ *таковы, что каждое из резонансных множеств* $\mathcal{R}\{\varkappa_1, L^r(\mathbb{R}^1)\}$, $\mathcal{R}\{\varkappa_2, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ *удовлетворяет соответствующему условию:*

$$\mathcal{R}\{\varkappa_1, L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\}, \quad \mathcal{R}\{\varkappa_2, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}.$$

Тогда, если неограничен интеграл

$$\int\limits_0^t \varkappa_1(\tau)\varkappa_2(\tau)d\tau, \tag{5.16}$$

то для любого $\sigma > 0$ *можно указать такие числа* $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, \sigma\}$, *что будет неограничена сумма*

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta + \sigma_1\varkappa_1(\tau) \Big\}[f_1(\tau) + \sigma_2\varkappa_2(\tau)]d\tau + \\ + \sum_{j=2}^{n} \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{1j}(\theta)d\theta \Big\} f_j(\tau)d\tau,\end{gathered} \tag{5.17}$$

и при этом будут выполняться включения:

$$\mathcal{R}\left\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta + \sigma_1\varkappa_1, L^r(\mathbb{R}^1) \right\} \subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\}, \tag{5.18}$$

$$\mathcal{R}\{f_1 + \sigma_2\varkappa_2, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}. \tag{5.19}$$

Доказательство. Пусть $\sigma > 0$ – произвольное число. Рассмотрим функцию

$$G_1(t) = \int\limits_0^t \varkappa_1(\tau)f_1(\tau)d\tau.$$

Если она неограничена, то полагаем $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 0$. Тогда будет неограничена функция

$$\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta + \sigma\,\varkappa_1(\tau)\Big\} f_1(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{j=2}^n \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{1j}(\theta)d\theta\Big\} f_j(\tau)d\tau = G_0(t) + \sigma\,G_1(t).$$

Если функция $G_1(t)$ ограничена, то рассмотрим функцию

$$G_2(t) = \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta\Big\} \varkappa_2(\tau)d\tau.$$

Если функция $G_2(t)$ неограничена, то полагаем $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma$. Тогда будет неограничена функция

$$\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta\Big\} [f_1(\tau) + \sigma\,\varkappa_2(\tau)]d\tau +$$

$$+\sum_{j=2}^n \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{1j}(\theta)d\theta\Big\} f_j(\tau)d\tau = G_0(t) + \sigma\,G_2(t).$$

Если функции $G_0(t)$, $G_1(t)$ и $G_2(t)$ ограничены, то рассмотрим функцию

$$\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta + \sigma\,\varkappa_1(\tau)\Big\} [f_1(\tau) + \sigma\,\varkappa_2(\tau)]d\tau +$$

$$+\sum_{j=2}^n \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{1j}(\theta)d\theta\Big\} f_j(\tau)d\tau =$$

$$= G_0(t) + \sigma\,G_1(t) + \sigma\,G_2(t) + \sigma^2 \int\limits_0^t \varkappa_1(\tau)\varkappa_2(\tau)d\tau.$$

А эта функция будет неограничена согласно (5.16).

Далее, в силу леммы 2.1, теоремы 2.1 и условия предложения 5.2.1 получаем выполнение (5.18):

$$\mathcal{R}\left\{\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta + \sigma_1\varkappa_1, L^r(\mathbb{R}^1)\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \mathcal{R}\left\{\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\right\} \cup \mathcal{R}\{\varkappa_1, L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq$$

$$\subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\varkappa_1, L^r(\mathbb{R}^1)\} = \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\},$$

аналогично устанавливается (5.19):

$$\mathcal{R}\{f_1(\tau) + \sigma_2\,\varkappa_2(\tau), L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\varkappa_2, L^p(\mathbb{R}^1)\} =$$

$$= \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}.\square$$

Предложение 5.2.2 *Пусть* $s \in [1, +\infty]$, $\varkappa(t) \in L^s(\mathbb{R}^1)$, $\delta_1 > 0$, $\widehat{\varkappa}(y)$ *дважды непрерывно дифференцируема на интервале* $(-4\delta_1, 4\delta_1)$ *и* $\Omega(t) = \Omega(t, [-2\delta_1, 2\delta_1], \delta_1)$. *Тогда:*

$$\eta(t) = \varkappa(t) * \Omega(t) = \frac{O(1)}{1+t^2}, \tag{5.20}$$

$$\int\limits_{t}^{sign\,t\cdot\infty} \eta(\tau)d\tau = \int\limits_{t}^{sign\,t\cdot\infty} [\varkappa(\tau) * \Omega(\tau)]d\tau = \frac{O(1)}{1+|t|}. \tag{5.21}$$

