ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 1999
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Стохастическое управление

А. М. Вершик,[1] *А. Г. Качуровский*[2]

СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ОБРАЩЕННЫЕ МАРТИНГАЛЫ

Однородный обращенный мартингал можно рассматривать как последовательность средних в эргодической теореме для локально конечных групп, и наоборот. В работе эти связи используются для получения оценок скоростей сходимости.

Изучению скоростей сходимости в эргодических теоремах для группы $\mathbb{Z}$ за последние двадцать лет был посвящен целый ряд работ (см., например, обзор [1]). Аналогичный вопрос для других групп почти не изучался. В настоящей работе мы рассматриваем этот вопрос для локально конечных групп. Изучение эргодических средних для таких групп сводится к изучению однородных обращенных мартингалов (определение см. ниже): оказывается, соответствующие эргодические теоремы почти идентичны теореме Дуба о сходимости обращенного мартингала. Поэтому, с одной стороны, удается без особого труда перенести хорошо развитую теорию сходимости (обращенных) мартингалов на сходимости в эргодических теоремах для локально конечных групп — см. примеры 1 и 2; с другой стороны, эргодический взгляд на однородные обращенные мартингалы позволяет и для них получать новые результаты — такова теорема 3 об их скорости сходимости.

1. Необходимые понятия. Пусть (Ω, λ) — стандартное вероятностное пространство (т. е. пространство Лебега). Напомним, что *обращен-*

[1]**Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН:** 191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27. E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

[2]То же. E-mail: agk@pdmi.ras.ru

ным мартингалом (с дискретным временем) называется последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geq 0}$, такая, что для каждого N последовательность $X_N,\ X_{N-1}, \cdots, X_0$ — мартингал. Заметим, что σ-алгебры F_N, порожденные $\{X_n\}_{n\geq N}$, образуют убывающую последовательность $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots$. Им соответствует убывающая последовательность измеримых разбиений (см. [2]) $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$. Эта последовательность называется однородной (убывающей последовательностью измеримых разбиений), если для каждого разбиения ξ_n почти всюду (п. в.) его элементы есть изоморфные однородные пространства, и фактор-пространство тоже однородно (см. [2]; пространство Лебега называется однородным, если оно или чисто-непрерывно, или чисто-дискретно с равномерной мерой на конечном числе атомов). Обращенный мартингал $\{X_n\}_{n\geq 0}$ называется *однородным*, если его σ-алгебры F_n образуют однородную убывающую последовательность.

Группа называется *локально конечной*, если конечна любая ее конечно-порожденная подгруппа. Счетную локально конечную группу G можно (не единственным образом) представить в виде объединения индуктивного семейства $G = \bigcup\limits_{n\geq 0} G_n$, $G_0 = \{e\}$, $G_n \subseteq G_{n+1}$, $|G_n| < \infty$ для всех $n \geq 0$. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать *абелевы* счетные группы G, что для наших целей не уменьшает общности (см. ниже замечание 1).

Пусть локально конечная группа $G = \bigcup\limits_{n\geq 0} G_n$ действует на пространстве $(\Omega,\ \lambda)$ с G-инвариантной мерой автоморфизмами T_g, $g \in G$. Всюду в дальнейшем действие G предполагается свободным, т. е. $\lambda\{x|T_g x = x\} = 0$ для любого g. Для каждой функции $f \in L_1(\Omega)$ обозначим

$$S_n f = \sum_{g\in G_n} f\circ T_g, \quad A_n f = \frac{1}{|G_n|} S_n f.$$

В случае $f \in L_2(\Omega)$ через $R(g)$ для каждого $g \in G$ обозначим соответствующий корреляционный коэффициент, т. е. положим $R(g) = (f\circ T_g,\ f)$. Спектральная теорема для (абелевой) локально конечной группы G унитарных операторов (см. [3]) дает спектральное представление

$$f\circ T_g = \int\limits_{G^\wedge} \chi(g)\, dE_\chi f,$$

т. е. существование такой неотрицательной борелевской меры $\sigma_f (= (E_\chi f,\ f))$

