ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 1999
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.938

С. П. Токарев[1]

О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе рассматриваются квазилинейные системы, естественным образом возникающие в задачах о локальной гладкой эквивалентности систем обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности инвариантного многообразия.

Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, когда многообразие сводится к точке. Предположим, что для двух систем с гладкими правыми частями и особой точкой в начале координат выполнено естественное необходимое условие их гладкой эквивалентности — формальная сопряженность, т. е. существует обратимая формальная замена, переводящая одну систему в другую. С помощью леммы Бореля [1] поднимем формальное преобразование до гладкой замены переменных. После этой замены в одной из систем она будет иметь правую часть, отличающуюся от правой части второй системы на плоскую функцию. Доказательство гладкой эквивалентности нетрудно свести к установлению существования решения с надлежащими свойствами у некоторой квазилинейной системы уравнений в частных производных первого порядка. При этом из изложенного выше вытекает, что без существенной потери в общности невязку в каждом из уравнений последней можно считать плоской функцией.

[1] **Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций:** 191065, Санкт-Петербург, наб., р. Мойки, д. 65. СПбГУТ. Кафедра высшей математики.

Первые результаты о локальной гладкой эквивалентности относились к случаю гиперболической особой точки и были получены в работах С. Стернберга и К. Т. Чена [2,3]. Оказалось, что в этой ситуации системы с правыми частями, отличающимися на плоское слагаемое, локально гладко эквивалентны. Раздувая особую точку в сферу, в гиперболическом случае получаем на прямом произведении сферы и интервала два гладких векторных поля, для траекторий которых сфера — инвариантное многообразие, при этом над некоторыми участками сферы траектории экспоненциально притягиваются к ней, над некоторыми — отталкиваются от нее; траекторий двоякоасимптотических к сфере нет. Эту ситуацию мы используем в качестве модели для дальнейшего.

Пусть M — гладкое замкнутое подмногообразие $\mathbb{R}^k$, (E, q, M) или, короче, E — трубчатая окрестность M, $\|\cdot\|$ — норма на слоях E, порожденная некоторой римановой метрикой. Отметим, что для дальнейшего выбор трубчатой окрестности и римановой метрики не является существенным. В $\mathbb{R}^k$ будем использовать евклидову норму $|\cdot|$, для матриц будем использовать норму, индуцированную евклидовой. Для многообразия с краем Q через ∂Q будем обозначать его край, а через $\operatorname{int} Q$ — множество внутренних точек.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = F(x) \tag{1}$$

с гладкой на E правой частью, для которой M — инвариантное многообразие. Обозначим через $\overline{x}(t, x)$ решение (1), удовлетворяющее начальному условию $\overline{x}(0, x) = x$. Предположим, что существуют два многообразия с краем U^+ и U^- ($\dim U^+ = \dim U^- = = \dim M$) такие, что

1) U^+ и U^- — подмногообразия M класса C^∞;

2) ∂U^+ и ∂U^- трансверсальны полю, соответствующему (1), траектории (1) через ∂U^+ покидают U^+, а через ∂U^- входят в U^-;

3) $\operatorname{int} U^+ \bigcup \operatorname{int} U^- = M$;

4) существуют $\delta_0 > 0$ и постоянные $C \geq 1$, $a > 0$, для которых

а) если $x \in E, ||x|| < \delta_0$ и $q(x) \in U^+$, то до тех пор пока $q(\overline{x}(t, x)) \in U^+$ при $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$||\overline{x}(t, x|| \leq C \exp(-at) \, ||x||; \tag{2}$$

б) если $x \in E, ||x|| < \delta_0$ и $q(x) \in U^-$, то до тех пор пока $q(\overline{x}(t, x)) \in U^-$ при

$t \leq 0$ выполняется неравенство

$$||\overline{x}(t, x|| \leq C \exp{(at)}\, ||x||. \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь квазилинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left(F(x) + F_1(x) + B(x, y) \right) = A(x, y), \qquad (4)$$

где $y = y(x)$ — неизвестная k_1-мерная вектор-функция, $F_1 \in C^\infty(E)$, $F_1(x) = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$, $A, B \in C^\infty(E \times \{y \in \mathbb{R}^{k_1} \mid |y| < \delta_0\})$, $B(x, 0) \equiv 0$, $A(x, 0)$ вместе с частными производными всех порядков стремится к нулю при $\|x\| \to 0$ быстрее любой степени $\|x\|$.