Доказательство. Так как $\widehat{\varkappa}(y)$ по условию дважды непрерывно дифференцируема на интервале $(-4\delta_1, 4\delta_1)$, то с учетом свойств (1.5)–(1.9) функции $\Omega(t)$ в результате двукратного интегрирования по частям получаем при $|t| \geq 1$:

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{iyt}\,\widehat{\varkappa}(y)\,\widehat{\Omega}(y)dy = \frac{O(1)}{t^2}, \tag{5.22}$$

поскольку $[\widehat{\varkappa}(y)\widehat{\Omega}(y)]'' \in L^1[-3\delta_1, 3\delta_1]$. Кроме того, $\eta(t)$ – непрерывная функция, как обратное преобразование Фурье суммируемой функции $\widehat{\eta}(y) = \widehat{\varkappa}(y)\widehat{\Omega}(y)$. Следовательно, с учетом (5.22) получаем справедливость утверждения (5.20). Равенство (5.21), очевидно, вытекает из (5.20). $\square$

Предложение 5.2.3 *Пусть* $p \in (1,2]$, $r \in (1,+\infty]$, $1/p + 1/r < 1$, *число* $\rho > 0$ *таково, что* $1/p + 1/r + 5\rho < 1$ *и*

$$\lambda_1(t) = \frac{e^{i(1+|t|)^{1+\rho}}}{(1+|t|)^{1/p+2\rho}}, \quad \lambda_2(t) = \frac{e^{-i(1+|t|)^{1+\rho}}}{(1+|t|)^{1/r+2\rho}}.$$

Тогда:

$$\begin{gathered} 1)\quad \int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty} \lambda_1(\theta)d\theta = sign\,t \cdot \frac{i}{1+\rho} \cdot \frac{e^{i(1+|t|)^{1+\rho}}}{(1+|t|)^{1/p+3\rho}} + \\ + \frac{O(1)}{(1+|t|)^{1+1/p+4\rho}}, \qquad \int\limits_0^t \lambda_2(\theta)d\theta = O(1); \end{gathered} \tag{5.23}$$

$$\begin{gathered} 2)\quad \mathcal{R}\Big\{ \int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty} \lambda_1(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} = \{\infty\}, \\ \mathcal{R}\{\lambda_2(t), L^p(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}; \end{gathered} \tag{5.24}$$

$$3)\quad \Big\| \int\limits_0^t \Big[\int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} \lambda_1(\theta)d\theta \Big] \lambda_2(\tau)d\tau \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = \infty. \tag{5.25}$$

Доказательство. Пусть $u \neq 0$ и $s \in (1,+\infty]$. Обозначим:

$$\lambda(t) = \frac{e^{iu(1+|t|)^{1+\rho}}}{(1+|t|)^{1/s+2\rho}}. \tag{5.26}$$

Тогда для любого $t \in \mathbb{R}^1$ определена функция

$$\int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty} \lambda(\tau)d\tau = sign\,t \cdot \frac{i}{u(1+\rho)} \cdot \frac{e^{i(1+|t|)^{1+\rho}}}{(1+|t|)^{1/s+3\rho}} + \frac{O(1)}{(1+|t|)^{1+1/s+4\rho}},$$

откуда при $u = +1$ и $s = p$ получаем первое утверждение из (5.23).

Полагая в (5.26) $u = -1$ и $s = r$, из равенства

$$\int\limits_0^t \lambda(\tau)d\tau = \int\limits_0^{sign\,t\cdot\infty} \lambda(\tau)d\tau - \int\limits_t^{sign\,t\cdot\infty} \lambda(\tau)d\tau$$

получаем справедливость второго утверждения в (5.23).

Для доказательства (5.24) найдем преобразование Фурье вспомогательной функции $\lambda(t)$. Имеем:

$$\widehat{\lambda}(y) = 2\int_0^\infty \cos y\tau \, \frac{e^{iu(1+\tau)^{1+\rho}}}{(1+\tau)^{1/s+2\rho}}\, d\tau.$$

Пусть число k удовлетворяет условию

$$\frac{1}{s} + 2\rho + k\rho > 2 + 1,$$

Произведем k–кратное интегрирование по частям интеграла, определяющего $\widehat{\lambda}(y)$, используя при этом всякий раз замену:

$$e^{iu(1+\tau)^{1+\rho}} d\tau = \frac{1}{iu(1+\rho)} \cdot \frac{de^{iu(1+\tau)^{1+\rho}}}{(1+\tau)^{\rho}}.$$

Тогда для $\widehat{\lambda}(y)$ получится выражение, в котором входящие в него интегралы, а также остальные слагаемые можно дважды дифференцировать по y при $u \neq 0$. Но тогда в силу леммы 2.2 каждая точка $y \neq \infty$ является нерезонансной для функции $\lambda(t)$ относительно любого пространства $L^{\nu}(\mathbb{R}^1)$, где $\nu \in (1, +\infty]$ и $1/s + 1/\nu + 2\rho < 1$. При этом $\mathcal{R}\{\lambda, L^{\nu}(\mathbb{R}^1)\} \neq \varnothing$, так как $\lambda \notin L^{\nu'}(\mathbb{R}^1)$, где $1/\nu + 1/\nu' = 1$, поскольку $\nu'\,(1/s + 2\rho) < 1$ или, что равносильно, $1/s + 1/\nu + 2\rho < 1$. Следовательно, $\mathcal{R}\{\lambda, L^{\nu}(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}$.