на группе характеров $G^\wedge$, что для любого $g \in G$

$$R(g) = \int\limits_{G^\wedge} \chi(g)\, d\sigma_f(\chi). \qquad (1)$$

2. Эргодические теоремы для локально конечных групп и обращенные мартингалы. Как нетрудно убедиться (непосредственной проверкой), если локально конечная группа $G = \bigcup\limits_{n\geq 0} G_n$ действует свободно на пространстве $(\Omega,\, \lambda)$ с G-инвариантной мерой, то 1) последовательность разбиений $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ на орбиты действия групп $\{G_n\}_{n\geq 0}$ является однородной убывающей последовательностью разбиений; 2) если задана функция $f \in L_1(\Omega)$, то последовательность $f_n = \mathsf{M}(f|\xi_n)$ является обращенным мартингалом, причем f_n совпадает с эргодическим средним $A_n f$. Таким образом, эргодическую теорему о сходимости п. в. $\{A_n f\}_{n\geq 0}$ для группы $G = \bigcup\limits_{n\geq 0} G_n$ можно рассматривать как теорему Дуба о сходимости п. в. (однородного) обращенного мартингала $\{f_n\}_{n\geq 0}$.

Оказывается, верно и обратное. А именно, как показано в [2], всякая однородная убывающая последовательность разбиений $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ может быть реализована как последовательность разбиений на траектории действия групп $G_n(= \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{Z}_{r_k})$ локально конечной группы $G(= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{r_k}$ для некоторой последовательности $\{r_k\}_{k\geq 0})$; отметим, что свойство однородности $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ в условиях утверждения 1.4 из [2] влечет G-инвариантность меры λ. Поэтому и теорема Дуба о сходимости почти всюду (однородного) обращенного мартингала может быть реализована как эргодическая теорема для локальной конечной группы $G = \sum\limits_{k=o}^{\infty} \mathbb{Z}_{r_k}$, $G = \bigcup\limits_{n\geq 0} (\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{Z}_{r_k})$.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что точно такую же интерпретацию допускает и эргодическая теорема для локально конечной *неабелевой* группы, что и делает условие абелевости группы G для наших рассмотрений не уменьшающим общности (как уже отмечалось выше). Обратим внимание на то, что операторы $\{A_n\}_{n\geq 0}$ коммутируют независимо от того, была ли группа G коммутативна или нет. Именно поэтому наша проблема сводится к коммутативной задаче. Операторы $\{A_n\}_{n\geq 0}$ образуют коммутативную полугруппу с соотношениями

$$A_i^2 = A_i,\; A_i^* = A_i,\; A_i A_j = A_{max(i,j)},\; i, j = 0, \cdots,$$

и обсуждаемое сведение задачи к группе $\sum_k \mathbb{Z}_{r_k}$ могло бы быть альтернативно заменено на сведение к унитарной коммутативной полугруппе.

Таким образом, теория сходимости (обращенных) мартингалов оказывается почти идентичной теории сходимости в рассматриваемых эргодических теоремах. В качестве примеров приведем эргодические аналоги классического неравенства Дубинса [4] и малоизвестного неравенства Бургейна-Чашки.

П р и м е р 1. 1) *Неравенство Дубинса* в формулировке [5]. Пусть $\{X_n\}_{n\geq 0}$ — неотрицательный мартингал. Для каждой пары действительных чисел $0 < a < b$ через $\beta^{\uparrow}_{a,\,b}$ обозначим число пересечений снизу вверх полосы $[a,\,b]$ нашим мартингалом. Тогда для каждого $k \geq 1$

$$\mathsf{P}\{\beta^{\uparrow}_{a,\,b} \geq k\} \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \mathsf{M}\left(\min\left(\frac{X_0}{a},\,1\right)\right).$$

2) *Аналог неравенства Дубинса в эргодических теоремах для локально конечных групп.* Пусть $G = \bigcup_{n\geq 0} G_n$ — локально конечная группа, действующая на пространстве Лебега $(\Omega,\,\lambda)$ с G-инвариантной мерой, и пусть

$$f \in L_1(\Omega),\ f \geq 0,\ f^* = \lim_{n\to\infty} A_n f.$$

Для каждой пары действительных чисел $0 < a < b$ через $\beta^{\downarrow}_{a,\,b}$ обозначим число пересечений сверху вниз полосы $[a,\,b]$ последовательностью $A_n f$. Тогда для каждого $k \geq 1$

$$\lambda\{\beta^{\downarrow}_{a,\,b} \geq k\} \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \int\left(\min\left(\frac{f^*}{a},\,1\right)\right) d\lambda.$$

Разница в формулировках (переход от X_0 к f^* и от $\beta^{\uparrow}_{a,\,b}$ к $\beta^{\downarrow}_{a,\,b}$) объясняется переходом к обращенному мартингалу; при считывании последовательности справа налево каждое пересечение ею полосы снизу вверх будет выглядеть как пересечение сверху вниз.

