

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 1, 1998

Электронный журнал,
рег. № П23275 от 07.03.97

<http://www.wplus.net/pp/diffur>

e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.М.Иванов

Россия, 195220, Санкт-Петербург, Гражданский пр., д. 28,
С.-Петербургский государственный технический университет,
кафедра Информатики,
e-mail: ivm@mail.imop.csa.ru

О.Ю.Кульчицкий

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29,
С.-Петербургский государственный технический университет,
кафедра Механики и процессов управления,
e-mail: KULO@mcsd.hop.stu.neva.ru

М.Л.Корневский

Россия, 195220, Санкт-Петербург, Гражданский пр., д. 28,
С.-Петербургский государственный технический университет,
кафедра Информатики

Аннотация.

Предложен метод численного решения регулярных интегральных уравнений Фредгольма II рода, основанный на разложении решения по ортогональной системе функций с учетом невязки разложения, оценивание которой производится с использованием метода Монте-Карло. Проведено исследование сходимости метода, получены оценки скорости сходимости. Пред-

ложены способы адаптации вычислительной процедуры и способ практического повышения точности метода. Описаны результаты численного моделирования.

1. Введение

Численное решение интегральных уравнений — весьма важная и обширная часть современной вычислительной математики. Известные в настоящий момент методы решения регулярных интегральных уравнений можно условно разделить на детерминированные и статистические. Как детерминированные, так и статистические методы обладают рядом достоинств, позволяющих использовать их для решения определенных классов задач. Необходимость расширения класса эффективно решаемых задач и попытка объединения достоинств детерминированных и статистических методов привели к созданию авторами полустатистического метода решения интегральных уравнений [1, 2]. Настоящая работа является продолжением исследований авторов в указанном направлении и представляет новый метод (проекционно-статистический) численного решения интегральных уравнений, сочетающий в себе традиционную идею проекционного метода с идеями метода Монте-Карло и являющийся естественным обобщением полустатистического метода.

2. Основные соотношения метода

Рассмотрим задачу решения линейного интегрального уравнения Фредгольма II рода:

$$\varphi(x) - \lambda \int_D K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in D, \quad (1)$$

где D — ограниченное замкнутое подмножество евклидова пространства \mathbf{R}_S , $f \in L_2(D)$, $K \in L_2(D \times D)$. В дальнейшем будут использоваться также операторные обозначения

$$H\varphi = \varphi - \lambda K\varphi; \quad (K\varphi)(x) = \int_D K(x, y)\varphi(y)dy.$$

Предположим, что известно некоторое количество J ортонормированных в $L_2(D)$ функций $\varphi_i(x)$. Попытаемся в этом случае разыскивать решение уравнения (1) в следующем виде

$$\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \dots + \alpha_J\varphi_J(x) + \Delta\varphi(x) = \sum_{j=1}^J \alpha_j\varphi_j(x) + \Delta\varphi(x), \quad (2)$$

где $\alpha_j \in \mathbf{R}$ — неизвестные коэффициенты разложения $\varphi(x)$ в ряд по ортогональным функциям $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1, J}$, $\Delta\varphi(x)$ — погрешность этого разложения, причем

$$\int_D \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = \overline{1, J}, \quad (3)$$

$$\int_D \varphi_i(x)\Delta\varphi(x)dx = 0, \quad i = \overline{1, J}. \quad (4)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \int_D \varphi_i(x)K(x, y)dx &= L_i(y), & \int_D K(x, y)\varphi_j(y)dy &= R_j(x), \\ \int_D \varphi_i(x)K(x, y)\varphi_j(y)dy &= D_{ij}, & \int_D \varphi_i(x)f(x)dx &= F_i. \end{aligned}$$

В этих обозначениях и с учетом (2) уравнение (1) примет вид:

$$\sum_{j=1}^J \alpha_j\varphi_j(x) + \Delta\varphi(x) - \lambda \sum_{j=1}^J \alpha_j R_j(x) - \lambda \int_D K(x, y)\Delta\varphi(y)dy = f(x). \quad (5)$$

Умножая это равенство на $\varphi_i(x)$ и интегрируя по D , с учетом (3) и (4) получим:

$$\alpha_i - \lambda \sum_{j=1}^J \alpha_j D_{ij} - \lambda \int_D L_i(y)\Delta\varphi(y)dy = F_i, \quad i = \overline{1, J}. \quad (6)$$

Если бы $\Delta\varphi(x)$ было известно, то (6) представляло бы собой систему линейных алгебраических уравнений относительно α_i . В то же время, равенство (5) при известных α_i есть интегральное уравнение относительно $\Delta\varphi(x)$.

Предположим, что имеется совокупность реализаций x_1, x_2, \dots, x_N статистически независимых случайных величин, распределенных в D с плотностью $p(x)$, такой что $p(x) > 0$ при $x \in D$ и

$$\int_D p(x) dx = 1.$$

Тогда интегралы, входящие в (5) и (6) можно аппроксимировать формулой метода Монте-Карло, в его простейшем варианте [3]. Формула (5) в этом случае примет вид:

$$\sum_{j=1}^J \alpha_j \varphi_j(x) + \Delta\varphi(x) - \lambda \sum_{j=1}^J \alpha_j R_j(x) - \frac{\lambda}{N} \sum_{l=1}^N \frac{K(x, x_l) \Delta\varphi(x_l)}{p(x_l)} - \lambda\rho(x) = f(x), \quad (7)$$

а в точках $x = x_i, i = \overline{1, N}$:

$$\sum_{j=1}^J \alpha_j \varphi_j(x_i) + \Delta\varphi(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^J \alpha_j R_j(x_i) - \frac{\lambda}{N-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N \frac{K(x_i, x_l) \Delta\varphi(x_l)}{p(x_l)} - \lambda\rho_i(x_i) = f(x_i). \quad (8)$$

При этом формула (6) запишется в виде:

$$\alpha_i - \lambda \sum_{j=1}^J \alpha_j D_{ij} - \frac{\lambda}{N} \sum_{l=1}^N \frac{L_i(x_l) \Delta\varphi(x_l)}{p(x_l)} - \lambda\beta_i = F_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int_D K(x, y) \Delta\varphi(y) dy - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \frac{K(x, x_l) \Delta\varphi(x_l)}{p(x_l)}, \\ \rho_i(x) &= \int_D K(x, y) \Delta\varphi(y) dy - \frac{1}{N} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N \frac{K(x, x_l) \Delta\varphi(x_l)}{p(x_l)}, \quad i = \overline{1, N}, \\ \beta_i &= \int_D L_i(x) \Delta\varphi(x) dx - \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^N \frac{L_i(x_l) \Delta\varphi(x_l)}{p(x_l)}, \quad i = \overline{1, N} \end{aligned}$$

— погрешности вычисления интегралов методом Монте-Карло по реализациям величин x_i .

Построим из величин $\Delta\varphi(x_i)$, $\rho_i(x_i)$, $f(x_i)$, $i = \overline{1, N}$ и α_j , β_j , F_j , $j = \overline{1, J}$ векторы $\Delta\bar{\varphi}$, $\bar{\rho}$, \bar{f} и $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, \bar{F} соответственно, а из величин D_{ij} — матрицу D и введем матрицы

$$R = \|R_j(x_i)\|_{i=1, j=1}^{N \times J}; \quad \Phi = \|\varphi_j(x_i)\|_{i=1, j=1}^{N \times J};$$

$$L = \left\| \frac{L_i(x_j)}{p(x_j)} \right\|_{i=1, j=1}^{J \times N}; \quad K_N = \left\| \frac{K(x_i, x_j)}{p(x_j)} (1 - \delta_{ij}) \right\|_{i, j=1}^N$$

Тогда систему уравнений (8,9) можно переписать в матричном виде

$$\begin{cases} (\Phi - \lambda R)\bar{\alpha} + (E_N - \frac{\lambda}{N-1}K_N)\Delta\bar{\varphi} - \lambda\bar{\rho} = \bar{f}, \\ (E_J - \lambda D)\bar{\alpha} - \frac{\lambda}{N}L\Delta\bar{\varphi} - \lambda\bar{\beta} = \bar{F}, \end{cases},$$

где $E_N(E_J)$ — единичная матрица размерности $N(J)$. Вводя блочную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} E_J - \lambda D & -\frac{\lambda}{N}L \\ \Phi - \lambda R & E_N - \frac{\lambda}{N-1}K_N \end{bmatrix},$$

получаем следующую систему уравнений относительно $\bar{\alpha}$ и $\Delta\bar{\varphi}$:

$$A \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \Delta\bar{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \bar{f} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{\rho} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

При достаточно общих предположениях относительно ядра $K(x, y)$ и функций $\varphi(y)$ и $p(y)$ погрешности $\rho(x)$, $\rho_i(x_i)$, β_i имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию, стремящуюся к нулю при $N \rightarrow \infty$. В связи с этим следует ожидать, что величины $\bar{\alpha}$ и $\Delta\bar{\varphi}$, полученные из системы

$$A \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \Delta\bar{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \bar{f} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

будут при достаточно больших N в некотором смысле близки к $\bar{\alpha}$ и $\Delta\bar{\varphi}$.

Как следует из (7), точное решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \bar{R}^T(x)\bar{\alpha} + \frac{\lambda}{N} \bar{k}^T(x)\Delta\bar{\varphi} + \lambda\rho(x), \quad (12)$$

где

$$\bar{R}(x) = [R_1(x), \dots, R_J(x)]^T; \quad \bar{k}(x) = \left[\frac{K(x, x_1)}{p(x_1)}, \dots, \frac{K(x, x_N)}{p(x_N)} \right]^T.$$

Следовательно, после решения системы (11) искомая функция $\varphi(x)$ может быть в любой точке $x \in D$ оценена следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \bar{R}^T(x) \bar{\alpha} + \frac{\lambda}{N} \bar{k}^T(x) \Delta \bar{\varphi}, \quad (13)$$

Таким образом, задача приближенного обращения интегрального оператора в уравнении (1) свелась к решению системы линейных алгебраических уравнений (11) (т.е. обращению матрицы A) и последующей оценке функции $\varphi(x)$ по формуле (13). Вопрос об обратимости матрицы A рассмотрен ниже.

Приведенное описание идеи метода раскрывает смысл его названия. В самом деле, решение разыскивается в виде линейной комбинации известных базисных функций, как и в проекционных методах, однако с дополнительной составляющей, оценивание которой производится с использованием метода Монте-Карло. Из сказанного также ясно, что при отсутствии базиса (и, следовательно, при $\Delta \varphi \equiv \varphi$) проекционно-статистический метод переходит в полустатистический [2]. Далее эта связь будет неоднократно использоваться для сравнения методов, а также для косвенной проверки приводимых теоретических рассуждений.

