*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N 1, 1999*
*Электронный журнал,*
*рег. N П23275 от 07.03.97*

*http://www.neva.ru/journal*
*e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru*

*Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*

УДК 517. 925

*М. Р. Бортковская*[1]

# К ВОПРОСУ О РАЗРЕШЕНИИ СЛОЖНОЙ ОСОБЕННОСТИ $\mathbb{R}^3$-СИСТЕМЫ

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= Y_1(x,z) + yY_2(x,z) \equiv Y(x,y,z), \\ \dot{z} &= Z(x,z), \end{aligned} \tag{1}$$

где $Y_1$, $Y_2$, $Z$ — аналитические в точке $(0,0)$ функции $x$, $z$, разложения по степеням $x$, $z$ функций $Y_1$, $Z$ не содержат свободных и линейных членов, $Y_2(0,0) = 0$, точка $O = (0,0,0)$ — изолированная особая точка системы (1).

Под $O$-кривой системы (1), как обычно, будем понимать полутраекторию системы (1), примыкающую к точке $O = (0,0,0)$ при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем называть $O$-кривую системы (1) $O_i$-кривой, $i = 1, \ldots, 8$, если она в достаточной близости от точки $O$ лежит в $i$-м координатном октанте.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $L$ — $O_i$-кривая системы (1), в достаточной близости от $O$ представленная в виде

$$\{(x, y(x), z(x), x \in I_\Delta^{+(-)}\},$$

[1] **Санкт-Петербургский государственный технический университет:** 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д.29. Кафедра высшей математики.

где
$$I_\Delta^+ = (0, \Delta], I_\Delta^- = [-\Delta, 0), \Delta > 0.$$
Если существует
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln |y(x)|}{\ln |x|} = \gamma \in [0; +\infty],$$
то $\gamma$ назовем $y$-порядком кривизны $O_i$-кривой $L$;

если существует
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln |z(x)|}{\ln |x|} = \delta \in [0; +\infty],$$
то $\delta$ назовем $z$-порядком кривизны $O_i$-кривой $L$ (относительно $x$ при $x \to 0$).

Если оба указанных предела существуют, назовем пару $(\gamma, \delta)$ векторным порядком кривизны $O_i$-кривой $L$ (относительно $x$ при $x \to 0$).

В [2] предложен метод выявления возможных конечных $(\gamma, \delta \in (0; +\infty))$ векторных порядков $O_i$-кривых системы (1).

В настоящей статье даются некоторые достаточные условия, при которых можно установить наличие или отсутствие у системы (1) $O_i$-кривых с возможным векторным порядком $(\gamma, \delta)$.

Определение 3. Пусть $\gamma \in (0; +\infty)$, $\gamma$ — $y$-порядок кривизны $O_i$-кривой $L$. Если существует
$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{|x|^\gamma} = u_\gamma \in [-\infty; +\infty],$$
то $u_\gamma$— $y$-мера кривизны $L$.

Аналогично определим
$$v_\delta = \lim_{x \to 0} \frac{z(x)}{|x|^\delta}$$
$z$-меру кривизны $O_i$-кривой $L$, где $\delta$ — ее $z$-порядок кривизны, и векторную меру кривизны $(u_\gamma, v_\delta)$, в случае существования соответствующих пределов.

Определение 4. $O_i$-кривую назовем правильной, если она имеет
1) векторный порядок кривизны $(\gamma, \delta)$,
2) меру кривизны $u_\gamma$, если $\gamma \in (0; +\infty)$,
3) меру кривизны $v_\delta$, если $\delta \in (0; +\infty)$.

Определение 5. Пусть $(\gamma, \delta)$ — возможный конечный векторный порядок кривизны $O_i$-кривых системы (1). Будем говорить, что особенность системы (1) в точке $O$ относительно $(\gamma, \delta)$ разрешается, если удается выявить все правильные $O_i$-кривые системы (1) с порядком $(\gamma, \delta)$ или установить их отсутствие.

