ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 1998
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

теория обыкновенных дифференциальных уравнений

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В КВАДРАТУРАХ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.К. ИВАНОВ

Россия, 198005, Санкт-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д.1,
Балтийский государственный технический университет ”ВОЕНМЕХ”им.
Д.Ф. Устинова
e-mail: rector@bstu.spb.su

Аннотация.

Предлагается метод получения приближенного решения в квадратурах некоторых типов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Решение строится на конечных интервалах изменения независимой переменной или в окрестностях известных точек.

1. Основные понятия предлагаемого метода

Известно, что большинство дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами решаются приближенно. Исключение составляют лишь немногие типы уравнений, их аналитические решения представлены в [1-4]. Разработанные приближенные методы решения отличаются разнообразием, и их использование в каждом конкретном случае имеет свои преимущества.

Предлагаемый метод, дополняя имеющиеся, дает возможность получить приближенное решение некоторых типов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в квадратурах, содержащих коэффициенты заданного уравнения.

Многие задачи механики, физики и других областей естествознания сводятся к решению линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$py'' + qy' + hy = 0, \tag{1.1}$$

где $y(x)$ – искомая функция; x – независимая переменная; $p(x)$, $q(x)$, $h(x)$ – известные произвольные коэффициенты; здесь и далее штрихи над функциями обозначают соответствующую производную по координате x ; уравнение (1.1) будем называть заданным.

Линейное уравнение (1.1) не интегрируется в квадратурах. В то же время, существуют дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, зависящими от двух произвольных функций и их производных, которые имеют решения в квадратурах [1,3].

Сделаем попытку использовать эти уравнения и их решения для построения приближенного решения уравнения (1.1). При этом будем стремиться к преобразованию указанных уравнений из [1,3] к виду (1.1).

Рассмотрим конкретное уравнение (2.444а) из [1]

$$fy'' + (fg + f' + 1)y' + gy = 0, \tag{1.2}$$

имеющее решение следующего вида

$$y = e^{-F}\left[C_1 + C_2\int \frac{exp(F - \int g\,dx)}{f}\,dx\right],$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования; $f(x)$, $g(x)$ – произвольные коэффициенты;
$F = \displaystyle\int f^{-1}\,dx.$

Запишем уравнения (1.1) и (1.2) в виде

$$y'' + \frac{q}{p}y' + \frac{h}{p}y = 0, \tag{1.3}$$

$$y'' + \left(g + \frac{f'}{f} + \frac{1}{f}\right) y' + \frac{g}{f} y = 0. \tag{1.4}$$

Приравнивая коэффициенты, стоящие перед искомой функцией y в (1.3), (1.4), получим

$$\frac{g}{f} = \frac{h}{p}. \tag{1.5}$$

Из (1.5) определим функцию g

$$g = \frac{h}{p} f. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.4), получим

$$y'' + \left(\frac{h}{p} f + \frac{f'}{f} + \frac{1}{f}\right) y' + \frac{h}{p} y = 0. \tag{1.7}$$

Приравнивая коэффициенты при y', приходим к уравнению Риккати относительно функции f

$$\frac{h}{p} f + \frac{f'}{f} + \frac{1}{f} = \frac{q}{p},$$

и, следовательно, таким путем уравнение (1.7) нельзя привести к уравнению (1.3).

Поступим следующим образом: выразим составляющие члены коэффициента при y' в (1.7) через коэффициент qp^{-1}. Для этого примем, что

$$\frac{h}{p} f = \frac{q}{p}. \tag{1.8}$$

Определяя функцию f из (1.8) и подставляя ее в (1.7), получим

$$y'' + \left(\frac{q}{p} + \frac{q'}{q} - \frac{h'}{h} + \frac{h}{q}\right) y' + \frac{h}{p} y = 0. \tag{1.9}$$

Вынося за скобки в (1.9) величину qp^{-1} , получим

$$y'' + \frac{q}{p}(1 + \varepsilon_1) y' + \frac{h}{p} y = 0, \tag{1.10}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{p}{q}\left(\frac{q' + h}{q} - \frac{h'}{h}\right). \tag{1.11}$$

Анализируя уравнение (1.10), приходим к заключению, что если на конечном интервале изменения x или в окрестностях известных точек выполняется условие

$$|\varepsilon_1| \ll 1, \tag{1.12}$$

то коэффициенты при y' в уравнениях (1.3) и (1.10) становятся практически равными.