Вектор $\bar{\varphi}$ неявно зависит от выборки x_1, \dots, x_N , причем весьма сложным образом. Введем обозначение $\omega = [x_1, \dots, x_N]^T \in D^N = \Omega$ — случайный вектор, каждое значение которого соответствует конкретной выборке. Следуя [1], введем полное линейное нормированное пространство $\bar{\Phi}$ вектор-функций $\bar{\varphi}(\omega) = [\varphi_1(\omega), \dots, \varphi_N(\omega)]^T$ с нормой, заданной по формуле

$$\|\bar{\varphi}\|_{\bar{\Phi}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\varphi_i^2(\omega)}{p(x_i)} \prod_{j=1}^N p(x_j) d\omega} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M \left\{ \frac{\varphi_i^2(\omega)}{p(x_i)} \right\}},$$

где $M \{ \cdot \}$ — обозначает операцию взятия математического ожидания по совокупности независимых случайных величин x_1, \dots, x_N , распределенных в D с плотностью $p(x)$.

В качестве критерия точности приближенного решения выберем функ-

ционал

$$u_q \{ \varphi, \tilde{\varphi} \} = \int_D M \{ |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \} q(x) dx,$$

где $q(x)$ — весовая функция, учитывающая возможность различных в зависимости от $x \in D$ требований к точности оценки решения, причем

$$0 \leq q(x) \leq C_q < \infty; \quad \int_D q(x) dx = 1;$$

Под сходимостью метода будем далее понимать стремление к нулю функционала $u_q \{ \varphi, \tilde{\varphi} \}$ при $N \rightarrow \infty$.

Введем также используемые в дальнейшем обозначения:

$$Q_{1q}(x, y) = \int_D K(\xi, x) K(\xi, y) q(\xi) d\xi; \quad Q_{2q}(x, y) = \int_D K(x, \xi) K(y, \xi) q(\xi) d\xi;$$

$$Q_1(x, y) = \int_D K(\xi, x) K(\xi, y) d\xi; \quad Q_2(x, y) = \int_D K(x, \xi) K(y, \xi) d\xi.$$

3. Формулы рекуррентного обращения

Матрица A системы уравнений проекционно-статистического метода допускает рекуррентное обращение. Метод рекуррентного обращения позволяет со сравнительно малыми вычислительными затратами пересчитывать матрицу, обратную к A при добавлении к случайной сетке дополнительных узлов. Благодаря этому, можно постепенно наращивать объем случайной сетки и останавливать вычислительный процесс сразу же по достижении требуемой точности.

Переход от матрицы A^{-1} (размерности $N + J$) к матрице

$$A_{N+m}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} E_J - \lambda D & -\frac{\lambda}{N+m} L_{N+m} \\ \Phi_{N+m} - \lambda R_{N+m} & E_{N+m} - \frac{\lambda}{N-1+m} K_{N+m} \end{array} \right]^{-1}$$

размерности $N + m + J$, где m — число добавленных узлов сетки интегрирования, следует производить в два этапа. Отметим, что матрицы L_{N+m} , Φ_{N+m} и R_{N+m} построены на основе $(N + m)$ случайных точек.

1-й этап: Представим матрицу A^{-1} в клеточной форме

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix},$$

где клетки B_i имеют такие же размерности, как клетки матрицы A , и положим

$$T_1 = \begin{bmatrix} E_J - \lambda D & \frac{N-1}{N-1+m} \left(-\frac{\lambda}{N} L\right) \\ \Phi - \lambda R & \frac{N-1}{N-1+m} \left(E_N - \frac{\lambda}{N-1} K_N\right) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{N-1+m}{N-1} B_3 & \frac{N-1+m}{N-1} B_4 \end{bmatrix}.$$

Далее, вычислим матрицу

$$T_{N+1} = \begin{bmatrix} E_J - \lambda D & -\frac{\lambda}{N+m} L \\ \Phi - \lambda R & E_N - \frac{\lambda}{N-1+m} K_N \end{bmatrix}^{-1}$$

с помощью рекуррентных соотношений

$$T_{j+1} = T_j - \frac{1}{1 + b_j^T T_j a_j} T_j a_j b_j^T T_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (14)$$

где

$$a_j = \begin{bmatrix} \frac{-\lambda m}{N(N-1+m)(N+m)} L \cdot j \\ \frac{m}{N-1+m} l_j \end{bmatrix}, \quad b_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ l_j \end{bmatrix}, \quad [l_j]_i = \delta_{ij}.$$

Здесь и далее под B_j подразумевается j -й столбец, а под B_i — i -я строка матрицы B . Справедливость соотношений (14) вытекает из известной формулы

$$(A + ab^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + b^T A^{-1} a} A^{-1} ab^T A^{-1}.$$

2-й этап: Полученная матрица T_{N+1} представляет собой ведущую подматрицу размерности $(N + J)$ искомой матрицы A_{+m}^{-1} , для нахождения которой теперь следует применить метод окаймления [4]. Для дальнейшего будет удобно использовать формулу метода окаймления в следующем виде:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + + \begin{bmatrix} B_1^{-1} B_2 \\ -E \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} B_3 B_1^{-1} & -E \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где $S = B_4 - B_3 B_1^{-1} B_2$ — Шуровское дополнение матрицы B , а размерность единичных матриц E совпадает с размерностью B_4 .

Приведенные формулы рекуррентного обращения при $J = 0$ переходят в формулы, данные в [1] для полустатистического метода.

4. Сходимость алгоритма

Рассмотрим вопрос об обратимости матрицы A . Из формулы (15) следует, что для обратимости блочной 2×2 -матрицы достаточно обратимости ее левой верхней клетки и Шуровского дополнения. Применительно к матрице A проекционно-статистического метода формула (15) примет вид

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} G^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{N}G^{-1}L \\ E_N \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} (\Phi - \lambda R)G^{-1} & -E_N \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} S &= H_N + \frac{\lambda}{N}(\Phi - \lambda R)G^{-1}L, \\ G &= (E_J - \lambda D), \\ H_N &= \left(E_N - \frac{\lambda}{N-1}K_N \right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что матрица G характеризует систему уравнений, которая получается при использовании обычного проекционного метода, т.е. при поиске решения уравнения (1) в виде

$$\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_J\varphi_J(x).$$

В работе [5] проведено подробное исследование этого метода и получены условия обратимости матрицы G . Сформулируем их в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть оператор H в уравнении (1) не вырожден и пусть величина

$$\varepsilon = \left\| K(x, y) - \sum_{i,j=1}^J D_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(y) \right\|_{L_2(D \times D)}$$

такова, что

$$q = \|H\|_{L_2} \|H^{-1}\|_{L_2} |\lambda| \varepsilon < 1.$$

Тогда матрица G обратима и справедлива оценка

$$\|G^{-1}\| \leq \frac{(1 + \varepsilon |\lambda|) \|H^{-1}\|_{L_2}}{1 - q} = \eta. \quad (17)$$

Отметим, что ε есть норма в пространстве L_2 остатка разложения $K(x,y)$ в двойной ряд Фурье по ортогональным функциям $\varphi_i(x)$. Под $\|G^{-1}\|$ здесь понимается операторная норма матрицы G в R^J .

Таким образом, если функции $\varphi_i(x)$ выбираются из полной системы функций в $L_2(D)$, то при достаточно большом J матрица G будет заведомо обратимой. Будем далее считать, что такое J и соответствующий набор $\varphi_i(x)$ выбраны и зафиксированы.

Для обратимости матрицы A достаточно теперь доказать обратимость Шуровского дополнения S . Поскольку вопрос об обратимости S тесно связан с вопросами сходимости проекционно-статистического метода, он будет более подробно рассмотрен несколько позже. Достаточные условия обратимости S приведены в теореме 4. В частности, в ней требуется обратимость матрицы H_N . Очевидно, что H_N представляет собой матрицу системы уравнений полустатистического метода. Условия, достаточные для ее обратимости, приведены в [1] и сформулированы здесь в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1. Оператор H в уравнении (1) не вырожден.
2. Найдутся такие множества ненулевой меры $G_1, G_2 \subset D$ для которых ядро $K(x, y)$ непредставимо в виде $K(x, y) = \psi(x)\chi(y)$ при $x \in G_1, y \in G_2$.
3. Существуют такие постоянные A_1, A_2 и p_0 , что для всех $x \in D$ справедливы неравенства:

$$Q_1(x, x) \leq A_1; \quad Q_2(x, x) \leq A_2; \quad 0 < p_0 \leq p(x).$$

Тогда при достаточно больших N матрица H_N обратима и справедлива оценка

$$\|H_N^{-1}\|_{\bar{\Phi}} \leq \varkappa = \text{const} < \infty.$$

(Под $\|H_N^{-1}\|_{\bar{\Phi}}$ понимается норма H_N^{-1} , как оператора на $\bar{\Phi}$.)

Перейдем к вопросу обоснования сходимости метода в смысле стремления к нулю при $N \rightarrow \infty$ функционала $u_q \{\varphi, \tilde{\varphi}\}$. Прежде всего получим выражение для погрешности приближенного решения.

Для этого перепишем формулы (12) и (13) с учетом (10) и (11) :

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \left[\bar{R}^T(x) \quad \frac{1}{N} \bar{k}^T(x) \right] A^{-1} \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \bar{f} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \left[\begin{array}{c} \overline{R}^T(x) \\ \frac{1}{N} \overline{k}^T(x) \end{array} \right] A^{-1} \left(\left[\begin{array}{c} \overline{F} \\ \overline{f} \end{array} \right] + \lambda \left[\begin{array}{c} \overline{\beta} \\ \overline{\rho} \end{array} \right] \right) + \lambda \rho(x). \quad (19)$$

Следовательно, в каждой точке погрешность приближенного решения представляется выражением

$$\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x) = \lambda^2 \left[\begin{array}{c} \overline{R}^T(x) \\ \frac{1}{N} \overline{k}^T(x) \end{array} \right] A^{-1} \left[\begin{array}{c} \overline{\beta} \\ \overline{\rho} \end{array} \right] + \lambda \rho(x). \quad (20)$$

Преобразуем формулу (20) с учетом представления (16):

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x) &= \lambda \rho(x) + \lambda^2 \overline{R}^T(x) G^{-1} \overline{\beta} - \\ &- \frac{\lambda^2}{N} \left(\lambda \overline{R}^T(x) G^{-1} L + \overline{k}^T(x) \right) S^{-1} \left((\Phi - \lambda R) G^{-1} \overline{\beta} - \overline{\rho} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} u_q \{ \varphi, \tilde{\varphi} \} &\leq |\lambda| \sqrt{\int_D M \{ \rho^2(x) \} q(x) dx} + \\ &+ \lambda^2 \eta \sqrt{M \{ \|\overline{\beta}\|^2 \}} \sqrt{\int_D \|\overline{R}^T(x)\|^2 q(x) dx} + \frac{\lambda^2}{\sqrt{N}} \|S^{-1} ((\Phi - \lambda R) G^{-1} \overline{\beta} - \overline{\rho})\|_{\Phi} \times \\ &\times \left(|\lambda| \sqrt{\int_D M \{ \|\overline{R}^T(x) G^{-1} L P\|^2 \} q(x) dx} + \sqrt{\int_D M \{ \|\overline{k}^T(x) P\|^2 \} q(x) dx} \right), \end{aligned}$$

где

$$P = \text{diag} \left\{ \sqrt{p(x_1)}, \sqrt{p(x_2)}, \dots, \sqrt{p(x_N)} \right\},$$

если правая часть имеет смысл.