П р и м е р 2. 1) *Неравенство Бургейна-Чашки* [6,1]. Пусть $\{X_n\}_{n\geq 0}$ — мартингал, $\sup_n \|X_n\|_p \leq L$ для некоторого $p \in (1,\,\infty)$. Обозначим через k_ε число ε-флуктуаций нашего мартингала. Тогда

$$\mathsf{M}(k_\varepsilon)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{c_p L^p}{\varepsilon^p},\ \ c_p = \left(\frac{36p^{\frac{5}{2}}}{(p-1)^2}\right)^p \tag{2}$$

2) *Аналог неравенства Бургейна-Чашки в эргодических теоремах для локально конечных групп.* Пусть $G = \bigcup_{n\geq 0} G_n$ — локально конечная группа, действующая на пространстве Лебега с G-инвариантной мерой, и пусть $\|f\|_p = L$ для некоторого $p \in (1, \infty)$. Обозначим через k_ε число ε-флуктуаций последовательности $\{A_n f\}_{n\geq 0}$. Тогда справедливо неравенство (2).

3. Скорости сходимости. Сходимость п. в. последовательности измеримых функций $\{f_n\}_{n\geq 0}$ к f^* равносильна выполнению соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\sup_{N\geq n} |f_N - f^*| \geq \varepsilon\} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$. Рассмотрим вопрос о скорости сходимости этой последовательности к нулю (для каждого ε) для однородных обращенных мартингалов и эргодических теорем для локально конечных групп. В дальнейшем для упрощения обозначений считаем рассматриваемые мартингалы и эргодические средние сходящимися п. в. к нулю (в доказательствах существенно лишь нулевое математическое ожидание X_0 — в случае мартингала и f — в случае эргодических теорем).

Интересно сравнить утверждения теорем 1 и 2 (ниже) о скоростях сходимости в эргодических теоремах для локально конечных групп $G = \bigcup_{n\geq 0} G_n$ (с G-инвариантной мерой) с соответствующими результатами для группы $\mathbb{Z}$: с теоремой 18.2.1 в [7] и теоремами 3, 11 и 13 в [1]. Для локально конечных групп формулировки оказываются более прозрачными из-за того, что ядра Фейера вырождаются здесь (теорема 1) в последовательность характеристических функций окрестностей нуля. По этой же причине удается дать оценки самой скорости сходимости (теорема 2), а не только ее асимптотики (как это было для группы $\mathbb{Z}$); здесь получение неулучшаемых оценок и упрощение доказательств становится возможным и благодаря возможности перехода к обращенному мартингалу.

Т е о р е м а 1. *Дисперсия величины $S_n f$, $\mathsf{D}S_n f$, следующим образом выражается через корреляционные коэффициенты $R(g)$ и спектральную меру σ_f:*

$$\mathsf{D}S_n f = |G_n| \sum_{g\in G_n} R(g); \tag{3}$$

$$\mathsf{D}S_n f = |G_n|^2 \sigma_f\{\chi \in G^\wedge |\ \chi\big|_{G_n} \equiv e^0\}. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\mathsf{D}S_nf = (S_nf,\, S_nf) = \left(\sum_{g\in G_n} f\circ T_g,\, \sum_{h\in G_n} f\circ T_h \right) =$$

$$= \sum_{g,h\in G_n} (f\circ T_g,\, f\circ T_h) = \sum_{g,h\in G_n} (f\circ T_{g-h},\, f) = |G_n| \sum_{g\in G_n} (f\circ T_g,\, f),$$

что и доказывает утверждение (3). Из (3) заменой (1) получаем

$$\mathsf{D}S_nf = |G_n| \sum_{g\in G_n} \int\limits_{G^\wedge} \chi(g)\, d\sigma_f(\chi) = |G_n| \int\limits_{G^\wedge} \sum_{g\in G_n} \chi(g)\, d\sigma_f(\chi).$$

