ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 1999
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Управление в сложных системах

НАСЛЕДСТВЕННЫЕ МУЛЬТИСЕЛЕКТОРЫ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ИХ ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

А.Г.ЧЕНЦОВ

Аннотация.

Рассматриваются многозначные отображения (мультифункции), действующие в функциональных пространствах, а также операторы, осуществляющие поточечное сжатие упомянутых отображений. Среди всевозможных мультифункций с общей областью определения выделяются наследственные по отношению к заданному априори семейству множеств. Исследуется структура наследственных мультиселекторов произвольных мультифункций. Рассматриваются итерационные конструкции построения таких мультиселекторов и возможности "параллельной"реализации этих конструкций. Применения упомянутых теоретических конструкций могут быть, в частности, связаны с вопросами управления в условиях неопределенности. В этой версии речь идет об использовании управляющих процедур типа откликов на реализации помех. Это могут быть произвольные отклики (псевдостратегии), соответствующие программным задачам с информационной дискриминацией стороны (игрока), формирующей помехи. Другой тип управляющих откликов характеризуются условием физической осуществимости (неупреждаемости): речь идет о т.н. квазистратегиях. Применение конструкций настоящей работы связано с многозначными версиями псевдо-

стратегий и квазистратегий, причем квазистратегии такого типа интерпретируются как мультиселекторы ”псевдостратегий”.[1]

1. Мотивирующие примеры.

Рассмотрим ряд задач, связанных с принятием решений в условиях неопределенности о факторах, влияющих на достижение соответствующих целей. Действия, направленные на достижение этих целей, предполагается формировать в виде откликов на реализации этих (априори неопределенных) факторов. Мы начнем рассмотрение с примера дифференциальной игры [1,2].

Рассмотрим следующие две управляемые системы Σ_1 и Σ_2, функционирующие в n-мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ на конечном промежутке времени $\mathbf{I}_0 \triangleq [t_0, \vartheta_0]$ $(t_0 < \vartheta_0)$, где (здесь и ниже) $\triangleq$ обозначает равенство по определению. Система Σ_1 описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = f(t, y) + B(t)u, \quad u \in P, \tag{1.1}$$

где $f(\cdot,\cdot)$ и $B(\cdot)$ — непрерывные отображения, первое из которых есть вектор-функция, а второе — матрицант, P — непустой выпуклый компакт в пространстве $\mathbb{R}^p$; система Σ_2 описывается уравнением

$$\dot{z} = g(t, z) + C(t)v, \quad v \in Q, \tag{1.2}$$

где $g(\cdot,\cdot)$, $C(\cdot)$ и Q удовлетворяют аналогичным условиям (непрерывность отображений, выпуклость и компактность непустого множества Q, $Q \subset \mathbb{R}^q$). Полагаем, кроме того, что $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ — суть вектор-функции, удовлетворяющие локальной версии условия Липшица по второму аргументу, а также известному условию подлинейного роста (условия такого типа подробно обсуждаются в [1],[2,с.37,38],[3,с.52] и мы сейчас на них не останавливаемся). Заметим, что здесь можно было бы рассматривать и более общие уравнения движения, но мы ограничимся для простоты только данным (весьма частным) случаем. Фиксируем для систем (1.1),(1.2) соответствующие начальные условия $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ и $z(t_0) = z_0 \in \mathbb{R}^n$. Через $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ обозначаем сейчас множества всех борелевских отображений из $\mathbf{I}_0$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00458).