Доказательство. Из (21) имеем

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leq |\lambda \rho(x)| + \lambda^2 \left| \overline{R}^T(x) G^{-1} \overline{\beta} \right| +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda^2}{N} \left| \left(\lambda \bar{R}^T(x) G^{-1} L + \bar{k}^T(x) \right) P P^{-1} S^{-1} \left((\Phi - \lambda R) G^{-1} \bar{\beta} - \bar{\rho} \right) \right| \leq \\
 & \leq |\lambda \rho(x)| + \lambda^2 \eta \left\| \bar{R}^T(x) \right\| \cdot \|\bar{\beta}\| + \\
 & + \frac{\lambda^2}{N} \left\| \left(\lambda \bar{R}^T(x) G^{-1} L + \bar{k}^T(x) \right) P \right\| \cdot \left\| P^{-1} S^{-1} \left((\Phi - \lambda R) G^{-1} \bar{\beta} - \bar{\rho} \right) \right\|.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 M \{ |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \} & \leq |\lambda| \sqrt{M \{ \rho^2(x) \}} + \lambda^2 \eta \left\| \bar{R}^T(x) \right\| \sqrt{M \{ \|\bar{\beta}\|^2 \}} + \\
 & + \frac{\lambda^2}{N} \left(|\lambda| \sqrt{M \left\{ \left\| \bar{R}^T(x) G^{-1} L P \right\|^2 \right\}} + \sqrt{M \left\{ \left\| \bar{k}^T(x) P \right\|^2 \right\}} \right) \times \\
 & \times \sqrt{M \left\{ \left\| P^{-1} S^{-1} \left((\Phi - \lambda R) G^{-1} \bar{\beta} - \bar{\rho} \right) \right\|^2 \right\}}.
 \end{aligned}$$

Поскольку для любой $\bar{\psi} \in \bar{\Phi}$ имеем

$$\sqrt{M \left\{ \left\| P^{-1} \bar{\psi} \right\|^2 \right\}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N M \left\{ \frac{\psi_i^2(\omega)}{p(x_i)} \right\}} = \sqrt{N} \|\bar{\psi}\|_{\bar{\Phi}},$$

то

$$\begin{aligned}
 M \{ |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \} & \leq |\lambda| \sqrt{M \{ \rho^2(x) \}} + \lambda^2 \eta \left\| \bar{R}^T(x) \right\| \sqrt{M \{ \|\bar{\beta}\|^2 \}} + \\
 & + \frac{\lambda^2}{\sqrt{N}} \left(|\lambda| \sqrt{M \left\{ \left\| \bar{R}^T(x) G^{-1} L P \right\|^2 \right\}} + \sqrt{M \left\{ \left\| \bar{k}^T(x) P \right\|^2 \right\}} \right) \times \\
 & \times \left\| S^{-1} \left((\Phi - \lambda R) G^{-1} \bar{\beta} - \bar{\rho} \right) \right\|_{\bar{\Phi}}.
 \end{aligned}$$

Умножая последнее неравенство на $q(x)$, интегрируя по D и используя неравенство Коши-Буняковского, приходим к утверждению леммы.

Из леммы 1 следует, что для обоснования сходимости проекционно-статистического метода необходимо установить возможные верхние оценки величин, входящих в правую часть утверждения леммы. Это будет целью нижеследующих лемм.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедлива оценка

$$\int_D M \left\{ \left\| \overline{R}^T(x) G^{-1} L P \right\|^2 \right\} q(x) dx \leq \eta^2 N \int_D \left\| \overline{R}^T(x) \right\|^2 q(x) dx \sum_{i=1}^J \int_D L_i^2(x) dx.$$

Доказательство. Очевидно, что $\left[\overline{R}^T(x) G^{-1} L \right]_j = \overline{R}^T(x) G^{-1} L_{.j}$. Следовательно,

$$\left[\overline{R}^T(x) G^{-1} L P \right]_j^2 = \left(\overline{R}^T(x) G^{-1} L_{.j} \right)^2 p(x_j) \leq \eta^2 \left\| \overline{R}^T(x) \right\|^2 \|L_{.j}\|^2 p(x_j),$$

откуда

$$\begin{aligned} M \left\{ \left\| \overline{R}^T(x) G^{-1} L P \right\|^2 \right\} &\leq \eta^2 \left\| \overline{R}^T(x) \right\|^2 \sum_{j=1}^N M \left\{ \sum_{i=1}^J \frac{L_i^2(x_j)}{p(x_j)} \right\} = \\ &= \eta^2 N \left\| \overline{R}^T(x) \right\|^2 \sum_{i=1}^J \int_D L_i^2(x) dx. \end{aligned}$$

Умножая на $q(x)$ и интегрируя по D , получаем утверждение леммы.

Лемма 3. Справедливо равенство

$$\int_D M \left\{ \left\| \overline{k}^T(x) P \right\|^2 \right\} q(x) dx = N \int_D Q_{1q}(x, x) dx.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} M \left\{ \left\| \overline{k}^T(x) P \right\|^2 \right\} &= M \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{K^2(x, x_i)}{p(x_i)} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_D K^2(x, x_i) dx_i = N \int_D K^2(x, y) dy. \end{aligned}$$

Домножая это равенство на $q(x)$ и интегрируя по D , приходим к утверждению леммы.

Лемма 4. Пусть для функции $\Delta\varphi(x)$ выполнено условие

$$\int_D \frac{Q_1(x, x)\Delta\varphi^2(x)}{p(x)} dx < \infty.$$

Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \int_D M \{ \rho^2(x) \} q(x) dx = \\ & = \frac{1}{N} \left(\int_D \frac{Q_{1q}(x, x)\Delta\varphi^2(x)}{p(x)} dx - \int_D \int_D Q_{1q}(x, y)\Delta\varphi(x)\Delta\varphi(y) dx dy \right), \\ \| \bar{\rho} \|_{\Phi}^2 & = \frac{1}{N-1} \left(\int_D \frac{Q_1(x, x)\Delta\varphi^2(x)}{p(x)} dx - \int_D \int_D Q_1(x, y)\Delta\varphi(x)\Delta\varphi(y) dx dy \right), \\ M \{ \| \bar{\beta} \|^2 \} & = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^J \left(\int_D \frac{L_i^2(x)\Delta\varphi^2(x)}{p(x)} dx - \left(\int_D L_i(y)\Delta\varphi(y) dy \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Непосредственно из определений $\rho(x)$, $\rho_i(x)$ и β_i следует

$$\begin{aligned} M \{ \rho^2(x) \} & = \frac{1}{N} \left(\int_D \frac{K^2(x, y)\Delta\varphi^2(y)}{p(y)} dy - \left(\int_D K(x, y)\Delta\varphi(y) dy \right)^2 \right), \\ M \{ \rho_i^2(x) \} & = \frac{1}{N-1} \left(\int_D \frac{K^2(x, y)\Delta\varphi^2(y)}{p(y)} dy - \left(\int_D K(x, y)\Delta\varphi(y) dy \right)^2 \right), \\ M \{ \beta_i^2 \} & = \frac{1}{N} \left(\int_D \frac{L_i^2(x)\Delta\varphi^2(x)}{p(x)} dx - \left(\int_D L_i(y)\Delta\varphi(y) dy \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Из первого и третьего равенств очевидным образом вытекают соответствующие утверждения леммы. Далее, благодаря независимости $\rho_i(x)$ от x_i справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \|\bar{\rho}\|_{\bar{\Phi}}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M \left\{ \frac{\rho_i^2(x_i)}{p(x_i)} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \rho_i^2(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N p(x_j) d\omega = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_D M \{ \rho_i^2(x) \} dx, \end{aligned}$$

из которого следует второе утверждение леммы.

Введем для дальнейшего обозначение

$$T(x) = \sum_{j=1}^J (\varphi_j(x) - \lambda R_j(x))^2 = \sum_{j=1}^J (H\varphi_j(x))^2.$$

Лемма 5. Пусть выполнено условие леммы 4 и дополнительно выполнено условие

$$\int_D \frac{T(x)L_m^2(x)\Delta\varphi^2(x)}{p^2(x)} dx < \infty.$$

Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|(\Phi - \lambda R)G^{-1}\bar{\beta}\|_{\bar{\Phi}}^2 \leq \\ &\leq \frac{2\eta^2}{N^2} \sum_{m=1}^J \left\{ \left(\int_D L_m(y)\Delta\varphi(y) dy \right)^2 \int_D T(x) dx + \int_D \frac{T(x)L_m^2(x)\Delta\varphi^2(x)}{p^2(x)} dx \right\} + \\ &+ \eta^2 \frac{N-1}{N^2} \int_D T(x) dx \sum_{m=1}^J \left(\int_D \frac{L_m^2(x)\Delta\varphi^2(x)}{p(x)} dx - \left(\int_D L_m(x)\Delta\varphi(x) dx \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Отметим, что для выполнения условий леммы достаточно, например, выполнения условий теоремы 2.