Таким образом, при выполнении условия (1.12) для отыскания решения уравнения (1.3) можно использовать решение уравнения (1.2).При этом взамен функций f и g следует подставить их значения (1.6) и (1.8), выраженные через коэффициенты уравнения (1.3). Полученное таким образом решение уравнения (1.3) будет приближенным.

Теперь запишем решение уравнения (1.10). Подставляя значения функций g (1.6) и f (1.8) в решение уравнения (1.2), получим точное решение уравнения (1.10)

$$\begin{gathered} y = exp\left(-\int \frac{h}{q}\,dx\right)\Big\{C_1+ \\ +C_2\int \frac{h}{q}\left[exp\int\left(\frac{h}{q}-\frac{q}{p}\right)dx\right]dx\Big\}. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Решение (1.13) для всех значений ε_1 является точным решением уравнения (1.10) и может быть использовано как приближенное решение уравнения (1.3) при выполнении условия (1.12).

Как видно из формулы (1.11), величина ε_1 зависит от соотношения коэффициентов $p, \quad q, \quad h$ и их производных на конечном интервале изменения x или в окрестностях известных точек.

В качестве конкретного примера рассмотрим гипергеометрическое уравнение Гаусса [1]. Коэффициенты $p, \quad q, \quad h$ этого уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} &p = x(x-1), \qquad q = (\alpha+\beta+1)x-\gamma, \\ &h = \alpha\beta. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Подставляя (1.14) в (1.11), получим

$$\varepsilon_1 = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)x(x-1)}{[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]^2}. \tag{1.15}$$

Анализ выражения (1.15) показывает, что в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ и на интервале $0 < x < 1$ для широкого диапазона параметров $\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$ неравенство (1.12) будет выполняться. При этом приближенное решение гипергеометрического уравнения Гаусса в окрестностях точек $x = 0, \quad x = 1$ и на интервале $0 < x < 1$ для широкого диапазона параметров $\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$ будет иметь вид (1.13). Очевидно, что приближенное решение будет тем точнее, чем меньше по абсолютной величине ε_1 . Так, для параметров $\alpha = -1$ или $\beta = -1$ приближенное решение перейдет в точное.

Отметим, что для получения уравнения вида (1.10), помимо равенства (1.8), можно использовать следующие равенства

$$\begin{aligned} &\frac{h}{p}f + \frac{f'}{f} = \frac{q}{p}, \quad \frac{h}{p}f + \frac{1}{f} = \frac{q}{p}, \\ &\frac{f'}{f} + \frac{1}{f} = \frac{q}{p}, \quad \frac{f'}{f} = \frac{q}{p}, \quad \frac{1}{f} = \frac{q}{p}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Определяя функцию f из равенства (1.16) и подставляя поочередно в (1.7), получим еще пять уравнений типа (1.10) и пять выражений для ε_1 , соответственно.

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \frac{p\int hp^{-1}\exp\left(\int qp^{-1}\,dx\right)dx + B_1}{q\exp\int qp^{-1}\,dx}, \\ &\varepsilon_{12} = \frac{p}{q}\left[\frac{q'}{q} - \frac{h'}{h} \mp \right. \\ &\qquad \left. \mp \frac{2pq^{-2}h(1-4pq^{-2}h)^{-0,5}}{1 \pm (1-4pq^{-2}h)^{0,5}}\left(\frac{h'}{h} + \frac{p'}{p} - \frac{2q'}{q}\right)\right], \\ &\varepsilon_{13} = \frac{h}{q}\left\{\exp\left(\int\frac{q}{p}\,dx\right)\left[B_1 - \int\exp\left(-\int\frac{q}{p}\,dx\right)dx\right]\right\}, \\ &\varepsilon_{14} = \frac{p}{q}\left[B_1\frac{h}{p}\exp\int\frac{q}{p}dx + B_1^{-1}\exp\left(-\int\frac{q}{p}dx\right)\right], \\ &\varepsilon_{15} = \frac{p}{q}\left(\frac{h-q'}{q} - \frac{p'}{p}\right). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Здесь второй индекс $i = 1, \cdots, 5$ у функции ε_{1i} обозначает номер равенства в (1.16), благодаря которому получена функция ε_{1i} ; B_1 – постоянная интегрирования.