в P и в Q соответственно; тогда $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — суть множества управляющих программ, допускающих использование в (1.1) и в (1.2) соответственно. Полагаем, что системой (1.1) управляет игрок I, который стремится к осуществлению встречи движений систем (1.1),(1.2) на отрезке $\mathbf{I}_0$. Игрок II, управляющий системой (1.2), стремится избежать этой встречи. Последняя определяется требованием: движения $y(\cdot) = (y(t) \in \mathbb{R}^n,\ t_0 \leq t \leq \vartheta_0)$ и $z(\cdot) = (z(t) \in \mathbb{R}^n,\ t_0 \leq t \leq \vartheta_0)$ в некоторый момент $\xi = \xi(y(\cdot), z(\cdot)) \in \mathbf{I}_0$ удовлетворяют условию $\|y(\xi) - z(\xi)\| \leq \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ — эвклидова норма в $\mathbb{R}^n$, а $\varepsilon \in [0, \infty[$ задано априори. Мы понимаем при этом движения систем (1.2),(1.3) с борелевскими управлениями в правых частях, как решения соответствующих дифференциальных уравнений в смысле Каратеодори (см., например,[4],[5]). Возникающая конфликтная ситуация доставляет естественный пример дифференциальной игры [1-3]. Формализация Н.Н.Красовского определяет строгую математическую постановку этой игры, допуская при этом использование разрывных законов управления по принципу обратной связи, и, вместе с тем, определяет естественные для инженерных задач аппроксимативные процедуры реализации этих законов. В рамках этой формализации Н.Н.Красовский и А.И.Субботин установили основополагающую теорему об альтернативе в дифференциальной игре сближения-уклонения (см., например, [1]). Известно [3,6,7], что вышеупомянутая позиционная формализация игрового управления эквивалентна по результату формализации в классе т.н. квазистратегий (вообще говря, многозначных). Последнее понятие восходит к [8] (см. также [9,10]), где рассматривалась конструкция с использованием однозначных неупреждающих откликов, интерпретируемых в виде управляющих процедур. В настоящей задаче можно использовать следующий известный [9] вариант откликов такого рода. Именно, введем в рассмотрение множество $\mathbf{Y}_0$ всех траекторий системы (1.1), порожденных каждая некоторой управляющей программой $U \in \mathcal{U}$ из позиции (t_0, x_0); $\mathbf{Y}_0$ есть непустой компакт в пространстве $C_n(\mathbf{I}_0)$ всех непрерывных функций из I_0 в $\mathbb{R}^n$, оснащаемом естественной метрикой равномерной сходимости. Аналогично, через $\mathbf{Z}_0$ обозначаем множество всех траекторий системы (1.2), порожденных каждая некоторой управляющей программой $V \in \mathcal{V}$ из позиции (t_0, x_0); $\mathbf{Z}_0$ также является компактом в $C_n(\mathbf{I}_0)$ с метрикой равномерной сходимости. Всякое отображение α из $\mathbf{Z}_0$ в $\mathbf{Y}_0$ будем называть сейчас псевдостратегией игрока I, что согласуется в идейном отношении с [10]. Если псевдостратегия α

является неупреждающей в том смысле, что

$$\forall z^{(1)} \in \mathbf{Z}_0 \ \forall z^{(2)} \in \mathbf{Z}_0 \ \forall t \in \mathbf{I}_0 : \ \ ((z^{(1)} \mid [t_0, t]) = (z^{(2)} \mid [t_0, t])) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow ((\alpha(z^{(1)}) \mid [t_0, t]) = (\alpha(z^{2)}) \mid [t_0, t])), \tag{1.3}$$

где используется обычное понятие сужения функции на подмножество ее области определения, то называем α квазистратегией игрока I, что на идейном уровне согласуется с [8]. Ограничения типа (1.3) существенны уже в простейших примерах (см., например, [3,гл.IV]), если иметь в виду вопрос о достижении качества, гарантируемого в классе позиционных стратегий (см. в этой связи также [3,с.18-21]). Псевдостратегию и, в частности, квазистратегию α уместно назвать разрешающей задачу о встрече, если

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbf{Z}_0 \ \exists \xi \in \mathbf{I}_0 : \ \|\alpha(\mathbf{z})(\xi) - \mathbf{z}(\xi)\| \leq \varepsilon. \tag{1.4}$$