Доказательство. Очевидно, что

$$[(\Phi - \lambda R)G^{-1}\bar{\beta}]_i^2 = ((\Phi - \lambda R)_i G^{-1}\bar{\beta})^2 \leq \eta^2 \|(\Phi - \lambda R)_i\|^2 \|\bar{\beta}\|^2.$$

Замечая, что

$$\|(\Phi - \lambda R)_i\|^2 = \sum_{j=1}^J (\varphi_j(x_i) - \lambda R_j(x_i))^2 = T(x_i),$$

получим

$$\begin{aligned} & \eta^{-2} M \left\{ \frac{[(\Phi - \lambda R)G^{-1}\bar{\beta}]_i^2}{p(x_i)} \right\} \leq \\ & \leq M \left\{ \frac{T(x_i)}{p(x_i)} \sum_{m=1}^J \left(\int_D L_m(x) \Delta\varphi(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \frac{L_m(x_l) \Delta\varphi(x_l)}{p(x_l)} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \eta^{-2} M \left\{ \frac{[(\Phi - \lambda R)G^{-1}\bar{\beta}]_i^2}{p(x_i)} \right\} \leq \sum_{m=1}^J \left(\int_D L_m(x) \Delta\varphi(x) dx \right)^2 \int_D T(x) dx - \\ & - \frac{2}{N} \sum_{m=1}^J \int_D L_m(x) \Delta\varphi(x) dx \left((N-1) \int_D L_m(y) \Delta\varphi(y) dy \int_D T(x) dx + \right. \\ & \left. + \int_D \frac{T(x) L_m(x) \Delta\varphi(x)}{p(x)} dx \right) + \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^J \left\{ (N-1) \int_D \frac{L_m^2(x) \Delta\varphi^2(x)}{p(x)} dx \int_D T(x) dx + \right. \\ & \left. + (N^2 - 3N + 2) \left(\int_D L_m(y) \Delta\varphi(y) dy \right)^2 \int_D T(x) dx \int_D \frac{T(x) L_m^2(x) \Delta\varphi^2(x)}{p^2(x)} dx + \right. \\ & \left. + 2(N-1) \int_D L_m(y) \Delta\varphi(y) dy \int_D \frac{T(x) L_m(x) \Delta\varphi(x)}{p(x)} dx \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^J \left\{ \frac{2-N}{N^2} \left(\int_D L_m(x) \Delta\varphi(x) dx \right)^2 \int_D T(x) dx + \right. \\
 &+ \frac{1}{N^2} \int_D \frac{T(x) L_m^2(x) \Delta\varphi^2(x)}{p^2(x)} dx + \frac{N-1}{N^2} \int_D \frac{L_m^2(x) \Delta\varphi^2(x)}{p(x)} dx \int_D T(x) dx - \\
 &\left. - \frac{2}{N^2} \int_D L_m(x) \Delta\varphi(x) dx \int_D \frac{T(x) L_m(x) \Delta\varphi(x)}{p(x)} dx \right\}.
 \end{aligned}$$

Применяя неравенство $-2ab \leq a^2 + b^2$, получим

$$\begin{aligned}
 &-2 \int_D L_m(x) \Delta\varphi(x) dx \int_D \frac{T(x) L_m(x) \Delta\varphi(x)}{p(x)} dx \leq \left(\int_D L_m(x) \Delta\varphi(x) dx \right)^2 \times \\
 &\times \int_D T(x) dx + \left(\int_D \frac{T(x) L_m(x) \Delta\varphi(x)}{p(x)} dx \right)^2 \left(\int_D T(x) dx \right)^{-1} \leq \\
 &\leq \int_D \frac{T(x) L_m^2(x) \Delta\varphi^2(x)}{p^2(x)} dx + \left(\int_D L_m(x) \Delta\varphi(x) dx \right)^2 \int_D T(x) dx.
 \end{aligned}$$

Подставляя это неравенство в предыдущую формулу, после суммирования по i получаем утверждение леммы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и леммы 5, а также пусть матрица S обратима, и выполнено условие

$$\|S^{-1}\|_{\bar{\Phi}} \leq \alpha_1 = \text{const} < \infty. \tag{22}$$

Тогда

$$u_q \{ \varphi, \tilde{\varphi} \} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} (|\lambda| \Delta_1 + \lambda^2 \alpha_1 \Delta_2 \Delta_3),$$

где

$$\Delta_1 = C_{1q} + C_2 |\lambda| \eta \sqrt{\sum_{i=1}^J \int_D R_i^2(x) q(x) dx},$$

$$\Delta_2 = \sqrt{\int_D Q_{1q}(x, x) dx} + |\lambda| \eta \sqrt{\sum_{i=1}^J \int_D L_i^2(x) dx} \sqrt{\sum_{i=1}^J \int_D R_i^2(x) q(x) dx},$$

$$\Delta_3 = C_1 \sqrt{\frac{N}{N-1}} + C_2 \eta \sqrt{\frac{N-1}{N}} \sqrt{\int_D T(x) dx} + C_3 \frac{\eta}{\sqrt{N}},$$

$$C_1^2 = \int_D \frac{Q_1(x, x) \Delta \varphi^2(x)}{p(x)} dx - \int_D \int_D Q_1(x, y) \Delta \varphi(x) \Delta \varphi(y) dx dy,$$

$$C_2^2 = \sum_{i=1}^J \left(\int_D \frac{L_i^2(x) \Delta \varphi^2(x)}{p(x)} dx - \left(\int_D L_i(y) \Delta \varphi(y) dy \right)^2 \right),$$

$$C_3^2 = 2 \sum_{i=1}^J \left\{ \left(\int_D L_i(y) \Delta \varphi(y) dy \right)^2 \int_D T(x) dx + \int_D \frac{T(x) L_i^2(x) \Delta \varphi^2(x)}{p^2(x)} dx \right\},$$

и C_{1q} определяется формулой для C_1 с заменой Q_1 на Q_{1q} .

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из применения к лемме 1 результатов лемм 2–5.

Можно видеть, что при отсутствии базиса, а значит при $\Delta \varphi = \varphi$, $S = H_N$ и $\varkappa = \varkappa_1$, утверждение теоремы 3 переходит в утверждение теоремы 1 работы [2].

Укажем условия, достаточные для выполнения оценки (22).

Теорема 4. Пусть выполнены условия теорем 1 и 2 и пусть

$$\frac{|\lambda|}{N} \varkappa \left\| (\Phi - \lambda R) G^{-1} L \right\|_{\bar{\Phi}} < 1. \quad (23)$$

Тогда матрица S обратима и справедлива оценка

$$\|S^{-1}\|_{\bar{\Phi}} \leq \varkappa_1 = \frac{\varkappa}{1 - \frac{\lambda}{N} \varkappa \left\| (\Phi - \lambda R) G^{-1} L \right\|_{\bar{\Phi}}}.$$

Доказательство. Представим S в виде

$$S = H_N \left(E_N + \frac{\lambda}{N} H_N^{-1} (\Phi - \lambda R) G^{-1} L \right).$$

В силу условий теоремы матрица H_N обратима и

$$\left\| \frac{\lambda}{N} H_N^{-1} (\Phi - \lambda R) G^{-1} L \right\|_{\bar{\Phi}} < 1.$$

Утверждение теоремы и указанная оценка (22) теперь непосредственно вытекают из теоремы Банаха об обратимости оператора, близкого к тождественному [5].

Условие (23) имеет более простой характер, нежели (22), однако и оно является достаточно общим и весьма сложным для проверки. Ниже формулируется еще более простое условие, допускающее проверку и достаточное для выполнения (23).

Теорема 5. Пусть выполнены условия теорем 1 и 2 и пусть дополнительно выполнено условие

$$\varphi_j^2(x) \leq A_3,$$

для всех $x \in D$ и для всех $j = \overline{1, J}$. Тогда при всех λ , таких что

$$|\lambda| \leq \frac{\sqrt{A_1 A_3 + 4p_0 \sqrt{A_1 A_2} / (\varkappa \eta J)} - \sqrt{A_1 A_3}}{2\sqrt{A_1 A_2}}$$

справедливо условие (23).

Доказательство. Введем в рассмотрение произвольную вектор-функцию $\psi(\omega) \in \bar{\Phi}$ и оценим величину

$$\left\| \Phi G^{-1} L \psi \right\|_{\bar{\Phi}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M \left\{ \frac{\left\{ \Phi G^{-1} L \psi \right\}_i^2}{p(x_i)} \right\}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \{\Phi G^{-1}L\psi\}_i^2 &= (\Phi_i G^{-1}L\psi)^2 \leq \eta^2 \|\Phi_i\|^2 \|L\psi\|^2 = \eta^2 \sum_{j=1}^J \varphi_j^2(x_i) \sum_{m=1}^J (L_m \psi)^2 = \\ &= \eta^2 \sum_{j=1}^J \varphi_j^2(x_i) \sum_{m=1}^J \left(\sum_{l=1}^N \frac{L_m(x_l)\psi_l}{p(x_l)} \right)^2 \leq \eta^2 \sum_{j=1}^J \varphi_j^2(x_i) \sum_{m=1}^J \sum_{l=1}^N \frac{L_m^2(x_l)}{p(x_l)} \sum_{l=1}^N \frac{\psi_l^2}{p(x_l)}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$L_m^2(y) = \left(\int_D \varphi_m(x)K(x,y)dx \right)^2 \leq \int_D K^2(x,y)dx \int_D \varphi_m^2(x)dx = Q_1(y,y) \leq A_1,$$

то

$$\frac{\{\Phi G^{-1}L\psi\}_i^2}{p(x_i)} \leq \eta^2 J^2 N \frac{A_1 A_3}{p_0^2} \sum_{l=1}^N \frac{\psi_l^2}{p(x_l)}.$$

Поэтому

$$M \left\{ \frac{\{\Phi G^{-1}L\psi\}_i^2}{p(x_i)} \right\} \leq \eta^2 J^2 N^2 \frac{A_1 A_3}{p_0^2} \|\psi\|_{\bar{\Phi}}^2,$$

и следовательно,

$$\|\Phi G^{-1}L\psi\|_{\bar{\Phi}}^2 \leq \eta^2 J^2 N^2 \frac{A_1 A_3}{p_0^2} \|\psi\|_{\bar{\Phi}}^2.$$

Далее, поскольку

$$R_j^2(x) = \left(\int_D K(x,y)\varphi_j(y)dy \right)^2 \leq \int_D K^2(x,y)dy \int_D \varphi_j^2(y)dy = Q_2(x,x) \leq A_2,$$

то аналогично предыдущему имеем

$$\|RG^{-1}L\psi\|_{\bar{\Phi}}^2 \leq \eta^2 J^2 N^2 \frac{A_1 A_2}{p_0^2} \|\psi\|_{\bar{\Phi}}^2.$$

Окончательно

$$\|(\Phi - \lambda R)G^{-1}L\psi\|_{\bar{\Phi}} \leq \eta J N \frac{\sqrt{A_1} (\sqrt{A_3} + |\lambda| \sqrt{A_2})}{p_0} \|\psi\|_{\bar{\Phi}},$$

откуда следует, что

$$\|(\Phi - \lambda R)G^{-1}L\|_{\Phi} \leq \eta J N \frac{\sqrt{A_1} (\sqrt{A_3} + |\lambda| \sqrt{A_2})}{p_0}.$$

Поэтому, для выполнения (23) достаточно потребовать выполнения условия

$$|\lambda| \frac{\eta J \sqrt{A_1} (\sqrt{A_3} + |\lambda| \sqrt{A_2})}{p_0} < 1,$$

или, что то же самое,

$$|\lambda|^2 \sqrt{A_1 A_2} + |\lambda| \sqrt{A_1 A_3} - \frac{p_0}{\eta J} < 0.$$

Разрешая это неравенство относительно $|\lambda|$, получаем утверждение теоремы.