Равенство (4) следует теперь из того простого факта, что для любой конечной абелевой группы H и любого (нормированного) характера $\chi \in H^\wedge$

$$\sum_{g\in H} \chi(g) = \left| \begin{array}{rl} |H|, & \text{если } \chi \equiv e^\circ; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{array} \right.$$

Действительно, разложив H в прямую сумму циклических подгрупп $\mathbb{Z}_{r_i}$, $i = 1, \cdots, k$ и положив $\chi\big|_{\mathbb{Z}_{r_i}} = \chi_i$, $g\big|_{\mathbb{Z}_{r_i}} = g_i$, получаем

$$\sum_{g\in H} \chi(g) = \sum_{g\in H} \prod_{i=1}^{k} \chi_i(g_i) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{g_i\in\mathbb{Z}_{r_i}} \chi_i(g_i).$$

Остается заметить, что для любого $i = 1, \cdots, k$ будет

$$\sum_{g_i\in\mathbb{Z}_{r_i}} \chi_i(g_i) = \left| \begin{array}{rl} r_i, & \text{если } \chi \equiv e^\circ; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{array} \right.$$

Т е о р е м а 2. *Справедлива следующая оценка скорости сходимости в эргодической теореме для действия группы* $G = \bigcup\limits_{n\geq 0} G_n$:

$$\mathsf{P}\{\sup_{N\geq n} |A_Nf| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_f\{\chi \in G^\wedge |\ \chi\big|_{G_n} \equiv e^\circ\} \left(= \frac{1}{\varepsilon^2 |G_n|} \sum_{g\in G_n} R(g) \right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже отмечалось, последовательность $\{A_kf\}_{k\geq 0}$ образует обращенный мартингал, т. е. при каждом $M > n$ последовательность $A_Mf, A_{M-1}f, \cdots, A_nf$ — мартингал. Неравенство Дуба для вероятности превышения заданного уровня максимумом модуля мартингала [8] дает оценку

$$\mathsf{P}\{\sup_{M\geq N\geq n}|A_N f|\geq\varepsilon\}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\|A_n f\|_2^2\,(=\frac{1}{\varepsilon^2}\mathsf{D}A_n f).$$

Остается перейти к пределу при $M\to\infty$ и применить теорему 1.

Из теоремы 2 немедленно следует

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *— однородный обращенный мартингал,* $\sup\limits_n\|X_n\|_2<\infty$; *и пусть* σ_f *— спектральная мера его реализации эргодическими средними для локально конечной группы* $G=\bigcup\limits_{n\geq 0}G_n$; $R(g)$, $g\in G$ *— соответствующие корреляционные коэффициенты. Тогда*

$$\mathsf{P}\{\sup_{N\geq n}|X_N|\geq\varepsilon\}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sigma_f\{\chi\in G^\wedge|\chi\big|_{G_n}\equiv e^\circ\}\;\left(=\frac{1}{\varepsilon^2|G_n|}\sum_{g\in G_n}R(g)\right).$$

Как уже отмечалось, в качестве G в условиях теоремы 3 всегда можно выбрать прямую сумму $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}_{r_k}$ (и, соответственно, $G_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{Z}_{r_k}$, $G^\wedge\simeq\prod_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}_{r_k}$) — см. замечание 1.

Оценки теорем 2 и 3, очевидно, неулучшаемы.

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS–RFBR (грант 95-418) и РФФИ: программа поддержки ведущих научных школ (грант 96-15-96060). Статья подготовлена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция"(проект N 2. 1–326.53).

Список литературы

1. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН, 1996. Т. 51, вып. 4. С. 73–124.

2. *Вершик А. М.* Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений // Алгебра и анализ, 1994. Т. 6, вып. 4. С. 1–68.

3. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М.: Мир, 1975. Т. 1–2.

4. *Dubins L. E.* A note on upcrossings of semimartingales // Ann. Math. Stat., 1966. N 3. P. 728.

5. *Neveu J.* Discrete parameter martingales. Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1975.

6. *Bourgain J.* Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets // Publ. Math. IHES, 1989. V. 69. P. 5–45.

7. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

8. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М: ИЛ, 1956.