Постоянная интегрирования B_1 , получающаяся при решении первого и третьего уравнений (1.16), может быть принята равной нулю, а для четвертого уравнения (1.16) — единице. Если необходимо построить приближенное решение уравнения (1.1) в окрестности известной точки x_1 , то B_1 может быть определена из условия $\varepsilon_{1i}(x_1) = 0$. .

Приведенные пять функций ε_{1i} (1.17) расширяют количество типов дифференциальных уравнений второго порядка, приближенное решение которых можно представить решением (1.13) при выполнении условия (1.12).

Отметим также, что из уравнения (1.4) кроме уравнения типа (1.10), можно получить уравнение типа

$$y'' + \frac{q}{p}y' + \frac{h}{p}(1+\varepsilon_2)y = 0, \tag{1.18}$$

где функция ε_2 зависит от коэффициентов заданного уравнения (1.1).

Для того чтобы получить уравнение типа (1.18), надо приравнять между собой коэффициенты, стоящие перед y' в (1.3), (1.4), и из полученного соотношения определить функцию g . Подставив g в коэффициент, стоящий перед y в (1.4), получим уравнение

$$y'' + \frac{q}{p}y' + \left(\frac{q}{pf} - \frac{f'}{f^2} - \frac{1}{f^2}\right)y = 0. \tag{1.19}$$

Приравнивая далее различные члены или группы членов, стоящие в круглых скобках уравнения (1.19), коэффициенту hp^{-1} , запишем пять уравнений относительно функции f

$$\begin{gathered} \frac{q}{pf} = \frac{h}{p}, \quad \frac{f'}{f^2} = -\frac{h}{p}, \quad \frac{1}{f^2} = -\frac{h}{p}, \\ \frac{q}{pf} - \frac{f'}{f^2} = \frac{h}{p}, \quad \frac{q}{pf} - \frac{1}{f^2} = \frac{h}{p}. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Определяя функцию f по каждому из уравнений (1.20) и подставляя ее поочередно в (1.19), получим пять уравнений типа (1.18). При этом функция ε_2 будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21} &= -\frac{p}{q}\left(\frac{q'+h}{q} - \frac{h'}{q}\right), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{p}{h}\left[\frac{q(B_2 + \int p^{-1}h dx)}{p} - \left(B_2 + \int \frac{h}{p}dx\right)^2\right], \\ \varepsilon_{23} &= \mp\frac{iq}{h^{0,5}p^{0,5}}\left[1 - \frac{0,5p}{q}\left(\frac{p'}{p} - \frac{h'}{h}\right)\right], \\ \varepsilon_{24} &= -\frac{p\left[B_2 + \int hp^{-1}\exp\left(\int p^{-1}q\,dx\right)dx\right]^2}{h\exp(2\int p^{-1}qdx)}, \\ \varepsilon_{25} &= \frac{p}{h}\left[\frac{h'}{h} - \frac{q'}{q}\pm\right. \\ &\left.\pm\frac{2pq^{-2}h(1-4pq^{-2}h)^{-0,5}}{1\pm(1-4pq^{-2}h)^{0,5}}\left(\frac{h'}{h} + \frac{p'}{p} - \frac{2q'}{q}\right)\right], \end{aligned} \tag{1.21}$$

где B_2 – постоянная интегрирования, полученная при интегрировании второго и четвертого уравнений (1.20) и определяемая также как и постоянная B_1 ; $i^2 = -1$.