5. Достоинства метода

В теореме 3 выражения для Δ_1 и Δ_3 содержат под знаками радикалов квадратичные функционалы от $\Delta\varphi$, обращающиеся в ноль при $\Delta\varphi \equiv 0$. Поэтому коэффициент при $N^{-1/2}$ в оценке погрешности метода будет тем меньше, чем ближе $\Delta\varphi$ к нулю, или, иными словами, чем точнее аппроксимируется решение уравнения (1) отрезком разложения его по базису $\varphi_1, \dots, \varphi_J$. Это дает основания предполагать, что проекционно-статистический метод имеет определенные преимущества перед полустатистическим.

Укажем и на другие преимущества проекционно-статистического метода. Во-первых, учет невязки $\Delta\varphi$ позволяет получать качественное приближенное решение даже при “неблагоприятном” выборе базиса. В самом плохом случае, когда φ не попадает в подпространство, натянутое на $\varphi_1, \dots, \varphi_J$, будет получено приближенное решение по полустатистическому методу, тогда как проекционный метод вообще не сможет дать скольконибудь удовлетворительный результат. Во-вторых использование метода Монте-Карло для аппроксимации интегралов, содержащих неизвестную невязку, позволяет успешно применять метод для решения интегральных уравнений в областях сложной геометрии и большой размерности.

К достоинствам метода несомненно следует отнести и возможность, как и в полустатистическом методе, рекуррентного обращения матрицы A , что

позволяет постепенно наращивать объем случайной сетки x_1, \dots, x_N , одновременно уточняя решение, и останавливаться сразу же при достижении нужной точности.

6. Адаптивные возможности

К сожалению, довольно сложный вид оценки погрешности приближенного решения, приведенной в теореме 3 не позволяет провести ее оптимизацию по плотности $p(x)$, как это было проделано для полустатистического метода. Однако существует другой путь практической адаптации вычислительной процедуры к свойствам решаемой задачи. Он основан на следующем простом замечании: если имеется приближенное решение $\tilde{\varphi}(x)$, лежащее в подпространстве, натянутом на некоторые ортонормированные базисные функции $\{\varphi_j\}$, то невязка $\Delta\varphi$ разложения точного решения по этому базису в норме $L_2(D)$ заведомо не превосходит имеющуюся погрешность $\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)$ (т.е. даже проекционный метод даст на этом базисе приближение лучшее в норме $L_2(D)$, чем $\tilde{\varphi}$).

В связи с этим представляется разумным, получив некоторое приближенное решение $\tilde{\varphi}$ проекционно-статистическим методом, дополнить базис элементом φ_{J+1} таким образом, чтобы $\tilde{\varphi}$ попало в подпространство, натянутое на $\varphi_1, \dots, \varphi_{J+1}$. Для этого необходимо

- 1) Ортогонализировать $\tilde{\varphi}$ по функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_J$, положив

$$\hat{\varphi}_{J+1}(x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^J \varphi_j(x) \int_D \varphi(x) \varphi_j(x) dx;$$

- 2) Отнормировать полученную функцию в $L_2(D)$:

$$\varphi_{J+1}(x) = \hat{\varphi}_{J+1}(x) \left(\int_D \hat{\varphi}_{J+1}^2(x) dx \right)^{-1/2}.$$

Можно дать и несколько другую трактовку этого подхода. В самом деле, для того, чтобы получить точное решение проекционно-статистическим методом, необходимо положить

$$\varphi_{J+1}(x) = \frac{\Delta\varphi^{(J)}(x)}{\|\Delta\varphi^{(J)}(x)\|_{L_2}},$$

где

$$\Delta\varphi^{(J)}(x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^J \alpha_j \varphi_j(x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^J \varphi_j(x) \int_D \varphi(x) \varphi_j(x) dx,$$

т.к. в этом случае $\Delta\varphi^{(J+1)}(x)$ будет нулевой. Однако, для этого нужно знать точное решение. Так как мы располагаем приближенным решением $\tilde{\varphi}$, то логично воспользоваться им вместо точного и получить пусть не оптимальный, но хотя бы близкий к нему новый базисный элемент.

Необходимо обратить внимание на следующую деталь: если при очередном применении метода вновь выделенный базисный элемент отвечает за очень малую составляющую решения (т.е. если $\hat{\varphi}_{J+1}(x)$ мала по норме), то следующее применение метода не следует производить на той же выборке. В противном случае полученное приближенное решение будет чрезвычайно слабо отличаться от предыдущего, а новый базисный элемент будет иметь еще более малый вес. Таким образом, происходит как потеря вычислительного времени, так и накопление ошибок, связанных с нормировкой малых функций (которое может привести к потере базисом ортогональности).

В конце раздела 9.1. приводится ряд дополнительных соображений, касающихся возможного процесса адаптации базиса.

7. Особенности численной реализации

Нетрудно видеть, что для практической реализации проекционно-статистического метода необходимо уметь вычислять матрицу A , компонентами которой, в частности, являются величины $R_j(x_i), i = \overline{1, N}, j = \overline{1, J}, L_i(x_j), i = \overline{1, J}, j = \overline{1, N}$ и $D_{ij}, i, j = \overline{1, J}$, представляющие собой интегралы. В случае невозможности их аналитического вычисления придется применять приближенные методы интегрирования. При этом ясно, что получаемые результаты будут тем ближе к теоретическим оценкам, приведенным выше, чем точнее вычислены указанные интегралы. В случае сложной геометрии или большой размерности области D , построение достаточно точных квадратурных формул для них может оказаться затруднительным. В связи с этим возникает мысль о возможном их вычислении по формуле (более легко реализуемого) метода Монте-Карло.

Укажем на одну особенность применения здесь метода Монте-Карло, а именно, рассмотрим к чему приводит его использование *на уже имеющейся*

выборке x_1, \dots, x_N .

Положим

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ij} &= \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N \frac{K(x_i, x_l) \varphi_j(x_l)}{p(x_l)} \approx R_j(x_i), \\ \tilde{L}_{ij} &= \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N \frac{\varphi_i(x_l) K(x_l, x_j)}{p(x_l)} \approx L_i(x_j), \\ \tilde{D}_{ij} &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{l=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \frac{\varphi_i(x_l) K(x_l, x_k) \varphi_j(x_k)}{p(x_l) p(x_k)} \approx D_{ij},\end{aligned}$$

и построим матрицу

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} E_J - \lambda \tilde{D} & -\frac{\lambda}{N} \tilde{L} \\ \Phi - \lambda \tilde{R} & E_N - \frac{\lambda}{N-1} K_N \end{bmatrix},$$

где

$$\tilde{R} = \left\| \tilde{R}_{ij} \right\|_{i=1, j=1}^{N, J}; \quad \tilde{L} = \left\| \frac{\tilde{L}_{ij}}{p(x_j)} \right\|_{i=1, j=1}^{J, N}; \quad \tilde{D} = \left\| \tilde{D}_{ij} \right\|_{i, j=1}^J.$$

Введем также вектор $\bar{\tilde{R}}(x) = [\tilde{R}_1(x), \dots, \tilde{R}_J(x)]^T$, где

$$\tilde{R}_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \frac{K(x, x_l) \varphi_j(x_l)}{p(x_l)}$$

В качестве приближенного решения примем теперь выражение (18) с заменой A на \tilde{A} и $\bar{R}(x)$ на $\bar{\tilde{R}}(x)$:

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \begin{bmatrix} \bar{\tilde{R}}^T(x) & \frac{1}{N} \bar{k}^T(x) \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \bar{f} \end{bmatrix}$$

Можно ожидать, что при достаточно большом N , т.е. при достаточно точном вычислении интегралов вырождения матриц G и S не произойдет, и будет справедлив аналог формулы (16):

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{G}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{N} \tilde{G}^{-1} \tilde{L} \\ E_N \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} (\Phi - \lambda \tilde{R}) \tilde{G}^{-1} & -E_N \end{bmatrix},$$

где

$$\tilde{G} = (E_J - \lambda\tilde{D}); \quad \tilde{S} = H_N + \frac{\lambda}{N}(\Phi - \lambda\tilde{R})\tilde{G}^{-1}\tilde{L}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= f(x) + \lambda\overline{R}^T(x)G^{-1}\overline{F} - \\ &- \frac{\lambda}{N} \left(\lambda\overline{R}^T(x)\tilde{G}^{-1}\tilde{L} + \overline{k}^T(x) \right) S^{-1} \left((\Phi - \lambda\tilde{R})\tilde{G}^{-1}\overline{F} - \overline{f} \right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что $N\overline{R}^T(x) = \overline{k}^T(x)\Phi$ и $(\Phi - \lambda\tilde{R}) = H_N\Phi$, следовательно,

$$S = H_N \left(E_N + \frac{\lambda}{N}\Phi\tilde{G}^{-1}\tilde{L} \right),$$

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \frac{\lambda}{N}\overline{k}^T(x)\Phi\tilde{G}^{-1}\overline{F} -$$

$$- \frac{\lambda}{N}\overline{k}^T(x) \left(\frac{\lambda}{N}\Phi\tilde{G}^{-1}\tilde{L} + E_N \right) \tilde{S}^{-1} \left(H_N\Phi\tilde{G}^{-1}\overline{F} - \overline{f} \right) = f(x) + \frac{\lambda}{N}\overline{k}^T(x)H_N^{-1}\overline{f}$$

Такой вид решения получается не только вне зависимости от того, как аппроксимируются интегралы F_j , но, как видно из приведенных выкладок, даже и от того, как аппроксимируются L_i и D_{ij} . Более того, именно такое приближенное решение дает полустатистический метод [2].