Нередко сравнительно просто удается указать разрешающую псевдостратегию, в то время как построение аналогичной квазистратегии представляет серьезные затруднения, а иногда просто невозможно. Отметим, что соотношения (1.3),(1.4) допускают очевидные многозначные версии, которые были реализованы и [3,6,7,11-15] в более общей постановке на пространствах управлений-мер. В этом смысле для нас прежде всего интересен многозначный аналог (1.4): в виде реакции на траекторию $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}_0$ мы рассматриваем теперь множество

$$\alpha_0(\mathbf{z}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_0 \mid \exists \xi \in \mathbf{I}_0 : \ \|\mathbf{y}(\xi) - \mathbf{z}(\xi)\| \leq \varepsilon\}. \tag{1.5}$$

Отображение α_0, конструируемое теперь на основе (1.5) в виде мультифункции, не удовлетворяет зачастую условию неупреждаемости (физической осуществимости), получающемуся очевидной редукцией (1.3), но является "исчерпывающе полным"с точки зрения целевой установки игрока I. Поэтому, используя (1.5) в виде многозначной "псевдостратегии", разрешающей поставленную задачу, для построения соответствующей разрешающей квазистратегии (также многозначной) достаточно рассматривать мультиселекторы α_0, если речь идет об однозначных откликах на реализации $\mathbf{z}$ в духе [8-10]. Сжатие α_0 (1.5) до многозначной квазистратегии, если таковая существует, всегда можно [16,17] осуществить посредством итерационной процедуры, являющейся по сути дела версией метода программных итераций (МПИ) [11-15]. При этом сама целевая установка решаемой задачи формализуется посредством выбора начального элемента итерационной последовательности, а оператор, ответственный за исполнение итераций, восстанавливает многозначную версию (1.3) в пределе, хотя нередко последнее достигается уже после исполнения конечного числа итераций. Отметим, что, как видно из (1.3)-(1.5), конструкция управляющих процедур-откликов может быть распространена на существенно более общий класс задач динамики. Так, например, вместо систем (1.1),(1.2) можно было бы рассматривать дифференциальные включения, либо заданные аксиоматически динамические системы. В то же время в некоторых постановках целесообразно не только сохранить (1.1), (1.2) для представления соответствующих динамических систем, но и перенести процедуры типа α, α_0 в пространства управлений (см. [8]), либо их обобщенных аналогов, как это сделано в [3, гл. IV], [11–14]. Полезно заметить, что явление, лежащее в основе перехода от многозначной "псевдостратегии"к квазистратегии-селектору, типично и для многих задач, не относящихся к теории управления. Рассмотрим с целью иллюстрации отрезок $I \triangleq [-2,2]$ и некоторое непустое множество Φ в пространстве $C(I)$ всех вещественнозначных (в/з) функций на I. Пусть, кроме того, Φ_0 — некоторое иное, вообще говоря, непустое множество в $C(I)$, элементы которого могут рассматриваться в виде аппроксимативных аналогов функций из Φ. Если $\varphi \in \Phi$ и $\varphi_0 \in \Phi_0$ таковы, что $\mid \varphi(x) - \varphi_0(x) \mid \leq \varepsilon$ при всех $x \in I$, где $\varepsilon \in [0, \infty[$ задано априори, то полагаем, что φ_0 пригодно для приближенного воспроизведения φ. Пусть, однако, информация об аппроксимируемой функции φ поступает "по частям": сначала становится известным след $\varphi^{(1)} \triangleq (\varphi \mid [-1,1])$ данной функции на отрезок $[-1,1]$, который и должен быть приближен посредством $\varphi_0^{(1)} \triangleq (\varphi_0 \mid [-1,1])$, после чего "проявляется"оставшаяся часть φ, соответствующая значениям аргумента из $I \backslash [-1,1]$. В этой ситуации отображение φ_0 может оказаться непригодным для приближенного воспроизведения φ в целом, коль скоро начальный "отрезок"$\varphi_0^{(1)}$ этого отображения уже "истрачен"и замене не подлежит. Сама неясность в конкретном выборе отображения $\varphi \in \Phi$, распространяющегося "из нуля", может быть связана, в частности, с действием неопределенных факторов (аномалий) в точках $x \in I$, $\mid x \mid = 1$, через которые предстоит "прохождение"аргумента функции φ по мере ее формирования, как целого. В этой ситуации может и не оказаться способа так выбрать $\varphi_0^{(1)}$ в ответ на $\varphi^{(1)}$, что при всевозможных вариантах развития φ осуществлялась бы соответствующая аппроксимативная реализация данной функции, несмотря на то, что каждая такая отдельно взятая функция φ соответствующее приближение в Φ_0 допускает. Такая ситуация может, в частности, складываться, когда Φ_0 есть множество функций-констант, в то время как элементы $\varphi \in \Phi$ константми, вообще говоря, не являются. Нетрудно привести и менее тривиальные примеры.