Обобщая приведенную выше процедуру построения приближенного решения в квадратурах некоторых типов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, введем понятия "порождающего"и "опорного"уравнений.

Термин "порождающее"уравнение будем применять к дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами типа (1.10), (1.18). Порождающее уравнение должно иметь решение в квадратурах; кроме того, коэффициенты порождающего уравнения должны вырождаться в коэффициенты заданного уравнения на конечных интервалах изменения независимой переменной или в окрестностях известных точек.

Опорным уравнением будем называть уравнение типа (1.2), на основе которого можно построить порождающие уравнения. Очевидно, что существование опорных уравнений является необходимым условием построения порождающих уравнений, а значит, и получения приближенных решений заданного уравнения (1.1). Однако количество уравнений, которые могут быть использованы в качестве опорных, весьма невелико, по крайней мере в [1,3] приведены только четыре таких уравнения.

Как было показано выше, для приближенного решения уравнения (1.1) можно построить порождающие уравнения различных типов. Целесообразность применения того или иного типа порождающих уравнений определяется скоростью стремления к нулю функций типа $|\varepsilon_1|$ или $|\varepsilon_2|$.

Рассмотрим один частный случай из уравнений (1.10), (1.18). Если приравнять из порождающих уравнений (1.10), (1.18) абсолютные значения

$$|\varepsilon_1| = |\varepsilon_{21}|, \tag{1.22}$$

то придем к равенству

$$|h^{-1}| = |q^{-1}|. \tag{1.23}$$

Равенство (1.23) возможно лишь при условии

$$|h| = |q|.$$

В противном случае вместо (1.23) получим неравенство, зависящее от соотношения коэффициентов $|q|$, $|h|$, а это значит, что и зависимость между функциями $|\varepsilon_1|$ и $|\varepsilon_2|$ может существовать только в виде неравенства. Например, если на интервале $x \gg 1$ между коэффициентами уравнения (1.1) существуют неравенства вида $|q| \gg |p|, \quad |q| \gg |q'|, \quad |q| \gg |h| \gg |h'|$, , то $|\varepsilon_{21}| \ll |\varepsilon_1| \ll 1$ и поэтому предпочтительнее пользоваться на этом интервале для построения приближенного решения уравнения (1.1) порождающим уравнением (1.18) с коэффициентом ε_{21} (1.21).

Таким образом, для успешного построения приближенных решений уравнения (1.1) на конечных интервалах изменения x или в окрестностях каких-либо известных точек необходимо иметь как можно больше опорных уравнений, чтобы строить из них порождающие уравнения различных типов и видов.

2. Построение опорного уравнения с тремя произвольными коэффициентами и примеры его использования

Рассмотрим процедуру построения еще трех типов порождающих уравнений. Для этого запишем опорное уравнение, коэффициенты которого при искомой функции, ее первой и второй производных зависят от трех произвольных известных функций. Затем из этого уравнения будут построены три типа порождающих уравнений.

Запишем дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами в следующем виде

$$\left(\frac{d}{dx} + f_1\right)(f_3 y' + f_2 y) = 0, \tag{2.1}$$

где $f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x)$ – произвольные известные функции.
Решая уравнение (2.1), получим

$$\begin{aligned} y = \exp(-\int f_4\,dx)\Big[C_2 + \\ + C_1 \int f_3^{-1} \exp(\int f_5\,dx)dx\Big], \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $f_4 = f_2 f_3^{-1}, \quad f_5 = f_2 f_3^{-1} - f_1$.
Из уравнения (2.1) получим опорное уравнение

$$f_3 y'' + (f_3' + f_2 + f_1 f_3)y' + (f_2' + f_1 f_2)y = 0. \tag{2.3}$$

Отметим, что уравнение (2.3) при $f_3 = 1$ переходит в уравнение (2.77 а) из [1].

