ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 1999
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

А. Ф. Андреев [1]

О ПРОБЛЕМАХ РАЗЛИЧЕНИЯ ДЛЯ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ $\mathbb{R}^2$-СИСТЕМЫ В ОСОБОЙ ТОЧКЕ

Рассмотрим квазиоднородную автономную систему дифференциальных уравнений на плоскости

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) + p(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) + q(x,y), \tag{0.1}$$

где P, Q — формы от x и y степени $m \geq 1$, $P^2(x,y) + Q^2(x,y) \not\equiv 0$, $p, q \in C(D)$, $D = \{(x,y) : r = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \leq +\infty\}$ — область единственности для траекторий системы (0.1), $p(x,y), q(x,y) = o(r^m)$ при $r \to 0$. При этих условиях $O = (0,0)$ — точка покоя системы (0.1). Будем считать ее единственной точкой покоя системы (0.1) в области D. Пусть требуется выяснить поведение траекторий системы (0.1) в круге D при достаточно малом $\delta > 0$. Обычно это делается следующим образом [4, гл. 2].

Переходя в системе (0.1) к полярным координатам r, φ по формулам $x = r\, cos\varphi\,, y = r\,\sin\varphi$ и к новому (если $m > 1$) времени $\tau = \int\limits_0^t r^{m-1}(s)\,ds\,,$ преобразуют ее к виду

$$\frac{dr}{d\tau} = r\left(G(\varphi) + g(r,\varphi)\right), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = r\left(F(\varphi) + f(r,\varphi)\right), \tag{0.2}$$

[1] **Санкт-Петербургский государственный университет:** 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2. СПбГУ. Математико-механический факультет. Кафедра дифференциальных уравнений.

где $F(\varphi)$, $G(\varphi)$ — формы степени $(m+1)$ от $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $F^2(\varphi)+G^2(\varphi)\not\equiv 0$, $f, g \in C(D)$, $f(0,\varphi) \equiv g(0,\varphi) \equiv 0$. Исключая из системы (0.2) время τ, получают явное дифференциальное уравнение траекторий системы (0.1) в области D в виде

$$(F(\varphi) + f(r,\varphi))\,dr = r(G(\varphi) + g(r,\varphi))\,d\varphi\,. \tag{0.3}$$

Если r, φ трактовать как декартовы координаты на плоскости $\mathbb{R}^2_{r,\varphi}$, то $f, g \in C(\Pi)$ и полоса $\Pi\,:\,0 \le r < \delta$ будет областью единственности для траекторий системы (0.2); для уравнения (0.3) областью существования и единственности будет полоса Π без точек вида $(0,\varphi_0)$, $F(\varphi_0)=0$, которые являются для него особыми. На плоскости x, y каждое направление в точке O $\varphi=\varphi_0$, $F(\varphi_0)=0$, обычно называют *исключительным* (или *характеристическим*) направлением системы (0.1) в точке O : *обыкновенным*, если $G(\varphi_0)\ne 0$, *особым*, если $G(\varphi_0)=0$.

Если $F(\varphi)$ имеет вещественные нули, то далее, $\forall\varphi_0$ $F(\varphi_0)=0$, изучают вопрос о существовании у системы (0.1) TO-кривых — полутраекторий $r=r(\tau)$, $\varphi=\varphi(\tau)$, $\tau\ge 0(\tau\le 0)$ системы (0.2), обладающих свойством

$$r(\tau)\to 0, \quad \varphi(\tau)\to\varphi_0 \;\text{ при }\; \tau\to+\infty\,(-\infty)\,, \tag{0.4}$$

и о структуре множества таких кривых. При этом для некоторых φ_0 возникают проблемы различения двух или нескольких возможностей. Достаточные условия реализации каждой из этих возможностей в литературе часто имеются, но формулируются они в различных, иногда трудно проверяемых формах. Цель настоящей заметки сформулировать такие условия в единообразной общей форме, а именно в терминах порядка гладкости и порядка малости при $r\to 0$ функций p, q, что позволит очертить классы систем с одинаковой структурой TO-кривых, соответствующих некоторым типам φ_0, а иногда и всех TO-кривых. Устно, в рамках лекционных курсов, эти условия (за исключением условий, доставляемых предложением 3.1 и предложением 3.3 для случая $k\le 2$) опубликованы мною два-три десятка лет тому назад.

Итак, ниже мы будем налагать на функции p, q из (0.1) определенные условия гладкости и малости при $r\to 0$. Отметим свойства функций f, g из (0.2), (0.3), наследуемые ими от функций p, q.

Л е м м а 0.1. 1) *Если* $p, q \in C^1(D)$ *и* $p'_x(x,y),\ldots,\; q'_y(x,y) = O(\alpha(r)\,r^{m-1})$, $\alpha(r)=o\,(1)$ *при* $r\to 0$, *то* f'_φ, $g'_\varphi \in C(\Pi)$ *и имеют, как и* f, g, *порядок малости* $O(\alpha(r))$ *при* $r\to 0$ *равномерно относительно* $\varphi\in\mathbb{R}$.

2) *Если* $p, q \in C^n(D), n \geq m$, *то* $\dfrac{\partial^n f}{\partial \varphi^n}, \ \dfrac{\partial^n g}{\partial \varphi^n} \in C(\Pi)$ *и* $\forall k = \overline{1, n}$ $\dfrac{\partial^k f}{\partial \varphi^k}(0, \varphi) \equiv \dfrac{\partial^k g}{\partial \varphi^k}(0, \varphi) \equiv 0.$

3) *Если* $p, q \in C^{m+l}(D)$, $l \geq 1$, *то* $f, g \in C^l(\Pi)$ *и* $\forall\, k = \overline{1, l}$ *представимы в форме*

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) &= \sum_{i=1}^{k} r^i F_i(\varphi) + r^k f_k(r, \varphi) \\ g(r, \varphi) &= \sum_{i=1}^{k} r^i G_i(\varphi) + r^k g_k(r, \varphi), \end{aligned} \tag{0.5$_k$}$$

где F_i, G_i — *формы степени* $m + i + 1$ *от* $\cos \varphi$ *и* $\sin \varphi$, $i = \overline{1, k}$, $f_k, g_k \in C^{l-k}(\Pi)$, $f_k(0, \varphi) \equiv g_k(0, \varphi) \equiv 0$.