Таким образом, использование метода Монте-Карло для вычисления хотя бы интегралов R_j на той же выборке x_1, \dots, x_N сводит на нет преимущества предложенного проекционно-статистического метода перед полустатистическим. Весьма неожиданным, на первый взгляд, является абсолютная независимость полученного решения $\tilde{\varphi}$ от базиса $\{\varphi_j(x)\}$, несмотря на его, казалось бы, решающую роль в формировании этого решения. Тем не менее, этот факт довольно легко объяснить. Для этого обратимся к формулам (7) и (8) и заменим прямо в них $R_j(x)$ на $\tilde{R}_j(x)$ и $R_j(x_i)$ на $\tilde{R}_j(x_i)$. Опуская случайные погрешности $\rho(x)$ и $\rho_i(x_i)$, после элементарных преобразований получим формулы

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{N} \sum_{l=1}^N \frac{K(x, x_l)\varphi(x_l)}{p(x_l)} = f(x),$$

$$\varphi(x_i) - \frac{\lambda}{N-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N \frac{K(x_i, x_l) \varphi(x_l)}{p(x_l)} = f(x_i), \quad i = \overline{1, N},$$

на основании которых и строится полустатистический метод [2].

В связи с изложенным целесообразным кажется вычисление интегралов L_i , R_j , D_{ij} и F_j методом Монте-Карло, однако на абсолютно других, независимых с первоначальной, выборках достаточно большого объема (чтобы обеспечить необходимую точность). При этом большую роль может играть разумный выбор плотности распределения узлов интегрирования.

8. Альтернативная вычислительная методика: усреднение приближенных решений

Для получения уравнений проекционно-статистического метода проводилась приближенная замена интегралов по формуле метода Монте-Карло, которая дает несмещенную оценку интеграла. В связи с этим можно надеяться на то, что получаемые приближенные решения будут иметь математическим ожиданием точное решение интегрального уравнения. Это соображение позволяет сформулировать следующую схему вычислительного процесса: вместо рекуррентного обращения матриц и постепенного наращивания объема случайной сетки можно вычислять выборочное среднее некоторого числа приближенных решений, полученных на независимых одинаково распределенных выборках сравнительно малого объема.

Формально сказанное выше можно представить в следующем виде. Допустим, что имеется m приближенных решений $\tilde{\varphi}_1(x), \dots, \tilde{\varphi}_m(x)$, полученных на m независимых одинаково распределенных выборках. Положим

$$\tilde{\varphi}_m^*(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{\varphi}_i(x).$$

Тогда, если

$$M \{ \tilde{\varphi}_i(x) \} = \varphi(x),$$

то

$$M \{ \tilde{\varphi}_m^*(x) \} = \varphi(x),$$

$$D \{ \tilde{\varphi}_m^*(x) \} = M \left\{ (\tilde{\varphi}_m^*(x) - \varphi(x))^2 \right\} = \frac{1}{m} D \{ \tilde{\varphi}_i(x) \}.$$

По закону больших чисел $\tilde{\varphi}^*(x)$ стремится к $\varphi(x)$ по вероятности в каждой конкретной точке x [3]. Более того, если дисперсия $\tilde{\varphi}_i(x)$ конечна, то согласно центральной предельной теореме в каждой точке $x \in D$ распределение $\tilde{\varphi}^*(x)$ стремится к нормальному закону и при достаточно больших m имеет место приближенное равенство

$$P \left\{ |\tilde{\varphi}_m^*(x) - \varphi(x)| < \alpha \sqrt{\frac{1}{m} D \{ \tilde{\varphi}_i(x) \}} \right\} \approx \Phi(\alpha),$$

где

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\alpha e^{-t^2/2} dt.$$

— интеграл вероятностей. Задавая коэффициент доверия $\Phi(\alpha)$, и определяя по нему соответствующее значение α , можно, зная дисперсию $\tilde{\varphi}_i(x)$, определить число реализаций m , требуемое для достижения с заданной вероятностью необходимой точности. Так коэффициенту доверия 0.997 отвечает $\alpha = 3$ (правило трех сигм), а коэффициенту доверия 0.95 — $\alpha = 1.96$. В практических расчетах дисперсия приближенных решений может быть оценена эмпирически, с помощью выборочной дисперсии:

$$D \{ \tilde{\varphi}_i(x) \} \approx S_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\varphi_i(x) - \tilde{\varphi}_m^*(x))^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varphi_i^2(x) - (\tilde{\varphi}_m^*(x))^2.$$

Отметим, что существует возможность простого рекуррентного пересчета $\tilde{\varphi}_m^*(x)$ и $S_m(x)$ после каждой следующей реализации метода. Таким образом описанная схема вычислений позволяет производить контроль точности в процессе вычислений и обоснованно останавливать вычислительный процесс при достижении необходимой точности.

Укажем на другие достоинства этого подхода. Основным по времени этапом реализации проекционно-статистического метода является обращение матрицы (решение системы уравнений) с размерностью $N + J$ при $N \gg J$. Поскольку матрица системы метода является заполненной, то с ростом объема выборки N временные затраты на решение системы растут чрезвычайно быстро (например, при использовании метода Гаусса, как N^3). Более того, необходимость хранения текущей обратной матрицы

(в процессе рекуррентного обращения) в имеющемся объеме оперативной памяти компьютера накладывает существенные ограничения на ее размерность. Использование малых выборок снимает проблемы с оперативной памятью и кроме того, за то время, которое тратится на решение задачи на выборке большого объема N можно большое число раз решить ее на малой выборке (например, при использовании метода Гаусса, 1000 раз на выборке объема $N/10$) и, усреднив, получить качественный результат. Еще одним достоинством предложенного способа является то, что при усреднении сглаживаются статистические флуктуации и резкие выбросы приближенных решений, тогда как однократное решение задачи на большой выборке может не дать адекватного результата из-за “неблагоприятной” выборки.

9. Численные эксперименты

В данном разделе излагаются результаты численных экспериментов — применения полустатистического и проекционно-статистического методов к интегральным уравнениям Фредгольма II рода. Раздел состоит из двух частей, в первой из которых рассматривается тестовая задача, а во втором — физическая — задача о колебаниях струны. На примере тестовой задачи подробно исследуются особенности используемых методов. Результаты, полученные для тестовой задачи, могут служить, таким образом, свидетельством работоспособности методов. Во второй части, на примере уравнения поперечных колебаний струны рассматривается ряд задач с известным аналитическим решением, а также получены приближенные решения для некоторых задач, которые аналитически решить не удастся.

В обеих частях для простоты рассматриваются одномерные задачи. Поскольку при рассмотрении проекционно-статистического метода не было получено каких-либо утверждений о надлежащем выборе плотности распределения выборки, она всюду считается постоянной (т.е. все расчеты проводились на равномерных выборках).

9.1. Тестовая задача

В настоящем разделе рассматривается применение проекционно-статистического метода к интегральному уравнению вида

$$\varphi(x) - \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

ядро которого имеет вид

$$K(x, y) = e^{-xy}.$$

Очевидно, что ядро не превосходит единицы в прямоугольнике $[0, 1] \times [0, 1]$ и, следовательно, $\|K\|_{L_2} < 1$. Таким образом, уравнение имеет единственное решение при любой правой части $f(x)$ и это решение может быть получено методом последовательных приближений.

Численные эксперименты проводились для двух различных по своей структуре случаев. В обоих случаях задавалось точное решение интегрального уравнения и вычислялась соответствующая ему правая часть, после чего применялся численный метод. Различие состояло в структуре точного решения.

Первое решение

$$\varphi^{(1)}(x) = e^{2x},$$

— бесконечно гладкое на $[0, 1]$, монотонно возрастающее. Ему отвечает правая часть

$$f^{(1)}(x) = e^{2x} - \frac{e^{2-x} - 1}{2 - x}.$$

Второе решение

$$\varphi^{(2)}(x) = e^{|4x-2|},$$

— симметрично относительно середины отрезка $[0, 1]$, имеет в точке $x = 0.5$ единственный минимум и ярко выраженный излом (разрыв первой производной). Ему отвечает правая часть

$$f^{(2)}(x) = e^{|4x-2|} + \frac{e^{-x/2} - e^2}{4 + x} - e^{(4-x)/2} \frac{e^{-x/2} - e^{-2}}{4 - x}.$$

Для применения проекционно-статистического метода к каждому из указанных случаев были выбраны базисные функции двух типов — полиномиальные и тригонометрические. Для обоих типов базиса число используемых базисных функций было ограничено тремя. Полиномиальный базис составляли функции

$$\varphi_1^p(x) \equiv 1, \quad \varphi_2^p(x) = \sqrt{3}(2x - 1), \quad \varphi_3^p(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1),$$

а тригонометрический — функции

$$\varphi_1^t(x) \equiv 1, \quad \varphi_2^t(x) = \sqrt{2} \sin(2\pi x), \quad \varphi_3^t(x) = \sqrt{2} \cos(2\pi x).$$

Ортонормированность тригонометрического базиса на $[0,1]$ общеизвестна, ортонормированность же полиномиального вытекает из того, что $\varphi_i^p(x) = \sqrt{2}P_{i-1}(2x - 1)$, где $P_i(x)$ — полиномы Лежандра, ортонормированные на отрезке $[-1,1]$ с весом 1.

Принципиальное различие рассматриваемых решений $\varphi^{(1)}(x)$ и $\varphi^{(2)}(x)$ с точки зрения применения к соответствующим уравнениям проекционно-статистического метода состоит в том, что решение с изломом гораздо сложнее аппроксимировать отрезком ряда Фурье по гладкому базису, чем гладкое решение. Поэтому следует ожидать, что точность проекционно-статистического метода для случая с изломом будет несколько ниже, чем для гладкого случая. Далее, хорошо известно, что сходимость тригонометрических рядов Фурье в общем случае довольно медленная, поэтому для эффективного применения метода с тригонометрическим базисом следует удерживать достаточно большое число базисных элементов. Однако, даже на трех базисных элементах удастся отследить преимущества проекционно-статистического метода перед полустатистическим и тенденцию ускорения сходимости с ростом числа элементов базиса.

Отметим еще одну деталь — вторые элементы обоих базисов являются “нечетными” функциями относительно середины отрезка $[0,1]$. Поэтому коэффициент α_2 в разложении решения $\varphi^{(2)}$ по любому из базисов равняется нулю, а невязки $\Delta\varphi_1^{(2)}$ и $\Delta\varphi_2^{(2)}$ просто совпадают. В связи с этим можно ожидать (и это подтверждается экспериментами), что применение к случаю с изломом метода с одной, либо двумя базисными функциями на одной и той же выборке даст чрезвычайно близкие результаты.

Типичные примеры работы одного из вариантов метода показаны на рисунке 1. Приведенные на нем графики соответствуют применению метода на выборках объемом 40 точек. На рисунке 1 для обеих рассматриваемых

задач показан статистический разброс приближенных решений, полученных на независимых выборках, а также выборочное среднее приближенных решений по 20 реализациям метода и доверительные интервалы для точного решения построенные по коэффициентам доверия 0.8 и 0.99.