Несмотря на различия в постановке двух вышеупомянутых содержательных задач, можно выделить их общую особенность; в том и другом случае оказалось важным использование неупреждающих откликов на неопределенные априори воздействия, подчиненных соображениям гарантированного достижения требуемой цели. Заметим, что второй пример может быть реализован в векторном варианте, когда отрезок $I = [-2, 2]$, на котором осуществляется приближенное воспроизведение функции из Φ, может быть заменен компактным множеством в $\mathbb{R}^n$, а "промежуточное"множество $[-1, 1]$ может быть не единственным (имеется в виду случай, когда вместо $[-1, 1]$ задается система "расширяющихся"множеств, в терминах которых последовательно реализуются с требуемой точностью ε, $\varepsilon > 0$, сужения аппроксимируемой функции из Φ, которая становится известной исследователю "по частям"). Требуемое здесь свойство наследственности отклика может быть связано, таким образом, необязательно с неупреждаемостью в "обычном"смысле, как это было принято в отношении квазистратегий, где преобразованию подвергались функции времени. В этой связи рассмотрим еще один модельный пример.

Пусть E — непустое множество, $\mathcal{L}$ — полуалгебра подмножеств E, $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — множество всех конечно-аддитивных (к.-а.) мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$, $B_0(E, \mathcal{L})$ — линейная оболочка множества всех индикаторов [18, с. 56] множеств из $\mathcal{L}$ (линейные операции в пространстве функционалов на E определяем поточечно), а $B(E, \mathcal{L})$ — замыкание $B_0(E, \mathcal{L})$ в банаховом пространстве (БП) $\mathbb{B}(E)$ всех ограниченных функционалов на E с традиционной sup-нормой $\| \cdot \|$ [19, с. 261]. Фиксируем две функции $u \in B(E, \mathcal{L})$ и $v \in B(E, \mathcal{L})$, а также замкнутое множество Y на плоскости. Ситуацию

$$(\int\limits_E u d\mu, \int\limits_E v d\nu) \in Y, \tag{1.6}$$

где $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и интеграл понимается в соответствии с простейшим определением [20, гл. 3], [21, гл. 3], будем интерпретировать, как соблюдения интегрального ограничения, определяемого в терминах триплета (u, v, Y). Мы полагаем при этом, что выбор μ осуществляется произвольно в пределах непустого множества $\mathbb{M}$, $\mathbb{M} \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$, а выбор ν — в пределах непустого $*$-слабо компактного множества $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$. При этом $*$-слабая топология $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ соответствует известному ([19, гл. IV], [20, гл. 3], [21, гл. 3]) отождествлению $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ и пространства $B^*(E,\mathcal{L})$, топологически сопряженного к БП $B(E,\mathcal{L})$; последнее рассматривается, как подпространство (п/п) БП $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$. Полезно отметить, что $*$-слабая топология $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, вообще говоря, сильнее, чем топология поточечной сходимости (множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$), индуцированная из тихоновского произведения экземпляров вещественной прямой $\mathbb{R}$ (в обычной $|\cdot|$-топологии) с индексным множеством $\mathcal{L}$. Из этого обстоятельства следует, в частности, что $*$-слабо компактные подмножества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ компактны и в топологии поточечной сходимости $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, а (относительные) топологии всякого $*$-слабо компактного подмножества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, индуцированные из $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, рассматриваемого в $*$-слабой топологии и в топологии поточечной сходимости, совпадают (см. [22, с. 199]). Введем в рассмотрение следующую мультифункцию α^0. Именно, α^0 мы определяем в виде отображения из $\mathbb{M}$ в семейство всех подмножеств $\mathbb{K}$ такое, что $\forall \mu \in \mathbb{M}$:

$$\alpha^0(\mu) \stackrel{\triangle}{=} \{\nu \in \mathbb{K} \mid (\int\limits_E u d\mu, \int\limits_E v d\nu) \in Y\}. \tag{1.7}$$