Функции f, g определяются формулами

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) &= r^{-m}(\cos \varphi \, q(ru) - \sin \varphi \, p(ru)), \quad f(0, \varphi) \equiv 0\,, \\ g(r, \varphi) &= r^{-m}(\cos \varphi \, p(ru) + \sin \varphi \, q(ru)), \quad g(0, \varphi) \equiv 0\,, \end{aligned} \tag{0.6}$$

где $ru = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Утверждения 1) и 2) леммы получаются из формул (0.6) непосредственной проверкой. Далее, если $p, q \in C^{m+l}(D)$, то

$$\begin{aligned} p(x, y) &= P_1(x, y) + \cdots + P_l(x, y) + p_l(x, y), \\ q(x, y) &= Q_1(x, y) + \cdots + Q_l(x, y) + q_l(x, y), \end{aligned} \tag{0.7}$$

где $\forall k = \overline{1, l}$ $\ P_k, Q_k$ — формы степени $m + k$ от x и y, $p_l, q_l \in C^{m+l}(D)$, $p_l(x, y), q_l(x, y) = o(r^{m+l})$ при $r \to 0$. Из (0.6) и (0.7) следует, что в области $\Pi_0 : 0 < r < \delta$ $\ f, g$ являются функциями класса C^{m+l} и $\forall k = \overline{1, l}$ представимы в виде (0.5$_k$), где $f_k, g_k \in C^{m+l}(\Pi_0)$. При этом f_k, g_k, очевидно, определяются формулами вида (0.6) с заменой в них p, q на p_k, q_k из формул (0.7), взятых при $l = k$, и r^{-m} на $r^{-(m+k)}$. Поэтому при переходе от Π_0 к Π $\ \forall k = \overline{0, l}$ порядок гладкости функций f_k, g_k (где $f_0 = f$, $g_0 = g$) снижается на $m + k$ единиц и становится равным $l - k$.

1. Проблема различения для исключительного направления 2-го типа

Пусть φ_0 — нуль $F(\varphi)$ кратности $k \geq 1$, $G(\varphi_0) \neq 0$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$ такие, что сектор $n : 0 < r \leq \Delta$, $|\varphi - \varphi_0| \leq \varepsilon$ будет для системы (0.1) нормальным сектором (нормальной областью) Фроммера [4, с. 102]. Уравнение (0.3) в нем удобно записать в виде

$$r \frac{d\varphi}{dr} = \Phi(\varphi) + \psi(r, \varphi) \equiv \Psi(r, \varphi), \tag{1.1}$$

где $\Phi(\varphi) = F(\varphi)G^{-1}(\varphi) = a(\varphi - \varphi_0)^k + a_1(\varphi - \varphi_0)^{k+1} + \ldots,\ a \neq 0$, и ряд сходится при $|\varphi - \varphi_0| \leq \varepsilon$,

$$\psi(r,\varphi) = \frac{G(\varphi)f(r,\varphi) - F(\varphi)g(r,\varphi)}{G(\varphi)(G(\varphi) + g(r,\varphi))} \tag{1.2}$$

так что $\psi \in C(\bar{N})$, $\psi(0,\varphi) \equiv 0$, $|\varphi - \varphi_0| \leq \varepsilon$.

Если k нечетное и $a < 0$, то сектор N является нормальным сектором 2-го типа. Будем в этом случае и направление $\varphi = \varphi_0$ системы (0. 1) называть направлением 2-го типа. Для него возникает первая проблема различения — проблема различения следующих возможностей [4, с. 108]: а) существует единственная O-кривая системы (0. 1), примыкающая к точке O по направлению $\varphi = \varphi_0$, т. е. $\exists!$ (при фиксированном r^0) решение уравнения (1. 1)

$$\varphi = \varphi(r), \quad 0 < r \leq r^0, \quad \varphi(r) \to \varphi_0 \ \text{ при } \ r \to 0 \tag{1.3}$$

или б) существует бесконечно много (замкнутый пучок) таких кривых.

Каждое из следующих трех условий достаточно для реализации случая а).

Условие Пеано [6]. $\forall\forall\,(r,\varphi_1),(r,\varphi_2) \in N$, $\varphi_2 > \varphi_1$, *выполняется неравенство*

$$\Psi(r,\varphi_2) \leq \Psi(r,\varphi_1)\,. \tag{1.4}$$

Условие Лонна [4, с. 115]. $\forall\forall\,(r,\varphi_1),(r,\varphi_2) \in N$, $\varphi_2 > \varphi_1$, *выполняется неравенство*

$$\Psi(r,\varphi_2) - \Psi(r,\varphi_1) \leq \lambda(r)(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{1.5}$$

где $\lambda \in C[0,\Delta]$, $\lambda(r) \geq 0$, $\displaystyle\int_0^{\Delta} \lambda(r)\, r^{-1}\, dr \;=\; M < +\infty\,.$

Условие Андреева [1, 2]. *Существуют* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\Delta_0 \in (0,\Delta]$ *такие, что* $\forall\forall\,(r,\varphi_1),(r,\varphi_2) \in N_0$, $\varphi_2 > \varphi_1$,

$$N_0 = \left\{ (r,\varphi) \in N \,\middle|\, 0 < r \leq \Delta_0, |\varphi - \varphi_0| \leq \varepsilon_0 \omega^{\frac{1}{k}}(r) \right\},$$

выполняется неравенство (1.5), *где* $\omega \in C^1(0,\Delta]$, $\omega(+0) = 0$, $\omega'(r) > 0$ *в* $(0,\Delta]$, $\psi(r,\varphi)\omega^{-1}(r) \rightrightarrows 0$ при $r \to 0$, $|\varphi - \varphi_0| \le \varepsilon$, $\lambda \in C(0,\Delta_0]$,

$$\int\limits_r^{\Delta_0} \left(\frac{\lambda(\rho)}{\rho} - \frac{\omega'(\rho)}{k\omega(\rho)} \right) d\rho \le M,\ M \in \mathbb{R} \text{— } \textit{постоянная.} \tag{1.6}$$

Отметим, что первое из этих условий следует из второго при $\lambda(r) \equiv 0$, а второе — из третьего, ибо для $\psi(r,\varphi)$ из (1.1) некоторая характеристика малости $\omega(r)$, обладающая указанными в условии Андреева свойствами, существует всегда.

Опираясь на лемму 0.1, укажем порядок гладкости p, q, а иногда еще и порядок их малости при $r \to 0$, достаточные для выполнения хотя бы одного из этих трех условий единственности O-кривой системы (0.1) в N_2-секторе.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть* $\varphi = \varphi_0$ — *простое обыкновенное исключительное направление системы* (0.1) *в точке* O 2*-го типа* (*так, что в уравнении* (1.1) $k = 1, a < 0$). *Если* $p, q \in C^m(D)$, *то по направлению* $\varphi = \varphi_0$ *к точке* O *примыкает единственная* O*-кривая системы* (0.1).

При $k = 1$ для $\Phi(\varphi)$ (см. (1.1)) имеем: $\Phi'(\varphi_0) = a$. Если $p, q \in C^m(D)$, то для $\psi(r,\varphi)$ из (1.2) и (0.6) с учетом утверждения 2) леммы (0.1) следует: $\psi'_\varphi \in C(\bar{N})$, $\psi'_\varphi(0,\varphi) \equiv 0$. То и другое вместе дают: $\Psi'_\varphi \in C(\bar{N})$, $\Psi'_\varphi(0,\varphi) = a$. Но $a < 0$, поэтому в секторе с достаточно малыми ε и δ $\Psi'_\varphi(r,\varphi) < 0$, т. е. выполняется условие Пеано.

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Пусть* $\varphi = \varphi_0$ — *обыкновенное исключительное направление системы* (0.1) *в точке* O 2*-го типа* (*так, что в уравнении* (1.1) $k \ge 1$ *нечетное,* $a < 0$). *Если* $p, q \in C^{m+1}(D)$, *то по направлению* $\varphi = \varphi_0$ *к точке* O *примыкает единственная* O*-кривая системы* (0.1).