Далее, полагая в (5.26) $u = 1$, $s = p$ и $\nu = r$, получаем, что $\mathcal{R}\{\lambda_1, L^r(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}$, а при $u = -1$, $s = r$ и $\nu = p$ получаем $\mathcal{R}\{\lambda_2, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}$.

Теперь покажем, что выполняется первое равенство в (5.24):

$$\mathcal{R}\Big\{ \int_t^{sign\, t\cdot\infty} \lambda_1(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} = \{\infty\}.$$

В силу (5.23) и леммы 2.1 имеем:

$$\mathcal{R}\Big\{ \int_t^{sign\, t\cdot\infty} \lambda_1(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} =$$

$$= \mathcal{R}\Big\{ sign\, t \cdot \frac{i}{1+\rho} \cdot \frac{e^{i(1+|t|)^{1+\rho}}}{(1+|t|)^{1/p+3\rho}} + \frac{O(1)}{(1+|t|)^{1+1/p+4\rho}}, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} \subseteq$$

$$\subseteq \mathcal{R}\Big\{sign\, t\cdot\frac{i}{1+\rho}\cdot\frac{e^{i(1+|t|)^{1+\rho}}}{(1+|t|)^{1/p+3\rho}}, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\}\cup\{\varnothing\}=$$

$$=\mathcal{R}\Big\{sign\, t\cdot\frac{i}{1+\rho}\cdot\frac{e^{i(1+|t|)^{1+\rho}}}{(1+|t|)^{1/p+3\rho}}, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\}=$$

$$=\mathcal{R}\Big\{sign\, t\cdot\frac{e^{i(1+|t|)^{1+\rho}}}{(1+|t|)^{1/p+3\rho}}, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\},$$

поскольку $\frac{O(1)}{(1+|t|)^{1+1/p+4\rho}}\in L^{r'}(\mathbb{R}^1)$ при любом $r'\in(1,\infty]$. Обозначим для краткости

$$\lambda_3(t)=\frac{e^{i(1+|t|)^{1+\rho}}}{(1+|t|)^{1/p+3\rho}}.$$

Чтобы определить $\mathcal{R}\Big\{sign\, t\cdot\lambda_3(t), L^r(\mathbb{R}^1)\Big\}$, найдем преобразование Фурье функции $sign\, t\cdot\lambda_3(t)$. Имеем:

$$\{sign\, t\cdot\lambda_3(t)\}\widehat{\ }(y)=2\int\limits_0^\infty \sin y\tau\,\frac{e^{i(1+\tau)^{1+\rho}}}{(1+\tau)^{1/s+3\rho}}\,d\tau.$$

Далее, рассуждая практически так же как и при нахождении резонансного множества функции $\lambda(t)$, получаем, что $\mathcal{R}\{sign\, t\cdot\lambda_3(t), L^r(\mathbb{R}^1)\}=\{\infty\}$. Следовательно, первое равенство в (5.24) также выполняется.

Справедливость утверждения (5.25) следует из определения $\lambda_2(t)$, равенства (5.23) и условия $1/p+1/r+5\rho<1$. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 5.2 в части рассмотрения случая (5.14). Обозначим

$$\varkappa_1(\tau)=\int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty}[\lambda_1(\theta)-\lambda_1(\theta)*\Omega(\theta)]d\theta,$$

$$\varkappa_2(\tau)=\lambda_2(\theta)=\frac{e^{-i(1+|\tau|)^{1+\rho}}}{(1+|\tau|)^{1/r+2\rho}},$$

где $\Omega(\theta)=\Omega(\theta,[-3\,\varepsilon,3\,\varepsilon],\varepsilon)$, а число $\varepsilon>0$ из условия (У2). Тогда, в силу предложений 5.2.2 и 5.2.3 получаем, что

$$\varkappa_1(\tau)=\frac{i}{1+\rho}\cdot\frac{e^{i(1+|\tau|)^{1+\rho}}}{(1+|\tau|)^{1/p+3\rho}}+\frac{O(1)}{1+|\tau|},$$

откуда имеем:

$$\Big\| \int\limits_0^t \varkappa_1(\tau)\varkappa_2(\tau)d\tau \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = +\infty.$$