Перейдем к построению трех типов порождающих уравнений. Для этого, как и ранее, при выводе порождающих уравнений (1.10), (1.18) постараемся привести уравнение (2.3) к виду (1.1). Для построения порождающего уравнения первого типа примем

$$f_3 = p, \tag{2.4}$$

$$f_3' + f_2 + f_1 f_3 = q. \tag{2.5}$$

Определим функцию f_2 из (2.5) с учетом (2.4)

$$f_2 = q - p' - pf_1. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.4), (2.6) в (2.3), получим опорное уравнение

$$\begin{aligned} &py'' + qy' + [q' - p'' - (2p' - q)f_1 - \\ &-p(f_1' + f_1^2)]y = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

из которого можно получить порождающее уравнение первого типа

$$py'' + qy' + h(1 + \varepsilon_3)y = 0. \tag{2.8}$$

Вид функции ε_3 зависит от того какой член или группа членов, содержащих неизвестную функцию f_1 в (2.7), приравнивается коэффициенту h из (1.1).
Например, если приравнять в (2.7)

$$q' - p'' - (2p' - q)f_1 = h \tag{2.9}$$

и определить из (2.9)

$$f_1 = \frac{q' - p'' - h}{2p' - q}, \tag{2.10}$$

то функция ε_3 будет иметь вид

$$\varepsilon_3 = -ph^{-1}(f_1' + f_1^2). \tag{2.11}$$

Если подставить (2.10) с учетом конкретного вида коэффициентов (1.14) в (2.11), то порождающее уравнение (2.8) для гипергеометрического уравнения Гаусса примет вид

$$\begin{aligned} &x(x-1)y'' + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma]y' + \\ &+\alpha\beta\left\{1 - \frac{x(x-1)(\alpha-1)(\alpha-2)(\beta-1)(\beta-2)}{\alpha\beta[(3-\alpha-\beta)x + \gamma - 2]^2}\right\}y = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Некоторые возможности получения точного и приближенного решений для гипергеометрического уравнения Гаусса на интервале $0 \le x \le 1$ видны из порождающего уравнения (2.12).

При рассмотрении возможностей опорного уравнения (2.7) остановимся еще раз на коэффициенте при неизвестной функции y :

$$q' - p'' - (2p' - q)f_1 - p(f_1' + f_1^2). \tag{2.13}$$

Структура этого коэффициента позволяет получить точные решения для гипергеометрического уравнения Гаусса и уравнений Хейна, Ламе, Лапласа при наложении некоторых ограничений на постоянные параметры, входящие в указанные уравнения [5]. Приведем процедуру получения точного решения гипергеометрического уравнения Гаусса. Приравнивая коэффициент (2.13) коэффициенту из h из (1.1) и производя замену

$$f_1 = V^{-1}V', \tag{2.14}$$

получим уравнение для определения функции V

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)(\beta-1)V - [(3-\alpha-\beta)x + \gamma - 2]V' - \\ &-(x^2 - x)V'' = 0.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Если рассматривать параметр α (или β) как целое положительное число, то решением уравнения (2.15) будет полином

$$V = 1 + \sum_{k=1}^{m} A_k x^k, \tag{2.16}$$

где

$$A_k = \frac{A_{k-1}(k-\alpha)(k-\beta)}{k(k+1-\gamma)}, \quad A_0 = 1.$$

Количество членов m полинома (2.16) при заданном целом положительном α (или β) определяется уравнением

$$(m+1-\alpha)(m+1-\beta) = 0. \tag{2.17}$$

Общее решение (2.2) для гипергеометрического уравнения Гаусса, у которого параметр α (или β) целое положительное число, будет иметь вид

$$\begin{aligned}y = {}&|x|^{1-\gamma}|x-1|^{\gamma-\beta-\alpha}|V|(C_2 + \\ &+C_1\int |x|^{\gamma-2}|x-1|^{\beta+\alpha-\gamma-1}|V|^{-2}\,dx)\end{aligned} \tag{2.18}$$

Характер ограничений на параметры α (или β) и γ следует из структуры коэффициентов A_k (2.16), уравнения (2.17) и решения (2.18).