Рассмотрим правую часть $\Psi(r,\varphi)$ уравнения (1.1). При k нечетном и $a < 0$ $\Phi'(\varphi) \le 0$ при $|\varphi - \varphi_0| \le \varepsilon$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Если $p, q \in C^{m+1}(D)$, то как следует из (0.7) при $l = 1$, $p'_x(x,y), \ldots, q'_y(x,y) = O(r^m)$ при $r \to 0$, а потому, согласно утверждению 1) леммы 0.1, $f, g, f'_\varphi, g'_\varphi = O(r)$ при $r \to 0$, $|\varphi| < +\infty$. Но тогда, как следует из (1.2), $\psi, \psi'_\varphi = O(r)$ при $r \to 0$, $|\varphi - \varphi_0| \le \varepsilon$. Из этих свойств Φ и ψ следует: в секторе N с достаточно малыми ε и Δ

$$\Psi'_\varphi(r,\varphi) \le \psi'_\varphi(r,\varphi) \le Lr, \quad L > 0 \text{ — постоянная,}$$

т. е. в N для (1.1) выполняется условие Лонна при $\lambda(r) = Lr$.

П р е д л о ж е н и е 1.3. *Пусть $\varphi = \varphi_0$ — обыкновенное исключительное направление системы* (0.1) *в точке O 2-го типа* (*так, что в* (1.1) $k \geq 1$ *нечетное,* $a < 0$). *Если 1)* $p, q \in C^1(D)$, $p'_x(x,y), \ldots, q'_y(x,y) = o(r^{m-1})$ *при* $r \to 0$, *2)* $p(x,y), q(x,y) = o(r^{m+\sigma})$ *при* $r \to 0$, $\sigma > 0$, *то по направлению* $\varphi = \varphi_0$ *к точке O примыкает единственная O-кривая системы* (0.1).

Покажем, что при этих условиях для уравнения (1.1) в секторе N с достаточно малыми ε и Δ выполняется условие Андреева единственности O-кривой. Действительно, при условиях 1) и 2) из (0.6) и из утверждения 1) леммы 0.1 следует: $f(r,\varphi), g(r,\varphi) = o(r^\sigma)$, $f'_\varphi(r,\varphi), g'_(r,\varphi) = o\,(1)$ при $r \to 0$, $|\varphi| < +\infty$, а из (1.2) следует: $\psi(r,\varphi) = o(r^\sigma)$, $\psi'_\varphi(r,\varphi) = o\,(1)$ при $r \to 0$, $|\varphi - \varphi_0| \leq \varepsilon$. Следовательно, характеристикой малости для $\psi(r,\varphi)$ в любом N может служить функция $\omega(r) = r^\sigma$, а коэффициентом одностороннего условия Липшица (1.5) для $\psi(r,\varphi)$ и $\Psi(r,\varphi)$ в N с достаточно малыми ε и Δ — функция $\lambda(r) = o\,(1)$ при $r \to 0$. Эти функции, очевидно, удовлетворяют условию (1.6) при достаточно малом Δ_0.

Условий общего вида неединственности O-кривой системы (1.1), примыкающей к точке O по исключительному направлению 2-го типа, в литературе нет. Пример неединственности для особого направления 2-го типа приведен в [4, с. 117]. Приведем такой пример для случая обыкновенного исключительного направления.

П р и м е р 1.1. Рассмотрим систему вида (0.1)

$$\dot{x} = x^2 + y^2 + p(x,y), \quad \dot{y} = xy + q(x,y), \tag{1.7}$$

где $p(x,y) - xy\xi(x,y)\eta(x,y)$, $q(x,y) = x^2\xi(x,y)\eta(x,y)$, $\xi(x,y) = x^2 + 2y^2$, $\eta(x,y) = \dfrac{1}{r}\left(1 + \sin\frac{\lambda(y-r^2)}{r^2}\right)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\lambda \geq 0$ — параметр, $p(0,0) = q(0,0) = 0$. Для нее $m = 2$, $p, q \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $p(x,y)$, $q(x,y) = O(r^3)$ при $r \to 0$, O — изолированная точка покоя. В координатах r, φ, $\tau = \displaystyle\int\limits_0^t r(s)\,ds$ система (1.7) принимает вид

$$\frac{dr}{d\tau} = rG(\varphi), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = F(\varphi) + rG(\varphi)(1 + \sin\theta(r,\varphi))\,, \tag{1.8}$$

где $F(\varphi) = -\sin^3\varphi$, $G(\varphi) = \cos\varphi(1 + \sin^2\varphi)$, $\theta(r,\varphi) = \dfrac{\lambda(\sin\varphi - r)}{r}$.

Для нее $\varphi_0 = 0$ — нуль $F(\varphi)$ кратности $k = 3$,

$$a = \frac{1}{3!}F^{(3)}(0)G^{-1}(0) = -1 < 0$$

так, что $\varphi = 0$ — обыкновенное исключительное направление 2-го типа, и его можно заключить в нормальный сектор 2-го типа $N\,:\ 0 < r \le \Delta$, $|\varphi| \le \varepsilon$, $\ \varepsilon, \Delta > 0$. Траектории системы (1. 7) в этом секторе описываются уравнением вида (1. 1)

$$r\frac{d\varphi}{dr} = \Phi(\varphi) + r\left(1 + \sin\frac{\lambda(\sin\varphi - r)}{r}\right) \equiv \Psi(r,\varphi)\,, \qquad (1.\,9)$$

где $\Phi(\varphi) = F(\varphi)G^{-1}(\varphi) = -\varphi^3 + a_1\varphi^4 + \ldots,\quad |\varphi| \le \varepsilon\,.$

Для направления $\varphi = 0$ возникает первая проблема различения — проблема единственности у уравнения (1. 9) решения

$$\varphi = \varphi(r), \quad r \in (0,\Delta], \quad \varphi(r) \to 0 \text{ при } r \to 0\,. \qquad (1.\,10)$$

Достаточные условия единственности O-кривой системы (0. 1), примыкающей к точке O по исключительному направлению 2-го типа, доставляемые предложениями 1. 1 и 1. 2 для системы (1. 7) далеки от выполнения. Условия предложения 1. 3 близки к выполнению, но все же не выполняются: они требуют от $p'_x, \ldots, q'_y$ малости порядка $o(r)$ при $r \to 0$, а для системы (1. 7) эти производные имеют порядок малости лишь $O(r)$. Поэтому единственность O-кривой вида (1. 10) этими предложениями не гарантируется.

Покажем, что для системы (1. 7) при любом $\lambda \in [0,1]$ существует единственная O-кривая вида (1. 10), а при любом $\lambda > 1$ существует бесконечно много таких кривых.