Для формулировки достаточных условий разрешимости особенности относительно $(\gamma, \delta)$ приведем основную идею метода нахождения возможных конечных порядков кривизны, изложенного в [2]. В [2] наряду с системой (1) рассмотрена система

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{Y(x,y,z)}{y}, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{Z(x,z)}{y}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Замена переменных

$$y = x^{\gamma}, z = x^{\delta} \quad (x > 0),$$

переводит (2) в систему

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dx} &= \frac{xY(x,x^{\gamma},x^{\delta}) - \gamma x^{2\gamma}}{x^{2\gamma+1}\ln x}, \\ \frac{d\delta}{dx} &= \frac{xZ(x,x^{\delta}) - \delta x^{\gamma+\delta}}{x^{\gamma+\delta+1}\ln x}. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть

$$Y_1(x,z) = \sum_{k+m=2}^{+\infty} a^{(1)}_{k,m} x^k z^m,$$

$$Y_2(x,z) = \sum_{l+n=1}^{+\infty} a^{(2)}_{l,n} x^l z^n,$$

$$Z(x,z) = \sum_{p+s=2}^{+\infty} b_{p,s} x^p z^s,$$

тогда

$$\Phi(x,\gamma,\delta) = \sum_{k+m=2}^{+\infty} a^{(1)}_{k,m} x^{1+k+m\delta} + \sum_{l+n=2}^{+\infty} a^{(1)}_{2,n} x^{1+l+n\delta+\gamma} - \gamma x^{2\gamma},$$

$$\Psi(x,\gamma,\delta) = \sum_{p+s=2}^{+\infty} b_{p,s} x^{1+p+s\delta} - \delta x^{\gamma+\delta}.$$

В [2] для нахождения возможных порядков кривизны использовался метод ломаных Фроммера, изложенный в [1], а именно

1) выявлялись множества $Q_1$ и $Q_2$ абсцисс ломаных Фроммера функций $xY_1(x,z)$, $xY_2(x,z)$;

2) точками множества $Q_1 \bigcup Q_2$ полуось $\{\delta > 0\}$ разбивалась на конечное число интервалов, а область $\{(\gamma,\delta)|\gamma > 0, \delta > 0\}$ — на соответствующие полуполосы;

3) в каждой такой полуполосе строились отрезки прямых вида

$$\begin{aligned} 2\gamma &= 1 + k + m\delta, \\ 1 + \gamma + l + n\delta &= 1 + k + m\delta, \\ 2\gamma &= 1 + \gamma + l + n\delta, \end{aligned} \tag{4}$$

где $2\gamma$, $1+k+m\delta$, $1+\gamma+l+n\delta$ — наименьшие для данной полуполосы показатели $x$ в разложениях по степеням $x$ функций $\gamma x^{2\gamma}$, $xY_1(x,x^\delta)$, $xY_2(x,x^\delta)$, входящих в $\Phi$ как слагаемые.

В результате построения, описанного в [2], область $\{(\gamma,\delta)|\gamma > 0, \delta > 0\}$ разбивалась на конечное число областей; изучалось множество $C_1$ граничных точек этих областей; все точки $C_1$ лежат на прямых вида (4) или на лучах вида $\{(\gamma,\delta)|\gamma > 0, \delta = \text{const}\}$.

Аналогично строилось множество $S$ абсцисс ломаных Фроммера функции $xZ(x,z)$ и по разложению функции $\Psi(x,\gamma,\delta)$ по степеням $x$ строилось соответствующее множество $C_2$.

В [2] показано, что возможными конечными векторными порядками кривизны $O_i$-кривых системы (1) являются координаты $(\gamma,\delta)$ точек множества $C_1 \bigcap C_2$.

О п р е д е л е н и е 6. Точку $(\gamma,\delta) \in C_1$ назовем простой точкой $C_1$, если $\delta \notin Q_1 \bigcup Q_2$, и через эту точку проходит только одна прямая вида (4). Точку $(\gamma,\delta) \in C_2$ назовем *простой точкой* $C_2$, если $\delta \notin S$.

