ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 1999
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория нелинейных колебаний

УДК 621.376.54

А. Х. Гелиг,[1] *А. Н. Чурилов*[2]

НЕОСЦИЛЛЯТОРНОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Для широкого класса нелинейных импульсных систем с устойчивой непрерывной линейной частью получены достаточные частотные условия отсутствия периодических режимов.

1. Описание системы и постановка задачи. Рассмотрим импульсную систему, описываемую нелинейным функционально-интегральным уравнением

$$\sigma(t) = \alpha(t) - \int\limits_0^t \gamma(t-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \tag{1}$$

в котором $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ — заданные функции (“собственные колебания”и “импульсная переходная функция”непрерывной линейной части системы), а $f(t)$ является результатом отображения искомой функции $\sigma(t)$ (“модулирующего сигнала”) с помощью нелинейного оператора (“модулятора”) M:

$$f = M\sigma. \tag{2}$$

Предполагается, что оператор M каждой функции $\sigma(t) \in C[0, +\infty)$ ставит в соответствие функцию $f(t)$, обладающую следующими свойствами: 1)

[1] **Санкт-Петербургский государственный университет:** 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2. СПбГУ. НИИ математики и механики имени академика В. И. Смирнова. Лаборатория теоретической кибернетики.

[2] **Санкт-Петербургский государственный Морской технический университет:** 190008, Санкт-Петербург, ул. Лоцманская, д. 3.

существует последовательность $\{t_n\}$, удовлетворяющая условиям

$$0 < \varepsilon_0 T \le t_{n+1} - t_n \le T, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ; \quad t_0 = 0,$$

где ε_0, T — некоторые постоянные числа;

2) функция $f(t)$ кусочно-непрерывна на $[0,\ +\infty)$ и сохраняет знак на каждом промежутке $[t_n,\ t_{n+1})$ (напомним, что функция называется кусочно-непрерывной, если она может иметь разрывы только первого рода, причем на каждом ограниченном интервале таких разрывов не более чем конечное число);

3) t_n зависит от значений $\sigma(t)$ лишь при $t \le t_n$, $f(t)$ зависит от значений $\sigma(\tau)$ лишь при $\tau \le t$ (иными словами, модулятор обладает свойством "каузальности");

4) для каждого n существует такое $\tilde{t}_n \in [t_n,\ t_{n+1}]$, что среднее значение n-го импульса

$$v_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\, dt$$

удовлетворяет квадратичной связи

$$(\sigma(\tilde{t}_n) - \sigma_* v_n) v_n \ge 0, \tag{3}$$

где σ_* — заданное положительное число ("порог насыщения модулятора").

Отметим, что условиям 1)−4) удовлетворяют большинство из известных видов импульсной модуляции (амплитудная, частотная, широтная и другие) [1,2,3].

Особенностью рассматриваемого класса систем является нарушение непрерывности оператора M. Например, в случае широтно-импульсной модуляции первого рода [3] $t_n = nT$,

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sigma(nT), & nT \le t < nT + \tau_n, \\ 0, & nT + \tau_n \le t < (n+1)T, \end{cases}$$

где $\tau_n = F(|\sigma(nT)|)$, $F(\cdot)$ — заданная непрерывная функция, $F(0) = 0$, $0 < F(\lambda) < T$ при $0 < \lambda \le \sigma_*$, $F(\lambda) = T$ при $\lambda \ge \sigma_*$. Очевидно, что оператор M,

$$M : \quad C[0,\ \tau] \to L_1[0,\ \tau],$$

при любом τ непрерывен в силу непрерывности функции F. В случае широтно-импульсной модуляции второго рода τ_n является наименьшим положительным корнем уравнения $\tau_n = F(|\sigma(nT + \tau_n)|)$, если таковой имеется на интервале $(0,\ T]$. Если такого корня нет, то $\tau_n = T$. Очевидно, что в этом случае оператор M не будет непрерывным во всем пространстве $C[0,\ \tau]$, поскольку корень τ_n, вообще говоря, не является непрерывным функционалом от σ.

Предполагая непрерывную линейную часть системы устойчивой и следуя [4], под Ω-периодическим режимом системы (1), (2) будем понимать Ω-периодическое продолжение для $t > \Omega$ отличного от состояния равновесия решения функционально-интегрального уравнения

$$\sigma(t) = -\int\limits_0^t \gamma(t-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda - \int\limits_0^\Omega \sum_{n=1}^\infty \gamma(t+n\Omega-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \tag{4}$$

в котором $0 \le t \le \Omega$, а σ и f связаны соотношением (2). Будем ппредполагать, что существует такое число N, для которого $\Omega = t_N$, то есть, что промежуток $[0,\ \Omega]$ состоит из целого числа промежутков вида $[t_n,\ t_{n+1}]$.