Сначала покажем, что $\forall\,\lambda \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ для уравнения (1. 9) существует единственное решение вида (1. 10). Действительно, для функции $\Psi(r,\varphi)$ из (1. 9) $\Psi'_\varphi(r,\varphi) \le \lambda$ в N, если ε достаточно мало. Поэтому при $\lambda = 0$ для (1. 9) в N выполняются условия признака единственности Пеано, а $\forall\lambda \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ — условия признака единственности Андреева, ибо характеристикой малости при $r \to 0$ функции $\psi(r,\varphi)$ из (1. 9) может служить функция $\omega(r) = r^\sigma$, $3\lambda < \sigma < 1$, а для нее и $\lambda(r) \equiv \lambda < \dfrac{1}{3}$ выполняется условие (1. 6).

Покажем теперь, что для любого $\lambda > 1$ уравнение (1. 9) имеет бесконечно много решений вида (1. 10). Для этого выделим в секторе N подсектор

$$N'\,:\ 0 < r \le \Delta',\ |\varphi - r| \le r^\sigma,\ 1 < \sigma < \lambda\,.$$

Его боковые границы $\varphi = r \pm r^\sigma$, $0 < r \le \Delta'$, бесконтактны для уравнения (1.9), если Δ' достаточно мало, и интегральные кривые уравнения (1.9) с убыванием r входят через них внутрь N', ибо

$$\Psi(r, r \pm r^\sigma) - r(r \pm r^\sigma)' = \pm(\lambda - \sigma) r^\sigma (1 + o\,(1)),$$

$o\,(1) \to 0$ при $r \to 0$. Из этого следует, что любое решение $\varphi(r)$ уравнения (1.9), начинающееся в точке $(r^0, \varphi(r^0)) \in \partial N'$, $r^0 > 0$, есть решение вида (1.10). Это дает нам пример неединственности O-кривой, примыкающей к точке O по обыкновенному исключительному направлению 2-го типа.

Покажем, наконец, что $\forall\,\lambda \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ для уравнения (1.9) существует единственное решение вида (1.10). Методом, развитым в [3, § 2.4], легко показать, что $\forall\,\lambda \ge 0$, $\lambda \ne \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \ge 0$ — целое, для каждого решения уравнения (1.9) вида (1.10) существует определенный относительно r порядок малости $\nu = \lim\limits_{r \to 0} \ln|\varphi(r)| \ln^{-1} r = 1$ так, что это решение представимо в виде $\varphi(r) = u(r) r$, $0 < r \le \Delta$, где

$$\forall \sigma > 0 \quad r^\sigma < |u(r)| < r^{-\sigma} \text{ при малых } r > 0. \tag{1.11}$$

Произведя в уравнении (1.9) замену

$$\varphi = ur\,, \tag{1.12}$$

снова получим уравнение вида (1.1)

$$r\frac{du}{dr} = \Phi_1(u) + \psi_1(r,u) \equiv \Psi_1(r,u)\,, \tag{1.13}$$

где $\Phi_1(u) = \sin(\lambda(u-1)) - (u-1)$, $\psi_1(r,u)$ — целая аналитическая функция от u и ru, представимая в виде

$$\psi_1(r,u) = -u\left(1 + \frac{1}{6}\lambda\cos(\lambda(u-1))\right)(ru)^2(1 + o\,(1)),$$

$o\,(1) \to 0$ при $ru \to 0$. Это уравнение мы должны рассматривать в области $U : o < r \le \Delta$, $r|u| \le \varepsilon$.

Покажем, что $\forall\,\lambda \in [0,1]$ для уравнения (1.13) существует единственное решение $u(r), 0 < r \le \Delta$ вида (1.11). Легко доказать (например, по аналогии с [3, § 2.7]), что для каждого решения $u(r)$, $0 < r \le \Delta$, уравнения (1.13) при $r \to 0$ существует $\lim u(r) = u_0 \in [-\infty, +\infty]$, причем, если $|u_0| < +\infty$, то $\Phi_1(u_0) = 0$. Но при малых r и больших $|u|$ уравнение (1.13) представимо в виде

$$ru' = -u(1 + o\,(1)),\ o\,(1) \to 0 \ \text{ при } r \to 0, |u| \to +\infty,$$

и, очевидно, не имеет решений вида (1.11). Единственным же конечным нулем функции $\Phi_1(u)$ при $\lambda \in [0,1]$ является число $u_0 = 1$. При $\lambda \in [0,1)$ его кратность $k = 1$ и $\Phi_1'(1) = \lambda - 1 < 0$, а при $\lambda = 1$ кратность $k = 3$ и $\frac{1}{3!}\Phi_1^3(1) = -1 < 0$. Следовательно, область $N' : 0 < r \le \Delta'$, $|u-1| \le \varepsilon'$ при достаточно малых $\varepsilon' > 0$ и $\Delta' > 0$ будет для уравнения (1.13) нормальной областью Фроммера 2-го типа, причем в N' для него $\psi_{1u}'(r,u) = O(r)$ при $r \to 0$, а потому при любом $\lambda \in [0,1)$ выполняется условие единственности O-кривой Пеано, а $\forall \lambda \in [0,1]$ — условие единственности Лонна.

Итак, для уравнения (1.13) $\forall \lambda \in [0,1]$ существует единственное решение $u(r)$, $0 < r \le \Delta$ вида (1.11), и оно представимо в виде $u(r) = 1 + o(1)$, $o(1) \to 0$ при $r \to 0$. Следовательно, для уравнения (1.9) $\forall \lambda \in [0,1)$ существует единственное решение $\varphi(r)$ вида (1.10), и оно представимо в виде $\varphi(r) = r(1 + o(1))$, $o(1) \to 0$ при $r \to 0$.

Возвратимся к случаю $\lambda > 1$. В этом случае функция $\Phi_1(u)$ из (1.13), кроме нуля $u_0 = 1$, имеет на оси u еще два нуля: $u_{1,2} = = 1 \pm v_0$, $v_0 \in \left(0, \frac{\pi}{\lambda}\right)$. При этом $\forall\, i = 1,2$ $\Phi_{1u}'(u_i) < 0$ так, что для (1.13) $u = u_i$ — простое направление 2-го типа, и для него в соответствующей нормальной области $N^i : 0 < r \le \Delta_i$, $|u - u_i| \le \varepsilon_i$ с достаточно малыми ε_i и Δ_i выполняется условие единственности O-кривой Пеано (ибо $\psi_{1u}'(r,u) = O(r)$ при $r \to 0$). Поэтому при $\lambda > 1$, $\forall\, i = 1,2$, для уравнения (1.13) существует единственное решение $u(r) = u_i + o(1)$, $0 < r \le \Delta, o(1) \to 0$ при $r \to 0$. Этим решениям соответствуют в силу (1.12) решения уравнения (1.9) $\varphi_i(r) = (u_i + o(1))r$, $i = 1,2$, которые служат для него верхним и нижним решениями вида (1.10). Отметим, что при $\lambda = \frac{\pi}{2} + +2n\pi$, $n \ge 0$ — целое, $v_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $\varphi_1(r) \equiv 0$ (относительно r его порядок малости $\nu = +\infty$) $\varphi_2(r) = (2 + o(1))r$, $o(1) \to 0$ при $r \to 0$.