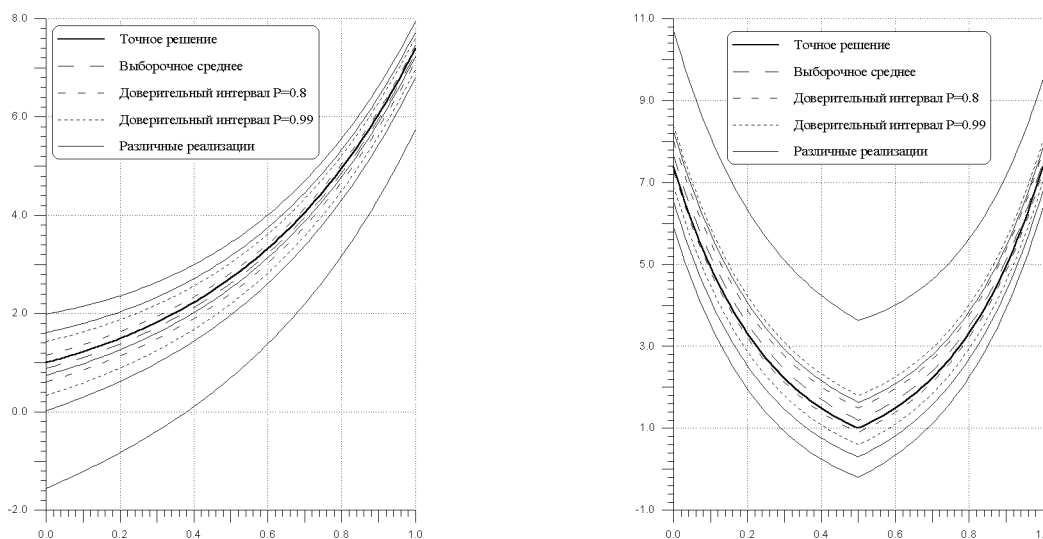


Рис. 1. Пример работы проекционно-статистического метода.

Количественное сравнение различных вариантов метода проводилось на основе величины

$$u \{ \varphi, \tilde{\varphi} \} = \int_D M \{ |\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| \} dx,$$

вычисляемой как выборочное среднее по 100 реализациям метода.

В таблице 1 приводятся значения величины $u \{ \varphi, \tilde{\varphi} \}$, вычисленные для $N = 40, 80, \dots, 200$ и следующих вариантов метода:

- 1) Полу статистического метода — графа ПС;
- 2) Проекционно-статистического метода с одним базисным элементом $\varphi_1 \equiv 1$ — графа ПРС-1;
- 3) Проекционно-статистического метода с двумя элементами полиномиального базиса (φ_1^p и φ_2^p) — графа ПРС-П2;
- 4) Проекционно-статистического метода с тремя элементами полиномиального базиса (φ_1^p, φ_2^p и φ_3^p) — графа ПРС-П3;
- 5) Проекционно-статистического метода с двумя элементами тригонометрического базиса (φ_1^t и φ_2^t) — графа ПРС-Т2;

Таблица 1. Оценка величины u $\{\varphi, \tilde{\varphi}\}$ для тестовой задачи.

N	ПС	ПРС-1	ПРС-П2	ПРС-П3	ПРС-Т2	ПРС-Т3
40	0.7719	1.0337	0.2056	0.0432	0.5643	0.6172
80	0.6030	0.6568	0.1475	0.0282	0.4062	0.4347
120	0.4196	0.5676	0.1366	0.0228	0.3097	0.3247
160	0.3417	0.4022	0.1093	0.0178	0.2750	0.2780
200	0.2851	0.4237	0.1050	0.0204	0.2808	0.2762
	Решение с изломом					
40	1.1565	0.8627	1.0230	0.0415	0.9611	0.3032
80	0.6426	0.7237	0.6889	0.0266	0.7017	0.2137
120	0.5941	0.5862	0.5625	0.0219	0.5557	0.1494
160	0.4773	0.5223	0.5058	0.0209	0.5004	0.1546
200	0.4327	0.4093	0.4581	0.0182	0.4372	0.1295

6) Проекционно-статистического метода с двумя элементами тригонометрического базиса (φ_1^t, φ_2^t и φ_3^t) — графа ПРС-Т3;

Данные приведенные в таблице наглядно показывают убывание погрешности с ростом объема выборки. При конкретном N уровень погрешности для каждого варианта метода в первую очередь зависит от того, насколько хорошо аппроксимируется точное решение интегрального уравнения отрезком его разложения по базисным функциям, или, иначе говоря, насколько близкое к точному решение дает проекционный метод. Для сравнения с таблицей на рисунке 2, показаны результаты работы соответствующих вариантов проекционного метода.

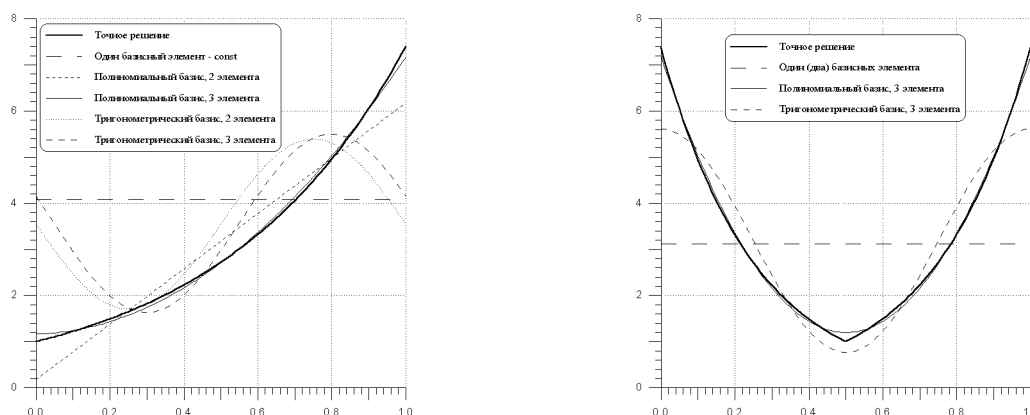


Рис. 2. Результаты работы проекционного метода

Кратко опишем результаты, полученные при исследовании механизма

адаптации базиса в том варианте, в котором он описан в разделе 6. Для каждой из тестовых задач проводились эксперименты следующего вида: сперва задача решалась полустатистическим методом, после чего делалось 5 шагов адаптации базиса. При этом в каждой следующей реализации проекционно-статистического метода использовалась новая, независимая от предыдущих выборка.

При проведении множества подобных экспериментов четко прослеживается следующая тенденция: наилучшее приближение к точному решению достигается после 2 – 3 шагов адаптации базиса (т.е. на 2 – 3 построенных базисных элементах). Последующие шаги адаптации ухудшают качество приближений. По всей видимости это связано с тем, что при ортогонализации и нормировке новых базисных элементов (имеющих малый вес) возникают ошибки округления, за счет которых теряется ортогональность базиса и метод применяется не вполне корректно.

В качестве иллюстрации приведем таблицу приближенных значений величины $u \{ \varphi, \tilde{\varphi} \}$ вычисленные для каждого шага адаптации базиса на основании 1000 экспериментов:

	Гладкое решение	Решение с изломом
Полустатистич. метод	0.741345	1.039011
После 1 шага адаптации	0.494815	0.255568
После 2 шагов адаптации	0.001748	0.005728
После 3 шагов адаптации	0.002825	0.002321
После 4 шагов адаптации	0.014496	0.017211
После 5 шагов адаптации	0.021772	0.035652

Можно предложить иной способ адаптации базисного набора в ходе решения задачи. Именно, вместо постепенного увеличения числа базисных функций, можно ограничиться некоторым постоянным их числом. При этом на каждом шаге одна из функций (например, та, коэффициент $\tilde{\alpha}_j$ при которой оказался наименьшим по модулю) “отбрасывается” и заменяется новой в соответствии с формулами раздела 6. Если, к примеру, ограничиться лишь одной базисной функцией, то на каждом шаге она будет корректироваться в соответствии с получаемым приближенным решением (она будет являться приближенным решением, отнормированным в $L_2(D)$). Этот подход обладает тем преимуществом, что при удержании лишь небольшого числа базисных функций, каждая из которых имеет не слишком малый вес, удастся сохранять ортонормированность базиса и не ухудшать обусловленность системы линейных уравнений метода.

Наиболее целесообразным представляется использование следующего комбинированного подхода. После первичного решения задачи полустатистическим методом и получения первой базисной функции, она уточняется по только что описанной схеме в течение некоторого числа итераций. После этого на основе текущей оценки решения генерируется второй базисный элемент, и в течение нескольких итераций корректируется набор из двух базисных функций и т.д.

9.2. Задача об установившихся вынужденных малых поперечных колебаниях закрепленной струны под действием гармонической вынуждающей силы

Как известно [6], вынужденные малые поперечные колебания струны описываются уравнением

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x, t), \quad x \in [0, l], t \geq 0,$$

где $u = u(x, t)$ — поперечное смещение струны, $\rho(x)$ — линейная плотность струны, $g(x, t)$ — линейная плотность вынуждающей силы, T_0 — сила натяжения струны, которую будем считать постоянной. Если струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = l$, необходимо поставить граничные условия

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Требуется также поставить начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, l],$$

где $u_0(x)$ — начальное смещение струны — заданная функция.

Предположим, что внешнее воздействие представляет собой гармоническую функцию

$$g(x, t) = \varphi(x) \cos(\omega t).$$

В этом случае струна начнет совершать вынужденные колебания и установившееся решение будет гармоническими колебаниями той же частоты ω :

$$u^*(x, t) = v(x) \cos(\omega t),$$

где $v(x)$ имеет смысл амплитуды (формы) установившихся колебаний. Если искомым является именно установившееся решение, то начальное условие следует проигнорировать, а подстановка $u^*(x, t)$ в уравнение колебаний и граничные условия приводит к краевой задаче

$$\begin{cases} T_0 v'' = -\rho(x)\omega^2 v - \varphi(x), x \in [0, l], \\ v(0) = v(l) = 0 \end{cases}$$

для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Не ограничивая общности, можно далее считать $T_0 = 1$.