Итак, α^0 есть "целевое"отображение, определяющее реакцию на $\mu \in \mathbb{M}$ в терминах соблюдения условия (1.6). В силу замкнутости Y и хорошо известных свойств $*$-слабо компактных множеств в пространствах, топологически сопряженных к БП, имеем [19, гл. V], что (1.7) есть всякий раз $*$-слабо компактное множество и, стало быть, α^0 компактнозначно, как отображение из $\mathbb{M}$ в семейство всех подмножеств $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ с топологией поточечной сходимости (здесь мы имеем аналогию со свойствами α_0 (1.5)). Предположим, однако, что меры μ и ν требуется построить посредством последовательно исполняемого продолжения с более "простых"измеримых структур на все более обширные п/п $\mathcal{L}$. Именно, допустим, что имеется некоторое множество $\mathbb{L}$, $\mathbb{L} \neq \emptyset$, непустых подсемейств $\mathcal{L}$, на которые распространяется μ и, вслед за этим, ν. Естественный теперь уже вопрос касается возможности неупреждающего развития ν. Иными словами, можно ли и, если можно, то как построить отображение β, действующее из $\mathbb{M}$ в семейство всех непустых подмножеств $\mathbb{K}$ и такое, что: 1) $\forall \mu_1 \in \mathbb{M}$ $\forall \mu_2 \in \mathbb{M}$ $\forall \mathcal{H} \in \mathbb{L}$:

$$((\mu_1 \mid \mathcal{H}) = (\mu_2 \mid \mathcal{H})) \Longrightarrow (\{(\nu \mid \mathcal{H}) : \ \nu \in \beta(\mu_1)\} =$$