Ставится задача определения условий, при выполнении которых система (1), (2) не имеет Ω-периодических режимов заданного периода Ω. В случае, когда $f(t) = \varphi(\sigma(t))$, где $\varphi(\sigma)$ — заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\sigma\varphi - \sigma_*\varphi^2 \ge 0, \tag{5}$$

эта задача рассматривалась в [5], где было получено частотное условие отсутствия Ω-периодических режимов.

2. Формулировка результата. Будем рассматривать случай устойчивой непрерывной линейной части, когда функции $\alpha(t)$ и $\dot\gamma(t)$ абсолютно непрерывны и удовлетворяют условию

$$|\alpha(t)| + |\dot\alpha(t)| + |\gamma(t)| + |\dot\gamma(t)| + |\ddot\gamma(t)| \le \gamma_0 \exp(-\nu t) \quad (\nu > 0).$$

Введем обозначения:

$$W(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\gamma(t)\, dt \quad (\text{“передаточная функция”}),$$

$$æ = \lim_{p\to\infty} pW(p) = \gamma(+0),$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad \chi(p) = pW(p) - æ, \quad æ_1 = \lim_{p\to\infty} p\chi(p).$$

Т е о р е м а. *Пусть существуют такие положительные числа ε, τ, что выполнены неравенства*

$$\sigma_* - \varepsilon - \tau - |æ|\, T - \varepsilon_1 æ^2 > 0, \tag{6}$$

$$\sigma_* - \varepsilon - \tau - |æ|\,T + \operatorname{Re} W(i\omega k) - \varepsilon_1 \omega^2 k^2 |W(i\omega k)|^2 -$$
$$-\frac{T^2}{12\tau}|\chi(i\omega k)|^2 \times [4\varepsilon_1 \omega^2 k^2 (\sigma_* - \tau - \varepsilon - |æ|\,T) + 1] > 0,$$
$$k = 0, 1, 2, \dots, \tag{7}$$

где $\varepsilon_1 = T^2/(\pi^2 \varepsilon)$. *Тогда в системе* (1), (2) *не может существовать* Ω-*периодический режим.*

З а м е ч а н и е 1. Если в левых частях неравенств (6), (7) положить $\varepsilon = \tau = T$ и устремить затем $T \to +0$, то получим неравенства $\sigma_* > 0$, $\sigma_* + \operatorname{Re} W(i\omega k) > 0$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Первое из них является тривиальным, а остальные совпадают с полученным в [5] частотным критерием отсутствия Ω-периодических режимов в случае $f(t) = \varphi(\sigma(t))$, где функция φ удовлетворяет неравенству (5).

З а м е ч а н и е 2. Если потребовать, чтобы неравенства (7) выполнялись при всех вещественных ω и $k = 1$, то, согласно [3], условия (6), (7) гарантируют асимптотику $\sigma(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ для решений уравнения (1).

3. Доказательство теоремы. Воспользуемся методом усреднения [3] и идеей, примененной в [5]. Введя функции $v(t) = v_n$ при $t_n \le t < t_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ и

$$u(t) = \int_0^t (f(\lambda) - v(\lambda))\, d\lambda,$$

представим уравнение (4) следующим образом:

$$\sigma(t) = -\int_0^\Omega \sum_{n=0}^\infty \gamma(t + n\Omega - \lambda) v(\lambda)\, d\lambda - \int_0^t \gamma(t - \lambda)\dot u(\lambda)\, d\lambda -$$
$$- \int_0^\Omega \sum_{n=1}^\infty \gamma(t + n\Omega - \lambda) \dot u(\lambda)\, d\lambda.$$

Проинтегрировав интегралы, содержащие $\dot u$, по частям и воспользовавшись очевидным равенством $u(0) = u(\Omega) = 0$, приходим к уравнению

$$\zeta(t) = -\int_0^{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(t + n\Omega - \lambda) v(\lambda)\, d\lambda - \int_0^{t} \dot{\gamma}(t-\lambda) u(\lambda)\, d\lambda - \\ - \int_0^{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\gamma}(t + n\Omega - \lambda) u(\lambda)\, d\lambda, \tag{8}$$

где $\zeta(t) = \sigma(t) + æ u(t)$. Введя кусочно-постоянные функции

$$\bar{\sigma}(t) = \sigma(\tilde{t}_n), \quad \bar{\zeta}(t) = \zeta(\tilde{t}_n), \quad \bar{u}(t) = u(\tilde{t}_n),$$