Построим второй тип порождающего уравнения. Для коэффициентов уравнения (2.3) примем

$$f_3 = p, \tag{2.19}$$

$$f_2' + f_1 f_2 = h. \tag{2.20}$$

Определим из уравнения (2.20) функцию f_1

$$f_1 = h f_2^{-1} - f_2^{-1} f_2'. \tag{2.21}$$

Подставляя (2.21) в (2.3) и учитывая (2.19), получим опорное уравнение

$$py'' + \left(p' + f_2 + \frac{ph}{f_2} - \frac{pf_2'}{f_2}\right) y' + hy = 0. \tag{2.22}$$

Приравнивая в коэффициенте при y' уравнения (2.22) член или группу членов, содержащих неизвестную функцию f_2, коэффициенту q (1.1), получим уравнения относительно f_2 . Определяя f_2 из этих уравнений и подставляя в (2.22), получим порождающее уравнение второго типа

$$py'' + q(1 + \varepsilon_4)y' + hy = 0. \tag{2.23}$$

Здесь структура функции ε_4 аналогична структуре функции ε_1 . Например, рассматривая три равенства

$$f_2 = q, \quad phf_2^{-1} = q, \quad p' - pf_2^{-1} f_2' = q$$

получим, что $\varepsilon_{41} = \varepsilon_{15}, \quad \varepsilon_{42} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_{43} = \varepsilon_{14}$, соответственно.

Отметим, что если определить функцию f_2 из уравнения (2.20) и подставить ее в (2.3), то с учетом (2.19) можно получить новое опорное уравнение. Коэффициент такого уравнения при y' будет зависеть от функции f_1 и иметь структуру, отличную от структуры аналогичного коэффициента уравнения (2.22).

Построим порождающее уравнение третьего типа. В уравнении (2.3) примем

$$f_2' + f_1 f_2 = h, \tag{2.24}$$

$$f_3' + f_2 + f_1 f_3 = q. \tag{2.25}$$

Решая уравнение (2.24) относительно функции f_2 , получим

$$f_2 = \exp(-\int f_1\, dx)[D_1 + \int h \exp(\int f_1\, dx) dx], \tag{2.26}$$

где D_1 – постоянная интегрирования. Решая уравнение (2.25) относительно функции f_3 и учитывая значение f_2 (2.26), получим

$$\begin{gathered} f_3 = \exp(-\int f_1\,dx)[D_2 - D_1 x + \\ + \int q\exp(\int f_1\,dx)dx - \int\int h\exp(\int f_1\,dx)dxdx], \end{gathered} \tag{2.27}$$

где D_2 – постоянная интегрирования.

Предположим, что

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad f_1 = -p^{-1}p', \tag{2.28}$$

тогда опорное уравнение (2.3) с учетом зависимостей (2.24), (2.25), (2.27), (2.28) преобразуется в порождающее уравнение третьего типа

$$p(1+\varepsilon_5)y'' + qy' + hy = 0, \tag{2.29}$$

где $\varepsilon_5 = \int \frac{q}{p}\,dx - \int\int \frac{h}{p}\,dxdx.$

Из (2.29) видно, что точное решение (2.2) уравнения (2.29) можно использовать как приближенное решение уравнения (1.1) на конечных интервалах изменения независимой переменной или в окрестностях известных точек, когда функция $|\varepsilon_5| \ll 1$ на тех же интервалах или в окрестностях тех же точек.

3. Построение опорного уравнения по выбранному решению. Обратная задача

Применим для построения опорного уравнения известный метод, когда по выбранному решению строится дифференциальное уравнение (т.е. решим обратную задачу).