2. Проблема различения для обыкновенного исключительного направления 3-го типа

Пусть φ_0 — нуль $F(\varphi)$ четной кратности $k \ge 2$, $G(\varphi_0) \ne 0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ сектор $N : 0 < r \le \Delta$, $|\varphi - \varphi_0| \le \varepsilon$ будет для системы (0.1) нормальным сектором (нормальной областью) 3-го типа [4, с. 103]. К этому же типу будем относить в этом случае и направление $\varphi = \varphi_0$. Для него возникает 2-ая проблема различения [4, с. 117]: по направлению $\varphi = \varphi_0$ к точке O либо а) примыкает бесконечно много (полуоткрытый пучок) O-кривых системы (0.1) (для φ_0 существует бесконечно много различных решений вида (1.3) уравнения (0.3)), либо б) не примыкает ни одной O-кривой. Ее решает следующая теорема.

Т е о р е м а Л о н н а [4, с. 120]. *Пусть в уравнении* (1.1) $a > 0$ *(что не ограничивает общности),* $k\,(\geq 2)$ *четное; пусть*

$$b_0 = k^{-1}(ak(k-1))^{-\frac{1}{k-1}},\ \Lambda(r) = |\ln r|^{-\frac{k}{k-1}}.$$

1) *Если в* $N\,\psi(r,\varphi) \leq b\Lambda(r)$, $0 < b < b_0$, *то по направлению* $\varphi = \varphi_0$ *к точке* O *примыкает бесконечно много* O-*кривых системы* (0.1).

2) *Если в* $N\quad \psi(r,\varphi) \geq b\Lambda(r)$, $b > b_0$, *то по направлению* $\varphi = \varphi_0$ *к точке* O *не примыкает ни одной* O-*кривой системы* (0.1).

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Если в системе* (0.1) $p(x,y)$, $q(x,y) = o\,(r^m \ln^{-2} r)$ *при* $r \to 0$, *то для любого обыкновенного исключительного направления 3-го типа система* (0.1) *имеет бесконечно много* O-*кривых вида* (1.3).

При этом условии, как следует из (0.6) и (1.2), $\forall k \geq 2\ \psi(r,\varphi) = o\,(\Lambda(r))$ при $r \to 0$, $|\varphi - \varphi_0| \leq \varepsilon$, а потому $\forall b > 0\ |\psi(r,\varphi)| \leq b\Lambda(r)$ в N, если Δ достаточно мало, т. е. выполняется условие утверждения 1) теоремы Лонна или его очевидного аналога для случая $a < 0$.

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Пусть* $\varphi = \varphi_0$ *— обыкновенное исключительное направление системы* (0.1) *в точке* O 3-*го типа (так, что в уравнении* (1.1) $k(\geq 2)$ *— четное,* $a \neq 0$*). Если* $p, q \in C^{m+1}(D)$, *то система* (0.1) *имеет бесконечно много* O-*кривых, примыкающих к точке* O *по направлению* $\varphi = \varphi_0$.

При этом условии, как следует из (0.7) при $l = 1$, $p(x,y)$, $q(x,y) = O(r^{m+1})$ при $r \to 0$, т. е. выполняется условие предложения 2.1.

П р е д л о ж е н и е 2.3. А. *Пусть в системе* (0.1) $P^2(x,y) + Q^2(x,y) \neq 0$ *при* $(x,y) \neq (0,0)$, *и она имеет в точке* O *конечное число* (≥ 2) *исключительных направлений.* Б. *Пусть для нее выполняется одно из следующих трех условий:* 1) *все ее исключительные направления в точке* O 2-*го типа — простые, исключительные направления* 3-*го типа отсутствуют,* $p, q \in C^m(D)$; 2) *все ее исключительные направления* 2-*го типа — простые,* $p, q \in C^m(D)$, $p(x,y)$, $q(x,y) = o\,(r^m \ln^{-2} r)$ *при* $r \to 0$; 3) $p, q \in C^{m+1}(D)$.

Тогда 1) *любое исключительное направление системы* (0.1) *в точке* O *можно заключить в* N-*сектор;* 2) *в каждом из* N_2- *и* N_3-*секторов для системы* (0.1) *имеет место расположение траекторий типа а), т. е.*

того же типа, что и для соответствующей однородной системы $(0.\,1_o)$.

Из условия А следует: $F^2(\varphi)+G^2(\varphi)\neq 0\ \forall\varphi$. Поэтому все исключительные направления системы $(0.\,1)$ в точке O — обыкновенные. К тому же их конечное число. Следовательно, каждое из них можно заключить в N-сектор, т. е. утверждение 1) справедливо. Утверждение 2) при условии 1) пункта Б вытекает из предложения 1. 1, при условии 2) — из предложений 1. 1 и 2. 1, при условии 3) — из предложений 1. 2 и 2. 2.

Если для системы $(0.\,1)$ условие А предложения 2. 3 выполняется, а условие Б не выполняется, то утверждение 2) этого предложения может не выполняться. Об этом свидетельствуют, в частности, известные примеры О. Перрона [7], а также следующий близкий к ним пример.

П р и м е р 2. 1. Рассмотрим систему вида $(0.\,1)$

$$\frac{dx}{dt}=x-y+p(x,y),\qquad \frac{dy}{dt}=y+q(x,y),\tag{2. 1}$$

$p(x,y)=-cy\ln^{-2}r$, $q(x,y)=cx\ln^{-2}r$ при $0<r<1$, $c\in\mathbb{R}$ — параметр, $p(0,0)=q(0,0)=0$. Для этой системы $p,\,q\in C^1(D)$, $D:0\le r<1$, $p(x,y),\ q(x,y)=o\,(r)$ при $r\to 0$, $O(0,0)$ — изолированная точка покоя, единственная для соответствующей линейной системы $(2.\,1_o)$.

В координатах r, φ система $(2.\,1)$ имеет вид

$$\frac{dr}{dt}=r\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right),\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\sin^2\varphi+c\,\ln^{-2}r\,.\tag{2. 2}$$

Эта система π-периодическая по φ. Для $F(\varphi)=\sin^2\varphi$ в $[0,\pi)$ существует единственный нуль $\varphi_0=0$. Его кратность $k=2$, $G(\varphi)=\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}$, $G(0)=1\neq 0$. Следовательно, для $(2.\,1)$ $\varphi=0$ — обыкновенное исключительное направление 3-го типа, и для него возникает 2-ая проблема различения. Условия ни одного из предложений 2. 1, 2. 2 для системы $(2.\,1)$ не выполняются. Применим для решения упомянутой проблемы непосредственно теорему Лонна.