Следовательно, согласно предложению 5.2.1 по любому заданному $\sigma > 0$ всегда можно указать такие числа $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, \sigma\}$, , что будет неограничена сумма (5.17):

$$\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta + \sigma_1\varkappa_1(\tau)\Big\}[f_1(\tau) + \sigma_2\varkappa_2(\tau)]d\tau +$$

$$+\sum_{j=2}^n \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{1j}(\theta)d\theta\Big\} f_j(\tau)d\tau$$

и при этом в силу леммы 2.1, (5.23) и (5.24) будут выполняться включения:

$$\mathcal{R}\{h_{11} + \sigma_1[\lambda_1 - \lambda_1 * \Omega], L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\lambda_1-$$
$$-\lambda_1 * \Omega, L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \cup \{\infty\} = \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\},$$
$$\mathcal{R}\{f_1 + \sigma_2\varkappa_2, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\varkappa_2, L^p(\mathbb{R}^1)\} =$$
$$= \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} \cup \{\infty\} = \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}.$$

Обозначим:

1) $\Delta H(t) = \|\Delta h_{ij}(t)\|_1^n$, где $\Delta h_{11}(t) = \sigma_1[\lambda_1(t) - \lambda_1(t) * \Omega(t)]/\|\lambda_1(t) - \lambda_1(t) * \Omega(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}$ и $\Delta h_{ij}(t) \equiv 0$, если $(i,j) \neq (1,1)$;

2) $\Delta f(t) = (\Delta f_1(t), \dots, \Delta f_n(t))$, где $\Delta f_1(t) = \sigma_2\lambda_2(t)/\|\lambda_2(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^1)}$ и $\Delta f_j(t) \equiv 0$, если $j = 2, 3, \dots, n$.

Тогда:

1) т.к. $\mathcal{R}\{\Delta h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$, если $\sigma_1 = 0$ и $\mathcal{R}\{\Delta h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}$, если $\sigma_1 \neq 0$, а также $\Delta h_{i,j} \equiv 0$, если $(i,j) \neq (1,1)$, то $\mathcal{R}\{\Delta h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\}$ и в силу леммы 2.1:

$$\mathcal{R}\{h_{11} + \Delta h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\Delta h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} =$$
$$= \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\}, \quad 1 \leq i, j \leq n;$$

2) т.к. $\mathcal{R}\{\Delta f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$, если $\sigma_2 = 0$ и $\mathcal{R}\{\Delta f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \{\infty\}$, если $\sigma_2 \neq 0$, а также $\Delta f_j \equiv 0$, если $2 \leq j \leq n$, то $\mathcal{R}\{\Delta f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ и в силу леммы 2.1:

$$\mathcal{R}\{f_j + \Delta f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\Delta f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} =$$

$$= \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}, \quad 1 \le j \le n;$$

3) выполняются неравенства :

$$\|\Delta h_{ij}\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \le \sigma, \quad \|\Delta f_j\|_{L^r(\mathbb{R}^1)} \le \sigma, \quad 1 \le j \le n.$$

Далее, в силу (1.2) и свойств (1.5)–(1.9) функции $\Omega(t)$ получаем, что $\lambda_1(t) - \lambda_1(t) * \Omega(t) \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $\varkappa_2(t) \in L^r(\mathbb{R}^1)$ и преобразование Фурье функции $\{\lambda_1(t) - \lambda_1(t) * \Omega(t)\}\hat{}\,(y)$ тождественно равно нулю в ε–окрестности нуля. Кроме того, в силу второго утверждения из (5.23) ограничен интеграл:

$$\int\limits_0^t \varkappa_2(\tau)d\tau.$$

Поэтому возмущения $\Delta H(t)$ и $\Delta f(t)$ удовлетворяют условиям (У1) и (У2).

Рассмотрим возмущенную систему (5.11):

$$\{y(t) + \Delta y(t)\}' = \{L(t) + H(t) + \Delta H(t)\}\{y(t) + \Delta y(t)\} + f(t) + \Delta f(t).$$

В силу выше сказанного ее коэффициенты удовлетворяют условиям (У1) и (У2), и поэтому согласно лемме 5.1 необходимое и достаточное условие ограниченности решений этой системы состоит в ограниченности каждой из сумм:

$$\sum_{j=1}^n \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} [h_{ij}(\theta) + \Delta h_{ij}(\theta)]d\theta \Big\} [f_j(\tau) + \Delta f_j(\tau)]d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

А эти суммы в соответствии с введенными обозначениями имеют вид:

$$\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta + \sigma_1\varkappa_1(\tau) \Big\} [f_1(\tau) + \sigma_2\varkappa_2(\tau)]d\tau +$$

$$+ \sum_{j=2}^n \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{1j}(\theta)d\theta \Big\} f_j(\tau)d\tau,$$

$$\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{i1}(\theta)d\theta \Big\} [f_1(\tau) + \sigma_2\varkappa_2(\tau)]d\tau +$$

$$+ \sum_{j=2}^n \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta \Big\} f_j(\tau)d\tau, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Но первая из этих сумм неограничена. Т. е. система (0.1) обладает неограниченными решениями и при этом для возмущенной системы выполняется резонансное условие.