Запишем дифференциальное уравнение

$$py'' + qy' + h_1 y = 0, \tag{3.1}$$

где $h_1(x)$ – пока неизвестная функция. Выберем частное решение уравнение (3.1) в виде

$$y = f\exp\int F\,dx, \tag{3.2}$$

где $f(x), \quad F(x)$ – также пока неизвестные функции.
Подставляя (3.2) в (3.1), получим

$$[p(f'' + 2f'F + fF' + fF^2) + q(f' + fF) + \\ +h_1 f] \exp \int F\, dx. = 0. \tag{3.3}$$

Из уравнения (3.3) определим вид коэффициента h_1 , доставляющего уравнению (3.1) тождественный ноль, при выбранном решении (3.2)

$$h_1 = -p\left(\frac{f''}{f} + \frac{2f'F}{f} + F' + F^2\right) - q\left(\frac{f'}{f} + F\right). \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.1), получим опорное уравнение

$$py'' + qy' - \left[p\left(\frac{f''}{f} + F^2\right) + \frac{qf'}{f} + \right. \\ \left. + pF\left(\frac{2f'}{f} + \frac{F'}{F} + \frac{q}{p}\right)\right] y = 0. \tag{3.5}$$

Упростим выражение в квадратных скобках уравнения (3.5). Для этого приравняем нулю выражение во вторых круглых скобках

$$\frac{2f'}{f} + \frac{F'}{F} + \frac{q}{p} = 0. \tag{3.6}$$

Решая уравнение (3.6) относительно функции f , получим

$$f = F^{-0,5} \exp(-0,5 \int p^{-1} q dx). \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в (3.5), получим

$$py'' + qy' + \left[\frac{0,5pF''}{F} - \frac{0,75p(F')^2}{F^2} - pF^2 + \right. \\ \left. + \frac{0,5(pq' - p'q + 0,5q^2}{p}\right] y = 0. \tag{3.8}$$

Предположим, что третий член в квадратных скобках уравнения (3.8) равен коэффициенту h (1.1)

$$-pF^2 = h. \tag{3.9}$$

Из (3.9) выразим неизвестную функцию F через известные коэффициенты $p, \quad h$

$$F = \pm i h_2^{0,5}, \tag{3.10}$$

где $i = \sqrt{-1}, \quad h_2 = p^{-1}h.$
Подставляя (3.10) в (3.8), делая приведение подобных членов и вынося за квадратные скобки коэффициент h , получим порождающее уравнение [6]

$$py'' + qy' + h(1+\varepsilon_6)y = 0, \tag{3.11}$$

где функция ε_6 имеет вид

$$\varepsilon_6 = \frac{0,25h_2''}{h_2^2} - \frac{0,3125(h_2')^2}{h_2^3} + + \frac{0,5(pq' - p'q + 0,5q^2)}{ph.} \tag{3.12}$$

Общее решение уравнения (3.11), с учетом (3.2), (3.7), (3.10), будет иметь вид

$$\begin{aligned} y = h_2^{-0,25} \exp(-0,5\int p^{-1}q\,dx)[c_1 \exp(i\int h_2^{0,5}dx) + \\ + c_2 \exp(-i\int h_2^{0,5}dx)]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Здесь $c_1, \quad c_2$ – произвольные постоянные.
Рассматривая порождающее уравнение (3.11), заметим, что имеются такие коэффициенты p, q, h, для которых функция $|\varepsilon_6| \ll 1$ на конечных интервалах изменения независимой переменной или в окрестностях известных точек. При этом

$$h(1+\varepsilon_6) \approx h, \tag{3.14}$$

что позволяет использовать точное решение (3.13) уравнения (3.11) как приближеное решение уравнения (1.1).

В качестве примера рассмотрим уравнение Бесселя [1]. Выражая $1 + \varepsilon_6$ через коэффициенты $p = x^2, \quad q = x, \quad h = x^2 - v^2$, получим

$$1 + \varepsilon_6 = 1 - \frac{1,5v^2}{(x^2-v^2)^2} - \frac{1,25v^4}{(x^2-v^2)^3} - \frac{0,25}{x^2-v^2}. \tag{3.15}$$

Из (3.15) видно, что, например, для $v = 0$ и $x \geq 5$ выражение $1 + \varepsilon_6$ стремится от величины $0,99$ к единице, что приводит к выполнению приближенного равенства (3.14). Таким образом, на интервале $x \geq 5$ для $v = 0$ точное решение (3.13) уравнения (3.11) можно использовать как приближенное решение уравнения Бесселя.