В секторе $N:0<r\le\Delta$, $|\varphi|\le\varepsilon$ с достаточно малыми $\varepsilon>0$ и $\Delta>0$ уравнение траекторий системы имеет вид

$$r\frac{d\varphi}{dr}=\varphi^2+a_1\varphi^3+\cdots+\psi(r,\varphi),\tag{2. 3}$$

где $\psi(r,\varphi) = c\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)^{-1}\ln^{-2} r$. Для него $k = 2$, $a = 1$, $b_0 = \frac{1}{4}$, $\Lambda(r) = \ln^{-2} r$. Поэтому в N при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\begin{array}{rcl}\psi(r,\varphi) & \leq & \begin{cases} 0, & \text{если } c \leq 0, \\ \dfrac{c}{1-\varepsilon}\Lambda(r) < \dfrac{1}{4}\Lambda(r), & \text{если } 0 < c < \dfrac{1}{4}, \end{cases} \\ \psi(r,\varphi) & \geq & \quad \dfrac{c}{1+\varepsilon}\Lambda(r) > \dfrac{1}{4}\Lambda(r), \quad \text{если } c > \dfrac{1}{4}. \end{array}$$

Из этого, согласно теореме Лонна, следует, что при $c < \frac{1}{4}$ (и, в частности, при $c = 0$) для уравнения (2.3) существует бесконечно много O-кривых вида (1.3) и, следовательно, для системы (2.1) O — вырожденный узел, а при $c > \frac{1}{4}$ уравнение (2.3) не имеет O-кривых вида (1.3) и, следовательно, для системы (2.1) O — фокус.

Случай, когда в (2.3) $c = \frac{1}{4}$, теорема Лонна оставляет открытым. Чтобы охватить и этот случай, применим для исследования проблемы другой метод.

Произведем в уравнении (2.3) замену $-\ln^{-1} r = \rho$. Оно перейдет при этом в уравнение

$$\rho^2\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\sin^2\varphi + c\rho^2}{1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi} \equiv V(\rho,\varphi), \tag{2.4}$$

где $V(\rho,\varphi) = \varphi^2\left(1+\varphi+\frac{2}{3}\varphi^2+\dots\right)+c\rho^2\left(1+\varphi+\varphi^2+\dots\right)$ и ряды сходятся при $|\varphi| \leq \varepsilon$, а область N — в область $N' : 0 < \rho \leq \Delta' = = |\ln\Delta|^{-1}$, $|\varphi| \leq \varepsilon$. Замена $\varphi = u\rho$ в (2.4) преобразует его в уравнение

$$\rho\frac{du}{d\rho} = u^2 - u + c + \rho u U(\rho,u), \tag{2.5}$$

где U — аналитическая функция от ρ и u в области

$$N'' : 0 < \rho \leq \Delta', \quad \rho|u| \leq \varepsilon.$$

(2.5) — уравнение вида (1.1). При $c = \frac{1}{4}$ $\Phi(u) = u^2 - u + c = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2$ имеет корень $u_0 = \frac{1}{2}$ кратности $k = 2$ так, что

$$N^0 : 0 < \rho \leq \Delta_0, \quad \left|u - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 > 0,$$

— нормальная область 3-го типа для (2.5), если Δ_0 достаточно мало. Для нее возникает 2-я проблема различения. Применяя для ее решения теорему Лонна, находим:

$$k = 2,\ a = \frac{1}{2}\Phi''\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0,\ \Lambda(\rho) = \ln^{-2}\rho,$$

$$\psi(\rho, u) \equiv \rho u U(\rho, u) = O(\rho) \text{ при } \rho \to 0,$$

$$\left|u - \frac{1}{2}\right| \le \varepsilon,\ \psi(\rho, u) = o(\Lambda(\rho)) \text{ при } \rho \to 0,$$

т. е. для уравнения (2.5) в N^0 выполняется условие утверждения 1) теоремы Лонна, а потому оно имеет бесконечно много решений вида $u(\rho) = \frac{1}{2} + o(1), o(1) \to 0$ при $\rho \to 0$. Из этого следует, что уравнение (2.3) при $c = \frac{1}{4}$ имеет бесконечно много решений вида $\varphi(r) = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) |\ln r|^{-1}$, $o(1) \to 0$ при $r \to 0$, т. е. решений вида (1.3). То же самое имеет место для направления $\varphi = \pi$ так, что для системы (2.1) при $c = \frac{1}{4}$ точка O — вырожденный узел.

Исследуя уравнения (2.5) при $c < \frac{1}{4}$ и $c > \frac{1}{4}$, придем к тем же выводам для уравнения (2.3), что и выше.

3. Проблема различения для исключительных направлений системы в случае, когда $F(\varphi) \equiv 0$

В этом случае любое направление в точке O $\varphi = \varphi_0$ является исключительным для системы (0.1) и для него возникает проблема существования O-кривых, определяемых решениями вида (0.4) системы (0.2).

Отметим, что если в системе (0.2) $F(\varphi) \equiv 0$, то функция $G(\varphi) \not\equiv 0$ и имеет в $[0, 2\pi)$ не более $2(m+1)$ нулей. Следовательно, в этом случае любое направление в точке O $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, является для системы (0.1) обыкновенным исключительным направлением, за исключением разве лишь конечного числа направлений.

3.1. Обыкновенные исключительные направления

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Пусть система* (0.1) *такова, что в* (0.2) $F(\varphi) \equiv 0$, $G(\varphi) \neq 0 \quad \forall\, \varphi$. *Если в* (0.1) $p(x, y)$, $q(x, y) = = O(r^m\omega(r))$

при $r \to 0$, *где* $\omega \in C[0,\Delta]$, $\Delta \in (0,\delta)$, $\omega(0) = 0$, $\omega(r) > 0$ *при* $r > 0$, $\int\limits_0^\Delta r^{-1}\,\omega(r)\,dr < +\infty$, *то по любому направлению* $\varphi = \varphi_0$ *к точке* O *примыкает хотя бы одна* O*-кривая системы* (0.1).

При этих условиях при достаточно малом $\Delta \in (0,\delta)$ $G(\varphi)+g(r,\varphi) \neq 0$ в $\Pi_\Delta : 0 \le r \le \Delta$, $|\varphi| < +\infty$. Уравнение (0.3) в Π_Δ можно записать в виде

$$r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{f(r,\varphi)}{G(\varphi)+g(r,\varphi)} \equiv h(r,\varphi)\,, \tag{3.1}$$

где $h \in C(\Pi_\Delta)$, $h(0,\varphi) \equiv 0$, $h(r,\varphi) = O(\omega(r))$ при $r \to 0$, $|\varphi| < +\infty$. Каждая O-кривая системы (0.1) вида (0.4) с $r^0 \in (0,\Delta]$ представима в виде (1.3), где $\varphi(r)$, $0 < r \le r^0$, — решение уравнения (3.1). С другой стороны, $\forall (r^0,\varphi^0) \in \Pi_\Delta$, $r^0 > 0$, решение уравнения (3.1) $\varphi(r)$, $\varphi(r^0) = \varphi^0$, продолжимо на $(0,r^0]$ и обладает свойством (1.3):

$$\varphi(r) = \varphi^0 - \int\limits_r^{r^0} s^{-1}\,h(s,\varphi(s))\,ds \to \varphi^0 - M^0 = \varphi_0 \in \mathbb{R}$$

при $r \to 0$ (так как $r^{-1}|h(r,\varphi(r))| \le cr^{-1}\,\omega(r)$ при малых $r > 0$ ($c > 0$ — постоянная)), а потому определяет TO-кривую системы (0.1).