Теперь рассмотрим второй случай, когда резонансные множества

$$\mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\}, \quad \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}$$

не пусты, не более чем одно их них содержит бесконечную точку и для них выполнено резонансное соотношение (5.4):

$$0 \in \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} + \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}. \tag{5.27}$$

Так как согласно теореме 2.2 резонансное множество вещественнозначной функции симметрично, то из (5.27) следует, что существуют точки $-u, +u \in \mathbb{R}^1$, $u \neq 0$ такие, что

$$\{-u\} \cup \{u\} \subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \cap \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}.$$

Рассмотрим одно вспомогательное утверждение.

Предложение 5.2.4 *Пусть числа* $p \in (1, 2]$, $r \in (1, +\infty]$ *и* $\rho > 0$ *таковы, что* $1/p + 1/r + 2\rho < 1$; $u \neq 0$ *и*

$$\mu_1(t) = \frac{e^{iut}}{(1+|t|)^{1/p+\rho}}, \quad \mu_2(t) = \frac{e^{-iut}}{(1+|t|)^{1/r+\rho}}.$$

Тогда:

$$\text{1)} \quad \int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} \mu_1(\theta)d\theta = \frac{i}{u}\cdot\frac{e^{iut}}{(1+|t|)^{1/p+\rho}} + \frac{O(1)}{(1+|t|)^{1+1/p+\rho}}, \qquad \int\limits_0^t \mu_2(\theta)d\theta = O(1); \tag{5.28}$$

$$\text{2)} \quad \mathcal{R}\Big\{\int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} \mu_1(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} = \{u\}, \qquad \mathcal{R}\{\mu_2(t), L^p(\mathbb{R}^1)\} = \{-u\}; \tag{5.29}$$

$$\text{3)} \quad \lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t \Big\{\int\limits_\tau^{sign\,\tau\cdot\infty} \mu_1(\theta)d\theta\Big\}\mu_2(\tau)d\tau = \infty. \tag{5.30}$$

Доказательство. Пусть $u, v \neq 0$, $\rho > 0$ и $s \in (1, +\infty]$. Обозначим

$$\mu(t) = \frac{e^{iuvt}}{(1+|t|)^{1/s+\rho}}.$$

Тогда для любого $t \in \mathbb{R}^1$ имеем:

$$\int\limits_{t}^{sign\, t\cdot\infty} \mu(\tau)d\tau = \frac{i}{uv} \cdot \frac{e^{iuvt}}{(1+|t|)^{1/s+\rho}} + \frac{O(1)}{(1+|t|)^{1+1/s+\rho}}, \qquad (5.31)$$

откуда полагая $v = 1$ и $s = p$, получаем первое утверждение из (5.28) Полагая в (5.31) $v = -1$ и $s = r$, из равенства

$$\int\limits_0^t \mu(\tau)d\tau = \int\limits_0^{sign\, t\cdot\infty} \mu(\tau)d\tau - \int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} \mu(\tau)d\tau$$

получаем справедливость второго утверждения в (5.28).

Как следует из работы автора [17 с. 76] для любого $\nu \in (1, +\infty]$ и $\rho > 0$ таких, что

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{\nu} + 2\rho < 1$$

выполняется соотношение: $\mathcal{R}\{\mu, L^\nu(\mathbb{R}^1)\} = \{uv\}$. Поэтому, полагая $s = p$, $\nu = r$, $v = 1$ получаем, что: $\mathcal{R}\{\mu_1, L^r(\mathbb{R}^1)\} = \{u\}$, а при $s = r$, $\nu = p$ и $v = -1$ выполняется второе равенство в (5.29): $\mathcal{R}\{\mu_2, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \{-u\}$.