4. Построение порождающего уравнения с заданным количеством неопределенных постоянных

Выше, при иллюстрации предлагаемого метода, были получены несколько типов порождающих уравнений, у которых функции $\varepsilon_i \quad (i = 1, \cdots, 6)$ зависят от коэффициентов p, q, h, заданного уравнения (1.1). Заметим, что только в некоторых случаях функции ε_i имеют одну или две произвольные постоянные, которыми можно было бы распорядиться в целях выполнения условия $|\varepsilon_i| \ll 1$.

Обратимся к построению порождающего уравнения

$$y'' + h(1 + \varepsilon_7)y = 0, \tag{4.1}$$

в котором функция ε_7 будет содержать заданное количество неопределенных постоянных, необходимых для выполнения условия $|\varepsilon_7| \ll 1$ на интересующих нас интервалах изменения x или в окрестностях известных точек. Для этого в выбранном решении (3.2) зададим функцию f в виде

$$f = F^{-0,5} + \sum_{n=1}^{k} A_n F^{-0,5-n}, \tag{4.2}$$

где $A_n = (\pm i)^{-n} a_n$ – неизвестные постоянные.
Подставим (4.2) в (3.5), при $p = 1, \quad q = 0$ и зададим в получившемся уравнении функцию F в виде (3.10). Делая несложные преобразования, получим порождающее уравнение (4.1), где коэффициент ε_7 будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_7 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{k} h^{-0,5n} a_n} \Bigg\{ & \frac{0,25h''}{h^2} - \frac{0,3125(h')^2}{h^3} + \\ & + \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{0,5(0,5+n)h''}{h^{2+0,5n}} - \frac{0,25(0,5+n)(2,5+n)(h')^2}{h^{3+0,5n}} \right] a_n \pm \\ & \pm \frac{ih'}{h^{1,5}} \sum_{n=1}^{k} \frac{n a_n}{h^{0,5n}} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Подставляя (4.2) в(3.2) и учитывая (3.10), получим решение уравнения (4.1)

$$y_{1,2} = c_{1,2} \left(1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{(\pm i)^{2n} h^{0,5n}} \right) \frac{\exp(\pm i \int h^{0,5}\, dx)}{h^{0,25}}. \tag{4.4}$$

Таким образом, построено порождающее уравнение (4.1), имеющее точное решение (4.4). Функция ε_7 (4.3), входящая в порождающее уравнение (4.1), может содержать такое количество коэффициентов a_k , которое обеспечит выполнение неравенства $|\varepsilon_7| \ll 1$ на заданном конечном интервале изменения независимой переменной или в окрестностях известных точек. Это, в свою очередь, позволит использовать точное решение (4.4) порождающего уравнения (4.1) как приближенное решение заданного уравнения (1.1) для случая $p = 1, \quad q = 0$.

Отметим, что уравнение (1.1) соответствующей подстановкой переводится в приведенную или нормальную форму, по внешнему виду совпадающую с частным случаем уравнения (1.1) при $p = 1, \quad q = 0$ [1]. Поэтому в некоторых случаях уравнение (1.1) целесообразно переводить в приведенную или нормальную форму.

В заключение автор выражает глубокую признательность профессору В.Ф. Зайцеву за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

Список литературы

[1] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976, 576с.

[2] Зайцев В.Ф., Полянин А.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. М.: Издательская фирма "Физико-математическая литература", 1993, 462с.

[3] Зайцев В.Ф., Полянин А.Ф. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Издательство "Факториал", 1997, 304с.

[4] Манжаловский В.П. К интегрированию некоторых однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в специальных функциях. Харьков: Издательство ХГУ, 1959, 68с.

[5] Иванов В.К. К интегрированию в квадратурах некоторых обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами// Математика в вузе. Труды между-

народной научно- методической конференции, Псков, июнь 1997. С-Петербург, 1997, С.184-185.

[6] Иванов В.К. Метод приближенного решения в квадратурах некоторых линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами// Вторая международная конференция "Дифференциальные уравнения и их применения", 15-20 июня 1998, Тезисы докладов. С-Петербург: Издательство СПбГТУ, 1998, С.118