Т е о р е м а 1. *При перечисленных условиях система* (4) *имеет решение* $y = f(x)$, *где* $f(x)$ — *функция, гладкая в окрестности* M *и такая, что она сама и все ее производные стремятся к нулю при* $\|x\| \to 0$ *быстрее любой степени* $\|x\|$.

З а м е ч а н и е. U^+ и U^- в теореме 1 не предполагаются связными и в наиболее интересных случаях не являются таковыми.

Приведем еще один результат о разрешимости системы (4), близкий к теореме 1.

Пусть, как выше, M — гладкое замкнутое подмногообразие $\mathbb{R}^k$, (E, q, m) — его трубчатая окрестность и пусть, кроме того, $E = E^+ \oplus E^-$ — сумма Уитни двух подрасслоений. На E^+ и E^- фиксируем римановы метрики, порождающие на слоях нормы $\| \cdot \|_+$ и $\| \cdot \|_-$. Проекции в E на E^+ и E^- обозначим соответственно p^+ и p^-. Продолжим норму $\| \cdot \|_+$ на E, рассматривая $\|p^+(\cdot)\|_+$, аналогично поступим с $\| \cdot \|_-$. Введем на E риманову метрику так, чтобы соответствующая норма на слоях $\| \cdot \|$ имела вид

$$\| \cdot \|^2 = \| \cdot \|_+^2 + \| \cdot \|_-^2\, .$$

Снова рассмотрим систему (1) с гладкой на E правой частью и обшим решением $\overline{x}(t, x)$, для которой M — инвариантное многообразие. Предположим, что существуют две постоянные $R > 0$, $S > 0$ такие, что

1) $RS > 1$,

2) существуют $\delta_0 > 0$ и постоянные $C \geq 1$, $a > 0$ для которых

а) если $x \in E$, $\|x\| < \delta_0$ и $\|x\|_- \leq R\|x\|_+$, то до тех пор пока $\|\overline{x}(t, x)\|_- \leq R\|\overline{x}(t, x)\|_+$ при $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\|\overline{x}(t, x)\| \leq C\, \exp(-at)\|x\|\, ;$$

б) если $x \in E$, $\|x\| < \delta_0$ и $\|x\|_+ \leq S\|x\|_-$, то до тех пор пока $\|\overline{x}(t,x)\|_+ \leq S\|\overline{x}(t,x)\|_-$ при $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\|\overline{x}(t,x)\| \leq C \exp(at)\|x\|\,;$$

в) существуют $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ такие, что если $\|x\| < \delta_0$ и выполнено одно из неравенств

$$R - \varepsilon < \frac{\|x\|_-}{\|x\|_+} < R + \varepsilon\,, \quad \frac{1}{S} - \varepsilon < \frac{\|x\|_-}{\|x\|_+} < \frac{1}{S} + \varepsilon\,,$$

то

$$\|x\|_+^2 D(\|x\|_-^2) - \|x\|_-^2 D(\|x\|_+^2) \geq \mu\|x\|^4\,,$$

где — D оператор дифференцирования в силу системы (1).

Т е о р е м а 2. *Если F_1, A и B удовлетворяют условиям теоремы* 1, *то при перечисленных условиях система* (4) *имеет решение $y = f(x)$ с теми же аналитическими свойствами, что и в теореме* 1.

Из теорем 1 и 2 легко выводится такое следствие, обобщающее теорему С. Стернберга–К. -Т. Чена.

Т е о р е м а 3. *Если для системы* (1) *и функции F_1 выполнены предположения теоремы* 1 *или теоремы* 2, *то система*

$$\dot{x} = F(x) + F_1(x)$$

и любое плоское ее возмущение будут C^∞-эквивалентны в окрестности M.

Теоремы 1 и 2 доказываются аналогично, соответствующие рассуждения близки к изложенным в статье автора [4].

В заключение отметим, что теоремы 1–3 имеют естественные аналоги для диффеоморфизмов и для случая конечной гладкости.

Работа выполнена при частичной поддержке Государственной программы "Ведущие научные школы"(грант 96–15–96209). Статья подготовлена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция"(проект N 2. 1–326. 53).

Список литературы

1. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.

2. *Sternberg S.* The structure of local homeomorphisms // Amer. J. Math., 1959. V. 81. P. 578–604.

3. *Chen K.-T.* Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical points // Amer. J. Math., 1965. V. 85. P. 693–722.

4. *Токарев С. П.* C^∞-эквивалентность систем дифференциальных уравнений с экспоненциальной асимптотикой решений в окрестности инвариантного многообразия // Дифференц. уравнения, 1987. Т. 23, N 8. С. 1331-1342.