Покажем, что $\mathcal{R}\Big\{ \int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} \mu_1(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} = \{u\}$. В силу (5.28), леммы 2.1 и теоремы 1.1:

$$\mathcal{R}\Big\{ \int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} \mu_1(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} = \mathcal{R}\Big\{ sign\, t \cdot \frac{i}{u} \cdot \frac{e^{iut}}{(1+|t|)^{1/p+\rho}} +$$

$$+\frac{O(1)}{(1+|t|)^{1+1/p+\rho}}, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} \subseteq \mathcal{R}\Big\{ sign\, t \cdot \frac{i}{u} \cdot \frac{e^{iut}}{(1+|t|)^{1/p+\rho}}, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} \cup$$

$$\cup \mathcal{R}\Big\{\frac{O(1)}{(1+|t|)^{1+1/p+\rho}}, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} = \mathcal{R}\Big\{ sign\, t \cdot \frac{e^{iut}}{(1+|t|)^{1/p+\rho}}, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} \cup \varnothing =$$

$$= \mathcal{R}\Big\{ sign\, t \cdot \mu_1(t), L^r(\mathbb{R}^1)\Big\},$$

поскольку $\frac{O(1)}{(1+|t|)^{1+1/p+4\rho}} \in L^{r'}(\mathbb{R}^1)$ при любом $r' \in [1,\infty]$. Чтобы определить $\mathcal{R}\{sign\, t\cdot\mu_1(t), L^r(\mathbb{R}^1)\}$ найдем преобразование Фурье функции $sign\, t\cdot\mu_1(t)$. Имеем:

$$\{sign\, t\cdot\mu_1(t)\}\widehat{\ }(y) = 2i\int\limits_0^\infty \sin(y-u)\tau\,\frac{1}{(1+\tau)^{1/p+\rho}}\,d\tau.$$

В результате двукратного интегрирования по частям получаем:

$$\{sign\, t\cdot\mu_1(t)\}\widehat{\ }(y) = \frac{K_1}{y-u} + \frac{K_2}{(y-u)^3} +$$

$$+\frac{K_3}{(y-u)^3}\cdot\int\limits_0^\infty \cos(y-u)\tau\,\frac{1}{(1+\tau)^{3+1/p+\rho}}\,d\tau,$$

где K_1, K_2, K_3 некоторые константы. Тогда для каждой точки $y \neq u$, $y \in \widetilde{\mathbb{R}}^1$ можно указать такую окрестность, в которой функция $\{sign\, t\cdot\mu_1(t)\}\widehat{\ }(y)$, а также ее первая и вторая производные абсолютно интегрируемы. Следовательно, по лемме 2.2 $\mathcal{R}\{sign\, t\cdot\mu_1(t), L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \{u\}$. Таким образом, получаем

$$\mathcal{R}\Big\{\int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} \mu_1(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} \subseteq \{u\}.$$

Но $\mathcal{R}\Big\{\int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} \mu_1(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} \neq \varnothing$, т. к. в силу неравенства $1/p+1/r+2\rho < 1$, как видно из (5.28), выполняется соотношение $\int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} \mu_1(\theta)d\theta \notin L^{r'}(\mathbb{R}^1)$. Следовательно, $\mathcal{R}\Big\{\int\limits_t^{sign\, t\cdot\infty} \mu_1(\theta)d\theta, L^r(\mathbb{R}^1)\Big\} = \{u\}$.

Утверждение (5.30), очевидно следует из (5.28) и определения функции μ_2. $\square$

Продолжим доказательство теоремы в части рассмотрения случая (5.15). Обозначим

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \cap \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}.$$

$\mathcal{R}$ симметричное множество, т. к. по теореме 2.2 в силу вещественности функций h_{11} и f_1 симметричны множества $\mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\}$ и $\mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}$. Кроме того, $(-\varepsilon,\varepsilon) \cap \mathcal{R} = \varnothing$, поскольку $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\}$, а согласно (У2)

$\widehat{h}_{11}(y) \equiv 0$ в ε–окрестности нуля. Следовательно, т. к. $\{u\}\bigcup\{-u\} \subseteq \mathcal{R}$ то $|u| > \varepsilon$. Положим $\Omega_2(t) = \Omega\left(t, [-\varepsilon/2, \varepsilon/2], \varepsilon/4\right)$. Тогда, рассуждая как и при выводе (5.20) в силу свойств (1.5)–(1.9) функции Ω получаем, что

$$\frac{iu\tau}{(1+|\tau|)^{1/p+\rho}} * \Omega_2(\tau) = \frac{O(1)}{1+\tau^2}.$$

Обозначим

$$\varkappa_1(\tau) = \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} [\mu_1(\theta) - \mu_1(\theta) * \Omega_2(\theta)]d\theta,$$
$$\varkappa_2(\tau) = \mu_2(\tau).$$

Тогда в силу (5.28) и предложения 5.2.2 получаем, что

$$\varkappa_1(\tau) = \frac{i}{u}\cdot\frac{e^{iut}}{(1+|t|)^{1/p+\rho}} + \frac{O(1)}{1+|t|},$$

откуда имеем:

$$\Big\|\int\limits_0^t \varkappa_1(\tau)\varkappa_2(\tau)d\tau\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = +\infty.$$