где $t \in [t_n,\ t_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, представим функционал

$$J(\zeta, \dot{\zeta}, v, u) = \int_0^{\Omega} \left[(\zeta - \sigma_* v)v + (\varepsilon + \tau + |æ|\, T)v^2 + \varepsilon_1 \dot{\zeta}^2 - \frac{3\tau}{T^2} u^2 \right] dt$$

в следующем виде $\quad J(\zeta, \dot{\zeta}, v, u) =$

$$= \int_0^{\Omega} \left[(\bar{\sigma} - \sigma_* v)v + æ\bar{u}v + (\zeta - \bar{\zeta})v + (\varepsilon + \tau + |æ|T)v^2 + \varepsilon_1 \dot{\zeta}^2 - \frac{3\tau}{T^2} u^2 \right] dt.$$

В [3] доказано, что в силу (3), свойства 2 функции $f(t)$ и неравенства Виртингера, справедлива оценка

$$J(\zeta, \dot{\zeta}, v, u) \geq 0. \tag{9}$$

Предположим теперь, что в системе имеется Ω-периодический режим. Тогда $v(t)$ и $u(t)$ будут Ω-периодическими функциями, которые представимы их рядами Фурье:

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega k t}, \quad u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{i\omega k t}. \tag{10}$$

Чтобы обеспечить в дальнейшем сходимость рядов, получаемых при дифференцировании рядов Фурье, построим достаточно гладкие функции $v_h(t)$ и $u_h(t)$, зависящие от параметра h, которые аппроксимируют функции $v(t)$ и $u(t)$ в следующем смысле

$$v_h \xrightarrow{L_2[0,\Omega]} v, \quad u_h \xrightarrow{C[0,\Omega]} u \quad \text{при} \quad h \to 0 \tag{11}$$

(в качестве таких функций можно взять, например, средние функции С. Л. Соболева [6]). Коэффициенты Фурье функций v_h и u_h будем обозначать через c_k^h и d_k^h соответственно. Определим функцию $\zeta_h(t)$ следующим равенством

$$\zeta_h(t) = -I_1 - I_2, \tag{12}$$

где

$$I_1 = \int_0^{\Omega} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(T + n\Omega - \lambda) v_h(\lambda)\, d\lambda,$$

$$I_2 = \int_0^{t} \dot\gamma(t - \lambda) u_h(\lambda)\, d\lambda - \int_0^{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \dot\gamma(t + n\Omega - \lambda) u_h(\lambda)\, d\lambda.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\dot\zeta_h(t) =& -æ v_h(t) - \int_0^{t} \dot\gamma(t-\lambda) v_h(\lambda)\, d\lambda - \\ & - \int_0^{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \dot\gamma(t + n\Omega - \lambda) v_h(\lambda)\, d\lambda - \\ & - \dot\gamma(+0) u_h(t) - \int_0^{t} \ddot\gamma(t-\lambda) u_h(\lambda)\, d\lambda - \\ & - \int_0^{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot\gamma(t + n\Omega - \lambda) u_h(\lambda)\, d\lambda,\end{aligned}$$

то, ввиду (11), при $h \to 0$ справедлива асимптотика

$$\zeta_h \xrightarrow{C[0,\Omega]} \zeta, \quad \dot\zeta_h \xrightarrow{L_2[0,\infty)} \dot\zeta \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Поэтому функционал $J_h = J(\zeta_h, \dot\zeta_h, v_h, u_h)$ обладает свойством

$$J_h \to J(\zeta, \dot\zeta, v, u) \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{13}$$

Подставив вместо $v_h(t)$ его ряд Фурье в I_1 и проведя цепочку преобразований, получим соотношения:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^t \gamma(t-\lambda) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^h e^{i\omega k\lambda}\, d\lambda + \\
&+ \int\limits_0^\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(t+n\Omega-\lambda) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^h e^{i\omega k\lambda}\, d\lambda = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^h \left\{ \int\limits_0^t \gamma(\mu) e^{i\omega k(t-\mu)}\, d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{t+(n-1)\Omega}^{t+n\Omega} \gamma(\mu) e^{i\omega k(t+n\Omega-\mu)} d\mu \right\} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^h e^{i\omega kt} \int\limits_0^\infty \gamma(\mu) e^{-i\omega k\mu}\, d\mu,
\end{aligned}
$$

откуда

$$I_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^h W(i\omega k) e^{i\omega kt}. \qquad (14)$$

Аналогичным образом преобразуем I_2. Поскольку

$$\int\limits_0^\infty \dot\gamma(\mu) e^{-i\omega k\mu}\, d\mu = i\omega k W(i\omega k) - æ,$$

то

$$I_2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^h \chi(i\omega k) e^{i\omega kt}.$$

Подставляя это выражение, а также (14) в соотношение (12), получим представление

$$\zeta_h(t) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(c_k^h W(i\omega k) + d_k^h \chi(i\omega k) \right) e^{i\omega kt}. \qquad (15)$$