О п р е д е л е н и е 7. Возможный конечный порядок $(\gamma,\delta)$ $O_i$-кривых системы (1) назовем простым, если $(\gamma,\delta)$ одновременно удовлетворяет условиям:

а) $(\gamma,\delta)$ — простая точка как $C_1$, так и $C_2$;

б) $(\gamma,\delta)$ — изолированная точка множества $C_1 \bigcap C_2$.

Исходя из вида прямых (4), а также из вида показателей степени $x$ в разложении функции $\Psi$, укажем вид прямых, пересечения которых могут давать простые возможные порядки. Имеются три возможности:

$$\begin{cases} 2\gamma &= 1+k+m\delta, \\ \gamma+\delta &= 1+p+s\delta, \end{cases} \qquad (I)$$

$k+m \geq 2$, $p+s \geq 2$, $\dfrac{m}{2} \neq s-1$ (прямые пересекаются в одной точке);

$$\begin{cases} 2\gamma &= 1+\gamma+l+n\delta, \\ \gamma+\delta &= 1+p+s\delta, \end{cases} \qquad (II)$$

$l+n \geq 1$, $p+s \geq 2, n \neq s-1$;

$$\begin{cases} 1+\gamma+l+n\delta &= 1+k+m\delta(< 2\gamma), \\ \gamma+\delta &= 1+p+s\delta, \end{cases} \qquad (III)$$

$m-n \neq s-1$; $l+n \geq 1, k+m, p+s \geq 2$; $k,l,m,n,p,s \in \mathbf{N}$ во всех случаях.

О п р е д е л е н и е 8. Простой возможный порядок кривизны $(\gamma,\delta)$ назовем простым порядком типа $I$, $II$ или $III$, если точка $(\gamma,\delta)$ получена как пересечение прямых вида $(I)$, $(II)$ или $(III)$, соответственно.

Для разрешения особенности в точке $O$ относительно $(\gamma,\delta)$ будем использовать обобщенный $\sigma$-процесс, как это делалось в [3], [4], а именно используем локальные замены переменных вида

$$x = x, \qquad u = yx^{-\gamma}, \qquad v = zx^{-\delta} \qquad (x \neq 0), \quad (5.1)$$

$$f = xy^{-\frac{1}{\gamma}}, \qquad y = y, \qquad g = zy^{-\frac{\delta}{\gamma}} \qquad (y \neq 0), \quad (5.2)$$

$$q = xz^{-\frac{1}{\delta}}, \qquad r = yz^{-\frac{\gamma}{\delta}}, \qquad z = z \qquad (z \neq 0)\,. \quad (5.3)$$

В качестве параметров $\sigma$-процесса $\gamma,\delta$ возьмем возможный порядок кривизны.

Т е о р е м а 1. *Пусть возможный векторный порядок кривизны $O_i$-кривых системы* (1) $(\gamma,\delta)$ *является простым порядком типа $I$. Тогда особенность в точке $O$ относительно порядка* $(\gamma,\delta)$ *разрешается (с точностью до решения проблемы центра–фокуса* $(x,u,v)$*-системы).*

Идея д о к а з а т е л ь с т в а. Сделаем в (1) замену (5.1), где параметры $\gamma,\delta$ — рассматриваемы простой порядок. В силу уравнений $(I)$ и способа построения множеств $C_1, C_2$ (см. [2]) наименьшим показателем

$x$ в разложении по степеням $x$ функции $Y(x, ux^\gamma, vx^\delta)$ является показатель вида $k+m\delta$, равный $2\gamma-1$, а в разложении $Z(x, vx^\delta)$ — показатель вида $p+s\delta$, равный $\gamma+\delta-1$. По определению 8 в каждом из этих разложений имеется лишь по одному члену с наименьшим показателем. Поделив полученную заменой (5.1) $(x, u, v)$-систему на $x^{\gamma-1}$, получим (эквивалентную при $x > 0$) систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ux, \\ \dot{u} &= av^m - \gamma u^2 + x^\alpha g_1(x, u, v), \\ \dot{v} &= bv^s - \delta uv + x^\beta g_2(x, u, v), \end{aligned} \tag{6}$$

$\alpha,\ \beta > 0$, $\quad a,\ b = \text{const} \neq 0$, $\quad g_1,\ g_2$ — непрерывны при $(x, u, v) \in \{0 \leq x < \Delta_1;\ |u| < \dfrac{\Delta_1}{x^\gamma};\ |v| < \dfrac{\Delta_1}{x^\delta}\}$, $\Delta_1 > 0$ достаточно мало.