$$= \{(\nu \mid \mathcal{H}) : \nu \in \beta(\mu_2)\}); \tag{1.8}$$

2) $\beta(\mu) \subset \alpha^0(\mu)$ при $\mu \in \mathbb{M}$. Свойство (1.8) имеет смысл наследственности β по отношению к развитию $\mu \in \mathbb{M}$ вплоть до реализации $\mu(L)$ при всех $L \in \mathcal{L}$. Здесь $\mathbb{L}$ имеет смысл множества возможных стадий, которые должен пройти процесс построения к.-а. мер μ и ν. Так, например, $\mathbb{L}$ может быть множеством всех непустых подсемейств $\mathcal{L}$. В другом случае в качестве $\mathbb{L}$ может быть задано линейно упорядоченное по вложению множество непустых подсемейств $\mathcal{L}$. В этом случае, при наличии наследственного, в смысле (1.8), отклика β, развитие $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ можно рассматривать, как динамический процесс последовательного продолжения фрагментов μ и ν. Если, к тому же, $\mathcal{L} \in \mathbb{L}$, то имеем в упомянутом процессе своеобразный "финиш"в виде объемлющей измеримой структуры $\mathcal{L}$. Остановимся подробнее на этом последнем случае, имея в виду осуществление "кусочно-программной"процедуры, сходной в идейном отношении с некоторыми построениями в теории дифференциальных игр. В самом деле, пусть n — натуральное число, а $(\mathcal{H}_i)_{i\in\overline{1,n}}$ — линейно упорядоченный кортеж в $\mathbb{L}$, занумерованный "по возрастанию"(т.е. $\mathcal{H}_j \subset \mathcal{H}_{j+1}$ при $j \in \overline{1,n}, j \neq n$) и такой, что $\mathcal{H}_n = \mathcal{L}$. В этом случае реализацию пары $(\mu,\nu) \in \mathbb{M} \times \mathbb{K}$ посредством отклика β можно трактовать следующим образом. Именно, в множестве $\mathbb{M}_1 \stackrel{\triangle}{=} \{(\mu \mid \mathcal{H}_1) : \ \mu \in \mathbb{M}\}$ выбирается $\mu_1 \in \mathbb{M}_1$, после чего формируется $\nu^{(1)} \in \beta(\mu^{(1)})$, где $\mu^{(1)} \in \mathbb{M}$ удовлетворяет условию $\mu_1 = (\mu^{(1)} \mid \mathcal{H}_1)$. Мы учитываем далее (1.8). В свете последнего соотношения при $n \geq 2$ выбирается $\mu^{(2)} \in \mathbb{M}$ со свойством $\mu_1 = (\mu^{(1)} \mid \mathcal{H}_1) = (\mu^{(2)} \mid \mathcal{H}_1)$. Мотивы смены $\mu^{(1)} \to \mu^{(2)}$ в данном случае не обсуждаем, считая, что этим ведает некоторый "игрок-противник", который, быть может, имеет свои интересы в процессе развития $\mu \in \mathbb{M}$. Согласно (1.8) $(\nu^{(1)} \mid \mathcal{H}_1)$ может рассматриваться, как элемент множества $\{(\nu \mid \mathcal{H}_1) : \ \nu \in \beta(\mu^{(2)})\}$. С учетом этого выбирается $\nu^{(2)} \in \beta(\mu^{(2)})$, для которого $(\nu^{(1)} \mid \mathcal{H}_1) = (\nu^{(2)} \mid \mathcal{H}_1)$. Тем самым формируется $(\nu^{(2)} \mid \mathcal{H}_2)$, где $\nu^{(2)}$ к.-а. мера ограниченной вариации, определенная на $\mathcal{L}$. Далее, при $n \geq 3$ выбирается $\mu^{(3)} \in \mathbb{M}$ со свойством $(\mu^{(2)} \mid \mathcal{H}_2) = (\mu^{(3)} \mid \mathcal{H}_2)$. В силу (1.8) имеем, что $(\nu^{(2)} \mid \mathcal{H}_2)$ есть элемент $\{(\nu \mid \mathcal{H}) : \ \nu \in \beta(\mu^{(3)})\}$. Мы выбираем $\nu^{(3)} \in \beta(\mu^{(3)})$ со свойством $(\nu^{(2)} \mid \mathcal{H}_2) = (\nu^{(3)} \mid \mathcal{H}_2)$. Далее процесс повторяется вплоть до реализации $\mu^{(n)} \in \mathbb{M}$ и $\nu^{(n)} \in \beta(\mu^{(n)})$. Мы получили пошаговую динамическую процедуру продолжения к.-а. меры, в итоге применения которой будем непременно иметь пару $(\mu^{(n)}, \nu^{(n)}) \in \mathbb{M} \times \mathbb{K}$ со свойством (1.6) в условиях $\mu = \mu^{(n)}$ и $\nu = \nu^{(n)}$. Итак, при условии, что нетривиальный наследственный отклик β, подчиненный отображению α^0 (1.7), построен, можно рассматривать естественные процедуры пошаговой реализации терминального условия (1.6),

сходные с кусочно-программными версиями разыгрывания партий дифференциальной игры. По сути дела, именно определение отображения β, являющегося мультиселектором α^0, составляет (как, впрочем, и определение неупреждающих откликов в двух предыдущих примерах) основную проблему. Именно этой проблемой в весьма общей ее постановке мы и будем заниматься в дальнейшем. Речь пойдет, следовательно, о построении мультиселекторов, или многозначных селекторов (МС), многозначных отображений (МО), или мультифункций, действующих в функциональных пространствах. Элементы этих пространств не всегда естественно, как мы уже видели на примерах, интерпретировать в виде функций времени. Основным методом построения наследственных МС заданного априори МО является при этом итерационная процедура, для которой исходное МО является начальным элементом. Эта итерационная процедура, в отличие от МПИ [11–15] является "прямой", реализуемой на исходном пространстве МО; она допускает, как правило, "распараллеливание", т.е. независимую реализацию локальных итерационных процессов с последующей склейкой предельных элементов.