Покажем, что $\forall \varphi_0 \in \mathbb{R}$ существует решение уравнения (3.1) вида (1.3). Для этого рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \int\limits_0^r s^{-1}h(s,\varphi(s))\,ds, \quad 0 \le r \le \Delta\,. \tag{3.2}$$

При указанных свойствах h оно имеет решение в виде абсолютно непрерывной на $[0,\Delta]$ функции $\varphi_0(r)$, $\varphi_0(0) = \varphi_0$. При $r \in (0,\Delta]$ $\varphi_0(r)$ есть решение уравнения (3.1) вида (1.3).

В случае $F(\varphi) \equiv 0$ при определенных ограничениях на p, q [4, с. 111] для любого направления $\varphi = \varphi_0$, $G(\varphi_0) \neq 0$, существует, и единственное, решение уравнения (0.3) вида (1.3) с фиксированным r^0. Сформулируем такие ограничения в терминах порядка гладкости функций p, q.

П р е д л о ж е н и е 3.2. *Пусть система* (0.1) *и число* φ_0 *таковы, что* $F(\varphi) \equiv 0$, $G(\varphi_0) \neq 0$. *Если в* $p, q \in C^{m+1}(D)$, *то существует единственная* O*-кривая системы* (0.1), *примыкающая к точке* O *по направлению* $\varphi = \varphi_0$.

Так как $G(\varphi_0) \neq 0$, существуют $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0 : G(\varphi) + g(r,\varphi) \neq 0$ в прямоугольнике $R:\ 0 \le r \le \Delta,\ |\varphi - \varphi_0| \le \varepsilon$ плоскости r,φ. Так как $p,q \in C^{m+1}(D)$, по лемме 0.1 $g'_\varphi \in C(\Pi)$, а функция f представима в виде (0.5_1), где F_1 — форма степени $m+2$ от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, f_1, $f'_{1\varphi} \in C(\Pi)$. Следовательно, уравнение (0.3) в R принимает вид

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{F_1(\varphi) + f_1(r,\varphi)}{G_1(\varphi) + g_1(r,\varphi)} \equiv \Psi_1(r,\varphi)\,,$$

где Ψ_1, $\Psi'_{1\varphi} \in C(R)$. Для него существует единственное решение $\varphi(r)$, $\varphi(0) = \varphi_0$.

3.2. Особые исключительные направления

Пусть существует $\varphi_0 \in [0, 2\pi)\ :\ G(\varphi_0) = 0$. Пусть $p,q \in C^{m+k}(D)$ так, что f,g представимы формулами (0.5_k), $k \ge 1$. Пусть $F_i(\varphi) \equiv 0, = \overline{1,k-1}$, $F_k(\varphi_0) \neq 0$. Тогда уравнение (0.3) можно записать в виде

$$r^{k-1}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} r^i G_i(\varphi) + r^k g_k(r,\varphi)}{F_k(\varphi) + f_k(r,\varphi)} \equiv H_k(r,\varphi), \qquad (3.2_k)$$

где $G_0(\varphi) \equiv G(\varphi)$. При этом существуют $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0 :\ F_k(\varphi) + f_k(r,\varphi) \neq 0$ в $R:\ |\varphi - \varphi_0| \le \varepsilon,\ 0 \le r \le \delta$ так, что $H_k \in C(R)$. Однако, если $k > 1$, то точка $(\varphi_0, 0)$ — особая для (3.2_k), а потому открыт вопрос даже о существовании решений вида

$$r = r(\varphi),\ r(\varphi) \to +0 \ \text{при}\ \varphi \to \varphi_0 + 0 \ \text{или}\ \varphi \to \varphi_0 - 0, \qquad (3.3)$$

не говоря уже о решениях вида (1.3).

П р е д л о ж е н и е 3.3. *Пусть система* (0.1) *и число* φ_0 *таковы, что* $F_i(\varphi) \equiv 0$, $i = \overline{0,k-1}$, $F_0(\varphi) \equiv F(\varphi)$, $F_k(\varphi_0) \neq 0$, $k \ge 1$, φ_0 — *нуль* $G(\varphi)$ *кратности* $\alpha \ge 1$; *пусть* $a = G^{(\alpha)}(\varphi_0)/\alpha!$, $c = \dfrac{a}{F_k(\varphi_0)}$. *Если* $p,q \in C^{m+k+1}(D)$ *и* $p(x,y), q(x,y) = O(r^{m+k})$ *при* $r \to 0$, *то для системы* (0.1) *к точке* O *по направлению* $\varphi = \varphi_0$
а) примыкает единственная O-кривая, если α *четное,*
б) примыкают две O-кривые, если α *нечетное,* $c > 0$,
в) не примыкает ни одной O-кривой, если α *нечетное,* $c < 0$.

Не ограничивая общности, будем считать, что φ_0=0.

1) $k = 1$. По условию $p,q \in C^{m+2}(D)$. Поэтому f,g представимы в виде (0.5_1), (0.5_2), где f_1, $g_1 \in C^1(\Pi)$, f_2, $g_2 \in C(\Pi)$. Следовательно, уравнение

$(3.\,2_1)$ можно переписать в виде

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{G(\varphi) + r(G_1(\varphi) + g_1(r,\varphi))}{F_1(\varphi) + r(F_2(\varphi) + f_2(r,\varphi)} \equiv H_1(r,\varphi), \qquad (3.\,2_1')$$

где $H_1 \in C^1(R)$ и представима в виде

$$H_1(r,\varphi) = \Phi_1(\varphi) + r\psi_1(r,\varphi), \qquad (3.\,4)$$

$\Phi_1(\varphi) = G(\varphi)F_1^{-1}(\varphi) = c\varphi^\alpha + c_1\varphi^{\alpha+1} + \ldots,\ |\varphi| \le \varepsilon,\ \psi_1 \in C(R),\ r\psi_1 \in C^1(R)$. Продолжим функцию ψ_1 на $R_1\ :\ |\varphi| \le \varepsilon,\ |r| \le \Delta$, положив для $r < 0$ $\psi_1(r,\varphi) = \psi_1(-r,\varphi)$. Тогда будем иметь: $H_1 \in C^1(R_1)$, а потому для уравнения $(3.\,2_1')$, рассматриваемого в R_1 существует единственное решение $r(\varphi)$, $|\varphi| \le h \le \varepsilon$, $r(0) = 0$. Из $(3.\,2_1')$ и $(3.\,4)$ следует, что оно представимо в виде

$$r(\varphi) = \frac{c}{\alpha+1}\,\varphi^{\alpha+1}(1 + o(1)), \quad r'(\varphi) = c\varphi^\alpha(1 + o_1(1)), \qquad (3.\,5)$$

$o(1)$, $o_1(1) \to 0$ при $\varphi \to 0$ и, следовательно, а) определяет единственное (при фиксированном r^0) решение уравнения $(0.\,3)$ $\varphi = = \varphi(r)$, $0 < r \le r^0$, $\varphi(r) \to 0$ при $r \to 0$, если α четное, б) определяет два таких решения, если α нечетное, $c > 0$, в) не определяет ни одного решения, если α нечетное, $c < 0$.