Следовательно, согласно предложению 5.2.1 по любому заданному $\sigma > 0$ всегда можно указать такие числа $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, \sigma\}$, , что будет неограничена сумма (5.17):

$$\int\limits_0^t \Big\{\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta + \sigma_1\varkappa_1(\tau)\Big\}[f_1(\tau) + \sigma_2\varkappa_2(\tau)]d\tau +$$
$$+\sum_{j=2}^{n}\int\limits_0^t \Big\{\int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{1j}(\theta)d\theta\Big\} f_j(\tau)d\tau$$

и при этом согласно лемме 2.1 будут выполняться включения:

$$\mathcal{R}\{h_{11} + \sigma_1[\mu_1 - \mu_1 * \Omega_2], L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq$$
$$\subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\mu_1 - \mu_1 * \Omega_2, L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq$$
$$\subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \cup \{u\} = \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\},$$

Дальнейшие рассуждения практически дословно повторяют первую часть доказательства теоремы. Обозначим:

1) $\Delta H(t) = \|\Delta h_{ij}(t)\|_1^n$, где $\Delta h_{11}(t) = \sigma_1[\mu_1(t) - \mu_1(t) * \Omega_2(t)]/\|\mu_1(t) - \mu_1(t) * \Omega_2(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}$ и $\Delta h_{ij}(t) \equiv 0$, если $(i,j) \neq (1,1)$;

2) $\Delta f(t) = (\Delta f_1(t), \ldots, \Delta f_n(t))$, где $\Delta f_1(t) = \sigma_2\mu_2(t)/\|\mu_2(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^1)}$ и $\Delta f_j(t) \equiv 0$, если $j = 2, 3, \ldots, n$.

Тогда:

1) т.к. $\mathcal{R}\{\Delta h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$, если $\sigma_1 = 0$ и $\mathcal{R}\{\Delta h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} = \{u\}$, если $\sigma_1 \neq 0$ а также $\Delta h_{i,j} \equiv 0$, если $(i,j) \neq (1,1)$, то $\mathcal{R}\{\Delta h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\}$ и в силу леммы 2.1:

$$\begin{gathered}\mathcal{R}\{h_{11} + \Delta h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\Delta h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\} = \\ = \mathcal{R}\{h_{11}, L^r(\mathbb{R}^1)\}, \quad 1 \leq i,j \leq n;\end{gathered}$$

2) $\mathcal{R}\{\Delta f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \varnothing$, если $\sigma_1 = 0$ и $\mathcal{R}\{\Delta f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \{-u\}$, если $\sigma_1 \neq 0$, а также $\Delta f_j = 0$, если $2 \leq j \leq n$, то $\mathcal{R}\{\Delta f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{f_1, L^p(\mathbb{R}^1)\}$ и в силу леммы 2.1:

$$\begin{gathered}\mathcal{R}\{f_j + \Delta f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} \subseteq \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} \cup \mathcal{R}\{\Delta f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\} = \\ = \mathcal{R}\{f_j, L^p(\mathbb{R}^1)\}, \quad 1 \leq j \leq n;\end{gathered}$$

3) выполняются неравенства :

$$\|\Delta h_{ij}(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leq \sigma, \quad \|\Delta f_j(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^1)} \leq \sigma, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Далее, в силу (1.2) и свойств (1.5)–(1.9) функции $\Omega(t)$ получаем, что $\mu_1(t) - \mu_1(t) * \Omega_2(t) \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $\varkappa_2(t) \in L^r(\mathbb{R}^1)$ и $\{\mu_1(t) - \mu_1(t) * \Omega_2(t)\}\hat{}\,(y) \equiv 0$ в ε-окрестности нуля. Кроме того, в силу (5.28) ограничен интеграл:

$$\int\limits_0^t \varkappa_2(\tau)d\tau.$$

Поэтому возмущения $\Delta H(t)$ и $\Delta f(t)$ удовлетворяют условиям (У1) и (У2).

Рассмотрим возмущенную систему (5.11):

$$\{y(t) + \Delta y(t)\}' = \{L(t) + H(t) + \Delta H(t)\}\{y(t) + \Delta y(t)\} + f(t) + \Delta f(t).$$

В силу выше сказанного ее коэффициенты удовлетворяют условиям У1)$'$ и У2)$'$ аналогичным (У1) и (У2) соответственно:

У1)$'$ $l_{ij} \in L^1(\mathbb{R}^1)$, $h_{ij} + \Delta h_{ij} \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $f_j + \Delta f_j \in L^r(\mathbb{R}^1)$, $\int\limits_0^t [f_j + \Delta f_j](\tau)d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$, $1 \le i, j \le n$;

У2)$'$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что преобразование Фурье каждой из функций $h_{ij} + \Delta h_{ij}$, $1 \le i, j \le n$ равно нулю в $\varepsilon/4$–окрестности нуля.