Найдем особые точки (6) вида $(0, u_0, v_0)$. Если $u_0 v_0 \neq 0$, то

$$u_0 = \frac{b}{\delta} v_0^{s-1}, \quad av_0^m = \gamma \frac{b^2}{\delta^2} v_0^{2(s-1)}. \tag{7}$$

При $m, s > 0$ система (6) имеет также особую точку $(0, 0, 0)$.

Так как по условию $m \neq 2(s-1)$, система (6) имеет конечное число особых точек вида $(0, u_0, v_0)$. Покажем, что любая из них — простая (если $u_0 v_0 \neq 0$). Так как $u_0 \neq 0$, достаточно рассмотреть особую точку $(u_0, v_0)$ системы

$$\begin{aligned} \dot{u} &= av^m - \gamma u^2 \equiv P(u, v), \\ \dot{v} &= bv^s - \delta uv \equiv Q(u, v). \end{aligned}$$

Используя (7), вычислим

$$\left|\frac{\partial(P, Q)}{\partial(u, v)}\right|\Bigg|_{(u_0, v_0)} = a\delta v_0^m (2 + m - 2s) \neq 0,$$

так как $m \neq 2(s-1)$ по условию.

Если не возникает проблемы центра–фокуса, то, исследуя расположение траекторий системы (6) в окрестности простой особой точки $(0, u_0, v_0)$, мы тем самым найдем $O_i$-кривые системы (1) с векторным порядком кривизны $(\gamma, \delta)$ и мерой кривизны $(u_0, v_0)$.

В условиях теоремы можно показать, что даже при наличии у системы (6) особой точки $(0, 0, 0)$ система (1) не будет иметь $O_i$-кривых с векторным порядком кривизны $(\gamma, \delta)$ и мерой $(0, 0)$.

Исследование систем, полученных из (1) заменами (5.2), (5.3), позволяет в условиях теоремы показать отсутствие системы (1) с порядком кривизны $(\gamma, \delta)$ и бесконечными мерами кривизны $u_\gamma$ и (или) $v_\delta$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $(\gamma, \delta)$ — *возможный векторный порядок кривизны* $O_i$*-кривых системы* (1) *является простым порядком типа* $II$. *Тогда особенность системы* (1) *в точке* $O$ *относительно порядка* $(\gamma, \delta)$ *разрешается (с точностью до решения проблемы центра–фокуса* $(x, u, v)$*-системы).*

Эта теорема доказывается аналогично предыдущей.

З а м е ч а н и е. При исследовании простых возможных порядков кривизны типа $III$ возникают существенные трудности, так как для соответствующих $(x, u, v)$-систем точки $(0, u_0, v_0)$, где $(u_0, v_0)$ — возможные меры кривизны, являются сложными особыми точками.

Работа выполнена при частичной поддержке Государственной программы "Ведущие научные школы"(грант N 96-15-96209). Статья подготовлена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция"(проект N 2. 1–326.53).

Список литературы

1) *Андреев А. Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений. Минск, 1979.

2) *Бортковская М. Р.* Асимптотика $O$-кривых для одного класса систем дифференциальных уравнений в $\mathbf{R}^3$ // Прикладная математика. Труды СПбГТУ, 1996. N 461. С. 42–46.

3) *Пилюгина В. Б.* Исследование системы с тройным нулевым характеристическим корнем // Дифференц. уравнения, 1980. Т. 16, N 8. С. 1520–1522.

4) *Капитанов А. Я.* Качественное исследование одной системы в пространстве $\mathbf{R}^3$ // Дифференц. уравнения, 1984. Т. 20, N 2. С. 229–233.