2) $k \ge 2$. Из условий следует, что в этом случае p, q представимы формулами $(0.\,7)$ при $l = k+1$, причем в них $P_i(x,y) \equiv Q_i(x,y) \equiv 0$, $i = \overline{1, k-1}$, а потому уравнение $(3.\,2_k)$ имеет вид

$$r^{k-1}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{G(\varphi) + r^k(G_k(\varphi) + g_k(r,\varphi))}{F_k(\varphi) + f_k(r,\varphi)} \equiv H_k(r,\varphi), \qquad (3.\,2_k')$$

где $f_k,\ g_k \in C^1(\Pi)$, $H_k \in C^1(R)$. Точка $(0,0)$ — особая для $(3.\,2_k')$. Исследуем для уравнения $(3.\,2_k')$ вопрос о существовании у него решений вида $(3.\,3)$.

Полагая в $(3.\,2_k')$ $r^k = \rho$, получим уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{k(G(\varphi) + \rho(G_k(\varphi) + g_k(r,\varphi)))}{F_k(\varphi) + f_k(r,\varphi)}\,, \qquad (3.\,6)$$

где $r = \sqrt[k]{\rho}$. Если это уравнение имеет решение

$$\rho = \rho(\varphi),\ \rho(\varphi) \to 0 \text{ при } \varphi \to +0 \text{ или } \varphi \to -0, \qquad (3.\,7)$$

то $\rho'(\varphi) \to 0$, $\rho(\varphi) = O(\varphi\rho'(\varphi))$ при $\varphi \to 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \rho'(\varphi) &= kc\varphi^\alpha(1 + o_1(1))\,, \\ \rho(\varphi) &= \frac{kc}{\alpha+1}\varphi^{\alpha+1}(1 + o(1))\,, \end{aligned} \qquad (3.\,8)$$

$o(1), o_1(1) \to 0$ при $\varphi \to 0$. Из (3.8) следует: уравнение (3.6) может иметь решения вида (3.7) 1) лишь в области $c\varphi > 0$, $\rho > 0$, если α четное, 2) как в области $\varphi > 0$, $\rho > 0$, так и в области $\varphi < 0$, $\rho > 0$, если α нечетное, $c > 0$, 3) не может иметь таких решений если α нечетное, $c < 0$. Покажем, что в каждорм из случаев 1), 2) для уравнения (3.6) в каждой из упомянутых областей существует решение вида (3.7) и притом только одно (с точностью до его сужений и продолжений).

Пусть $c > 0$. Рассмотрим уравнение (3.6) в области $P^+ : 0 < \rho \le \Delta^k$, $0 < \varphi \le \varepsilon$. Полагая в нем $\rho = u\varphi^{\alpha+1}$, получим уравнение

$$\varphi\frac{du}{d\varphi} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{+\infty}(a_i - b_i u)\varphi^i + uh_k(r,u)}{F_k(\varphi) + f_k(r,\varphi)} \equiv U(\varphi, u)\,, \tag{3.9}$$

где $a_0 = ka$, $b_0 = (\alpha+1)F_k(0)$,

$$h_k(r,\varphi) = \varphi g_k(r,\varphi) - (\alpha+1)f_k(r,\varphi),\ r = \left(u\varphi^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{k}},$$

$$U(\varphi,u) \in C(\overline{\sum}^+), \quad \sum\nolimits^+ : 0 < \varphi \le \varepsilon, \quad 0 < u < \frac{\Delta^k}{\varphi^{\alpha+1}}.$$

Введем обозначения: $\Phi(u) = U(0,u) \equiv kc - (\alpha+1)u$, $\psi(\varphi,u) = = U(\varphi,u) - \Phi(u)$. Тогда уравнение (3.9) можно переписать в виде

$$\varphi\frac{du}{d\varphi} = \Phi(u) + \psi(\varphi,u), \tag{3.9$'$}$$

$\psi \in C(\overline{\sum}^+)$, $\psi(0,u) \equiv 0$, $\psi'_u \in C(\sum^+)$.

(3.9′) — уравнение вида (1.1). Для него $u_0 = \dfrac{kc}{\alpha+1} > 0$ — нуль $\Phi(u)$, $\Phi'(u_0) = -(\alpha+1) < 0$. Следовательно, существуют $\varepsilon' > 0$ и $\Delta' > 0$: для (3.9′) $N : 0 < \varphi \le \Delta'$, $|u - u_0| \le \varepsilon'$ — нормальная область 2-го типа, а потому для (3.9′) существует решение

$$u(\varphi),\ 0 < \varphi \le \Delta',\ u(\varphi) \to u_0 \text{ при } \varphi \to 0. \tag{3.10}$$

При этом $\psi'_u(\varphi,u) = O(\varphi^\sigma)$ при $\varphi \to 0$, $|u - u_0| \le \varepsilon'$, $\sigma = \min\left\{1, \dfrac{\alpha+1}{k}\right\}$. Следовательно, для (3.9) $U'_u(\varphi,u) < 0$ в N, если Δ' достаточно мало, т. е. выполняется условие Пеано, а потому существует единственное решение вида (3.10).

Из этого следует, что при $c > 0$ для уравнения (3.6) в области P^+ существует единственное (в указанном выше смысле) решение $\rho(\varphi)$ вида (3.7), (3.8).

Случай области $P^- : -\varepsilon \leq \varphi < 0,\ 0 < \rho \leq \Delta^k$ для $c > 0$ и случай $c < 0$ рассматриваются аналогично.

Возвращаясь от уравнения (3.6) к уравнению (3.2), заключаем: решение $\rho(\varphi)$ уравнения (3.6) вида (3.7), (3.8) из фиксированной области P^+ или P^- (и только оно) порождает в соответствующей области плоскости φ, r решение $r = \sqrt[k]{\rho(\varphi)}$ вида (3.3) уравнения ($3.2'_k$). В силу (3.8) это решение однозначно обратимо и, следовательно, определяет единственную в этой области O-кривую системы (0.1), примыкающую к точке O по направлению $\varphi = 0$. Отсюда и следует справедливость предложения 3.2 при $k \geq 2$.

П р и м е ч а н и е. Факт, что для аналитической системы (0.1) с $F(\varphi) \equiv 0$, $G(\varphi_0) = 0$ при $k \geq 2$ (см. предложение 3.3) и $p(x,y), q(x,y) = O(r^{m+k})$ при $r \to 0$ для числа O-кривых системы (0.1), примыкающих к точке O по направлению $\varphi = \varphi_0$, встречаются лишь те же возможности, что и при $k = 1$, впервые отметила В. П. Ноздрачева [5].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 97–07–90088). Статья подготовлена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция"(проект N 2.1–326.53).

Список литературы

1) *Андреев А. Ф.* // Докл. АН СССР, 1962. Т. 142, N 4. С. 754–757.

2) *Андреев А. Ф.* // Докл. АН СССР, 1962. Т. 146, N 1. С. 9–10.

3) *Андреев А. Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений. Минск, 1979.

4) *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л., 1949.

5) *Ноздрачева В. П.* // Дифференц. уравнения, 1989. Т. 25, N 6. С. 1059–1061.

6) *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1954. Т. 2.

7) *Perron O.* // Math. Ztschr., 1922. Bd. 15. S. 121–146.