Тогда, рассуждая как и выше, получаем, что для ограниченности решений системы (5. 11) необходимо и достаточно ограниченности каждой из сумм:

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} [h_{ij}(\theta) + \Delta h_{ij}(\theta)]d\theta \Big\}[f_j(\tau) + \Delta f_j(\tau)]d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В соответствии с введенными выше обозначениями эти суммы $(5.12)_i$ имеют вид:

$$\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{11}(\theta)d\theta + \sigma_1\varkappa_1(\tau) \Big\}[f_1(\tau) + \sigma_2\varkappa_2(\tau)]d\tau +$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{1j}(\theta)d\theta \Big\} f_j(\tau)d\tau,$$

$$\int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta \Big\}[f_1(\tau) + \sigma_2\varkappa_2(\tau)]d\tau +$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} \int\limits_0^t \Big\{ \int\limits_{\tau}^{sign\,\tau\cdot\infty} h_{ij}(\theta)d\theta \Big\} f_j(\tau)d\tau, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Но первое из этих выражений неограничено. Поэтому, как и в предыдущем случае, получаем, что возмущенная система обладает неограниченными решениями и при этом для нее выполняется резонансное условие. □

Благодарность. Автор выражает глубокую признательность д.ф.м.н. проф. Широкову Н. А. за полезные советы и ценные замечания, сделанные им при обсуждении данной работы.

Список литературы

[1] *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.

[2] *Coppel W. A.* Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations. Heath, Boston, Mass., 1965.

[3] *Conti R.* On the boundedness of solutions of ordinary differential equations. *Funkcialaj Ekvacioj* 1966. Vol. 9 № 1. P. 23–26

[4] *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.

[5] *Королев В. В.* Об ограниченности решений линейной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.// Дифференц. уравнения. 1966. Т.2, № 5 С. 609–613.

[6] *Wallgren T.* Oscillations of solutions of the differential equation $y'' + p(y) = f(x)$. *SIAM J. Math. Anal.* 1976. Vol. 7, № 6. P. 848-857.

[7] *Плисс В. А.* Равномерно ограниченные решения линейных систем дифференциальных уравнений.// Дифференц. уравнения. 1977. Т.13, № 5 С. 883–891.

[8] *Плисс В. А.* Множества линейных систем с равномерно ограниченными решениями. // Дифференц. уравнения. 1980. Т.16, № 9. С. 1599–1616.

[9] *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений.// Дифференц. уравнения. 1985. Т.21, № 5. С.776-788.

[10] *Кулик В. Л.* Ограниченные решения систем линейных систем дифференциальных уравнений. // Укр. мат. журн. 1987. Т.39, № 6. С. 729–732.

[11] *Миллионщиков В. М.* Усиление теоремы о стабильной ограниченности решений. // Дифференц. уравнения. 1993. Т.29, № 11. С. 2011.

[12] *Баскаков А. Г.* Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения. 2003. Т.39, № 12. С. 413–415.

[13] *Изобов Н. А., Прохорова Р. А.* Линейные дифференциальные системы Коппеля–Конти. Мн.: Белорус. наука, 2008. 230 с.

[14] *Бортницкая Л. И., Прохорова Р. А.* Линейные системы с L^p - дихотомией на оси. // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: материалы международной математической конференции (7–10 декабря 2015.), Минск, Белоруссия: Издательство Минск Ин-т математики НАН Беларуси 2015, с. 18–19, т.3.

[15] *Иванов Б. Ф.* Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. I //Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2017 Т.4(62), № 3 с. 436–447.

[16] *Иванов Б. Ф.* Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. II //Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2017 Т.4(62), № 4 с. 586–596.

[17] *Иванов Б. Ф.* Об одном дополнении к неравенству Гёльдера. Случай резонанса. I // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2018 Т.5(63) № 1, с. 60–69.

[18] *Иванов Б. Ф.* Об одном дополнении к неравенству Гёльдера.Случай резонанса. II // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2018 Т.5(63) № 2, с. 233–243.

[19] Функциональный анализ. Серия: "Справочная математическая библиотека"/ Под ред. С.Г.Креина; М.: Наука, 1972. 544 с.

[20] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции и действия над ними, вып. 1. М.: Физматлит; 1959.

[21] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука; 1971.

[22] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: ГИТТЛ; 1948.

[23] *Ivanov B. F.* Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(R^n)$. I. *Проблемы анализа, 2014, т. 3 (21), № 2, с. 32–51.*

[24] *Ivanov B. F.* Analog of an inequality of Bohr for integrals of functions from $L^p(R^n)$. I. *Проблемы анализа, 2014, т. 3 (21), № 1, с. 16–34.*

[25] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

[26] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: Пер. с англ. И. Х. Сабитова и Ю. В. Егорова. / Под ред. В. М. Алексеева. М.: Мир 1970.