Отсюда

$$\dot\zeta_h(t) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} i\omega k \left(c_k^h W(i\omega k) + d_k^h \chi(i\omega k) \right) e^{i\omega kt}. \qquad (16)$$

Подставив выражения (15), (16) в J_h, приходим к соотношению

$$J_h = - \int_0^{\Omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big\{ c_k^h c_n^h \big[W(i\omega k) + (\sigma_* - \varepsilon - \tau - |æ|\, T) + \\ + \varepsilon_1 \omega^2 kn W(i\omega k) W(i\omega n) \big] + d_k^h d_n^h \left[\frac{3\tau}{T^2} + \varepsilon_1 \omega^2 kn \chi(i\omega k)\chi(i\omega n) \right] + \\ + d_k^h c_n^h \big[\chi(i\omega k) + \varepsilon_1 \omega^2 kn \chi(i\omega k) W(i\omega n) \big] + \\ + \varepsilon_1 \omega^2 kn d_n^h c_k^h \varepsilon \omega^2 kn \chi(i\omega n) W(i\omega k) \big] \Big\} e^{i\omega(k+n)t}\, dt.$$

Ввиду вещественности функций $v_h(t)$ и $u_h(t)$ справедливы равенства

$$c_{-n}^h = \bar{c}_n^h, \quad d_{-n}^h = \bar{d}_n^h, \tag{17}$$

где чертой обозначено комплексное сопряжение.

В силу (17), а также свойства

$$\int_0^{\Omega} e^{i\omega m t}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{при целом} \quad m \neq 0, \\ \Omega & \text{при} \quad m = 0, \end{cases}$$

выражение J_h примет вид

$$J_h = -\Omega \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_k^h, \tag{18}$$

где

$$\Phi_k^h = m_{11}(k)|c_k^h|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(m_{12}(k)\bar{c}_k^h d_k^h \right) + m_{22}(k)|d_k^h|^2,$$

$$m_{11}(k) = \sigma_* - \varepsilon - \tau - |æ| T + \mathrm{Re}\, W(i\omega k) - \varepsilon_1 \omega^2 k^2 |W(i\omega k)|^2,$$

$$m_{22}(k) = \frac{3\tau}{T^2} - \varepsilon_1 \omega^2 k^2 |\chi(i\omega k)|^2,$$

$$m_{12}(k) = \chi(i\omega k)/2 - \varepsilon_1 \omega^2 k^2 W(-i\omega k)\chi(i\omega k).$$

В силу условия (6) $\lim_{k\to\infty} m_{11}(k) > 0$. Предположение (7) равносильно неравенствам

$$\Delta(k) = \det \begin{bmatrix} m_{11}(k) & m_{12}(k) \\ \bar{m}_{12}(k) & m_{22}(k) \end{bmatrix} > 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{19}$$

причем ввиду условия (6) $\lim_{k\to\infty}\Delta(k) > 0$ и функция $\Delta(k)$ отделена от нуля равномерно по k. Очевидно, что $m_{11}(k) > 0$ при всех k, ибо в противном случае нарушилось бы свойство (19). Ввиду (6) $m_{11}(k)$ также отделена от нуля равномерно по k. Поэтому, согласно критерию Сильвестра, существует такое число $\delta > 0$, не зависящее от k и h, $\Phi_k^h > \delta\left(|c_k^h|^2 + |d_k^h|^2\right)$, и из формулы (18) вытекает оценка

$$J_h < -\Omega\delta \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(|c_k^h|^2 + |d_k^h|^2\right).$$

Устремляя $h \to 0$, приходим в силу (9) и (13) к неравенству

$$0 \le -\Omega\delta \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(|c_k|^2 + |d_k|^2\right),$$

которое может выполняться лишь при $c_k = d_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$, то есть при $u(t) \equiv v(t) \equiv 0$. Но тогда в силу (8) $\sigma(t) \equiv 0$, что противоречит предположению, что существующий Ω-периодический режим отличен от состояния равновесия. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы “Интеграция”(проект N 2. 1–326.53).

Список литературы

1. *Кунцевич В. М., Чеховой Ю. Н.* Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. Киев: Техника, 1970.

2. *Цыпкин Я. З., Попков Ю. С.* Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973.

3. *Гелиг А. Х., Чурилов А. Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб: Издательство С.-Петерб. ун-та, 1993.

4. *Розенвассер Е. Н.* Периодически нестационарные системы управления. М.: Наука, 1973.

5. *Гарбер Е. Д., Шифрин М. Ш.* Нелинейные задачи автоматического регулирования судовых энергетических установок. Л.: Судостроение, 1967.

6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.