Эту задачу несложно преобразовать к интегральному уравнению Фредгольма II рода. В самом деле, проведем интегрирование от 0 до x :

$$v'(x) = - \int_0^x (\rho(y)\omega^2 v(y) + \varphi(y)) dy + C,$$

где C — константа интегрирования. Повторное интегрирование даст

$$v(x) = \int_0^x v'(z) dz = - \int_0^x \int_0^z (\rho(y)\omega^2 v(y) + \varphi(y)) dy dz + Cx + D.$$

Изменим порядок интегрирования. Тогда

$$v(x) = - \int_0^x (\rho(y)\omega^2 v(y) + \varphi(y)) (x - y) dy + Cx + D.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем

$$C = \frac{1}{l} \int_0^l (\rho(y)\omega^2 v(y) + \varphi(y)) (l - y) dy \quad \text{и} \quad D = 0,$$

откуда

$$v(x) = \frac{x}{l} \int_0^l (\rho(y)\omega^2 v(y) + \varphi(y)) (l - y) dy - \int_0^x (\rho(y)\omega^2 v(y) + \varphi(y)) (x - y) dy.$$

Сводя два интеграла в один, окончательно имеем

$$v(x) = \int_0^l G(x, y) (\rho(y)\omega^2 v(y) + \varphi(y)) dy =$$

$$= \omega^2 \int_0^l G(x, y) \rho(y) v(y) dy + \int_0^l G(x, y) \varphi(y) dy,$$

где

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{x(l-y)}{l}, & 0 \leq x \leq y \leq l, \\ \frac{y(l-x)}{l}, & 0 \leq y \leq x \leq l. \end{cases}$$

Таким образом для функции $v(x)$ получено одномерное интегральное уравнение Фредгольма II рода с ядром $K(x, y) = G(x, y)\rho(y)$.

Нетрудно понять, что выбором масштаба длины уравнение может быть сведено к отрезку $[0,1]$. Далее, за счет выбора масштаба времени можно добиться $\omega = 1$. Следовательно, без ограничения общности можно рассматривать краевую задачу

$$\begin{cases} v'' + \rho(x)v = -\varphi(x), & x \in [0, 1], \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases}$$

или эквивалентное ей интегральное уравнение Фредгольма II рода

$$v(x) - \int_0^1 G(x, y) \rho(y) v(y) dy = \int_0^1 G(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in [0, 1],$$

где

$$G(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ y(1-x), & 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Оно и стало объектом для численных экспериментов.

Линейная плотность $\rho(x)$ для реальной струны с постоянной объемной плотностью, очевидно, пропорциональна площади ее поперечного сечения. Наиболее простая модель — струна с постоянным сечением — соответствует $\rho(x) = \text{const}$. Можно рассматривать и более сложную модель: реальная струна, находящаяся под действием сильного натяжения, в середине имеет меньшую толщину и утолщается к концам. Такую ситуацию можно смоделировать, например, выбором параболической плотности. В связи с этим численные эксперименты проводились для случаев $\rho(x) \equiv 1$ и $\rho(x) = x^2 - x + 1$.

Для каждого из этих вариантов были рассмотрены следующие задачи:

- 1) Две задачи с известным аналитическим решением, полученные путем задания точного решения $v(x)$ и вычисления по нему соответствующей правой части $\varphi(x)$ из дифференциального уравнения. В качестве точных решений были выбраны функции

$$\begin{aligned} v^{(1)}(x) &= x - x^2, \\ v^{(2)}(x) &= \frac{\sin(2\pi x)}{4}, \end{aligned}$$

которым соответствуют правые части

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x) &= x^2 - x + 2, \\ \varphi^{(2)}(x) &= (\pi^2 - 0.25) \sin(2\pi x), \end{aligned}$$

для постоянной плотности, и

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x) &= (x^2 - x)(x^2 - x + 1) + 2, \\ \varphi^{(2)}(x) &= \left(\pi^2 - \frac{x^2 - x + 1}{4}\right) \sin(2\pi x), \end{aligned}$$

для параболической плотности.

- 2) Задачи с заданным внешним воздействием

$$\varphi_\epsilon^{(3)}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0.5 - \epsilon, 0.5 + \epsilon], \\ \frac{1}{2\epsilon}, & x \in [0.5 - \epsilon, 0.5 + \epsilon]. \end{cases} \quad 0 < \epsilon \leq 0.5.$$

Случай $\epsilon = 0.5$ соответствует вынуждающей силе, постоянной по всей длине струны и равной 1. С уменьшением ϵ область воздействия сужается, а величина его возрастает. При ϵ стремящемся к нулю $\varphi^{(3)}$ стремится к единичной сосредоточенной силе, приложенной в точке $x = 0.5$. В ходе экспериментов были рассмотрены случаи $\epsilon = 0.5; 0.3; 0.1; 0.05$.

Вследствие того, что уравнение рассматривается на промежутке $[0,1]$, для применения проекционно-статистического метода был использован тот же набор базисных функций, что и для тестовой задачи, обсуждаемой в разделе 9.1.

В качестве примера на рисунке 3 приведены графики решений, полученных в результате применения различных вариантов метода к задаче о струне с переменной плотностью. В целях лучшего разрешения кривых, наряду с графиками в целом промежутке построены и графики на более узких участках. Все решения получены на выборках объема 40.

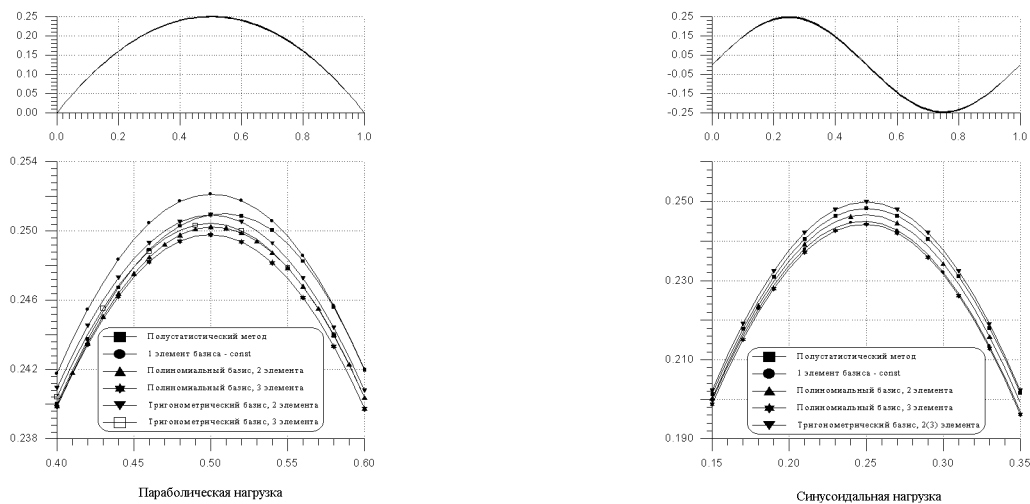


Рис. 3. Задачи с известным решением для струны переменной плотности.

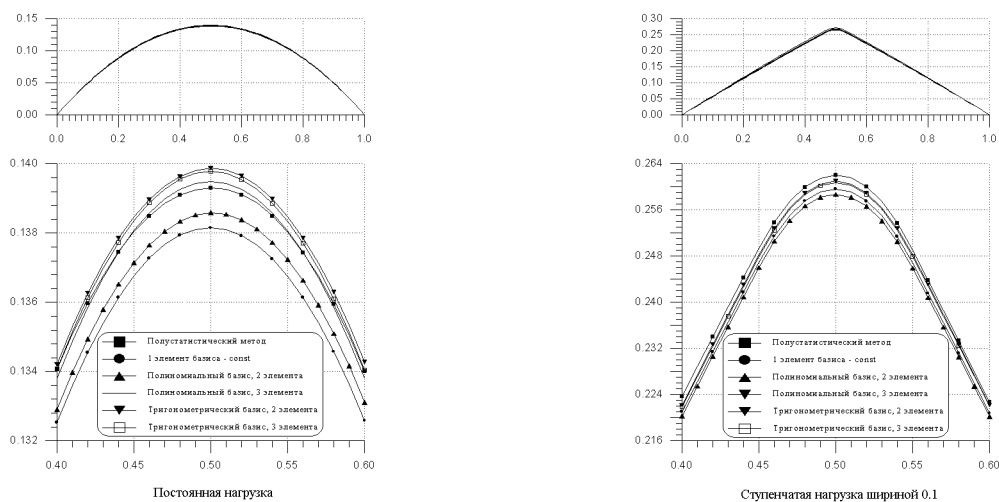


Рис. 4. Ступенчатые нагрузки для струны с постоянной плотностью.

Рисунок 4 содержит аналогичные графики для двух задач со ступенчатой нагрузкой при постоянной плотности струны.

Таблица 2 аналогична таблице 1 и содержит значения величины u $\{\varphi, \tilde{\varphi}\}$ для задач с известным решением.

Таблица 2. Оценка величины u $\{\varphi, \tilde{\varphi}\}$ для задачи о струне.

N	0	1	П2	П3	T2	T3
Гладкое решение						
50	0.016505	0.181645	0.039587	0.003921	0.102077	0.030683
100	0.089470	0.189160	0.002195	0.001807	0.042116	0.017992
150	0.087460	0.102261	0.007899	0.000526	0.046617	0.051225
200	0.101059	0.112617	0.007461	0.000398	0.018534	0.010771
250	0.124697	0.117093	0.010825	0.000613	0.008664	0.011370
300	0.120786	0.115246	0.021798	0.000433	0.017643	0.004670
350	0.111145	0.121630	0.025534	0.000343	0.026030	0.024299
400	0.119861	0.123634	0.024163	0.000923	0.021693	0.035375
Решение с изломом						
50	0.063585	0.020330	0.131551	0.003220	0.180236	0.058699
100	0.069504	0.053854	0.329135	0.002516	0.130542	0.019353
150	0.053969	0.008456	0.183568	0.001486	0.040033	0.017297
200	0.094238	0.055233	0.149192	0.002395	0.024314	0.025360
250	0.083476	0.037791	0.135207	0.003759	0.024350	0.022680
300	0.093288	0.071724	0.173570	0.003854	0.066378	0.018140
350	0.118316	0.061983	0.171355	0.003465	0.047029	0.017612
400	0.120103	0.065553	0.155088	0.003279	0.060882	0.013911

Как видно из приведенной таблицы, при применении любого из вариантов метода максимальное относительное отклонение приближенного решения от точного не превосходит 2%.

Список литературы

- [1] Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю. Адаптивные методы вычислительной математики и механики. Стохастический вариант. СПб.: Наука, 1996, 366с.
- [2] Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю. Метод численного решения интегральных уравнений на случайной сетке // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, N2. С.333–341.
- [3] Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 311с.
- [4] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. 3-е изд. М.: Наука, 1966. 520с.

- [5] *Канторович Л.В.* Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук. 1948. Т.3, вып.6(28), С.89–185.
- [6] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1977, 735с.