Одним из наиболее важных представляется вопрос о существовании нетривиальных наследственных МС заданного МО. Речь идет об исключении той ситуации, для которой при заданном МО с непустыми значениями может оказаться, что всякий наследственный МС этого МО в некоторых точках своей области определения принимает в качестве значения пустое множество $\emptyset$. Такая возможность (отрицательного характера) уже отмечалась в отношении второго из ранее рассмотренных примеров. Много примеров такого рода известно в теории дифференциальных игр. Изучение данной возможности удается далее связать с одной весьма интересной проблемой, которая была обозначена ранее (см., например, [13,15,22]) для МПИ в задачах конфликтного управления. Речь идет о тех случаях, когда последовательность итераций, реализующая построение функции цены (потенциала) игры или множества позиционного поглощения стабилизируется после конечного числа итераций.

2. Наследственные мультиселекторы многозначных отображений, как неподвижные точки операторов на пространствах мультифункций.

Как уже отмечалось, в данной статье проблема определения наследственных МС априорных МО рассматривается для отображений, которые не обязательно связаны с преобразованием функций времени. Примеры предыдущего раздела определяют широкий круг возможных постановок, которые только на первый взгляд представляются умозрительными и весьма экзотическими, а на самом деле могут быть полезными при исследовании весьма конкретных задач. В связи с таким достаточно "широким"взглядом на проблему требуется формализация, в которой главную роль играют конструкции с применением ростков "частичных"отображений, т.е. отображений, имеющих смысл сужений функций с фиксированной по условиям задачи областью определения. Рассмотрим сводку обозначений и простейших понятий, которая затем будет пополняться по мере надобности.

Далее используются кванторы, связки, сокращение def (по определению). Через $\mathcal{P}(T)$ (через 2^T) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества T; в этих условиях $Fin(T)$ есть def семейство всех непустых конечных подмножеств T. Через B^A обозначаем, как обычно в теории множеств [23], множество всех отображений из множества A в множество B; в этих условиях при всяком выборе $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ через $(f \mid C)$ обозначается сужение (см.[19,с.13];[24,с.26]) f на C. Последнее соглашение уже использовалось ранее. В дальнейшем $\mathcal{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; ...\}$, $\mathcal{N}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{0; 1; 2; ...\} = \{0\} \cup \mathcal{N}$, а символ $\circ$ используется, как обычно, при обозначении суперпозиции отображений. Если H — непустое множество, то $I_H \in H^H$ есть def тождественное отображение множества H в себя: $I_H(h) \stackrel{\triangle}{=} h$ при $h \in H$; если, к тому же, $\alpha \in H^H$ (т.е. α — отображение, действующее в H), то

$$(\alpha^k)_{k \in \mathcal{N}_0} : \mathcal{N}_0 \longrightarrow H^H \tag{2.1}$$

определяется традиционно: 1)$\alpha^0 \stackrel{\triangle}{=} I_H$; 2)$\forall s \in \mathcal{N}$: $\alpha^s \stackrel{\triangle}{=} \alpha \circ \alpha^{s-1}$. Для операторов на пространствах МО будет введено и понятие бесконечной степени. Если A и B — множества, то $\mathbb{M}(A, B) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}(B)^A$ имеет смысл множества всех МО из A в B (т.е. отображений, сопоставляющих (каждое) точке $a \in A$ подмножество B); в (2.1) естественно выделяется случай, когда

$H = \mathbb{M}(A, B)$, который полезно дополнить соглашением: если

$$\alpha : \mathbb{M}(A, B) \longrightarrow \mathbb{M}(A, B)$$

есть заданный оператор, то

$$\alpha^\infty : \mathbb{M}(A, B) \longrightarrow \mathbb{M}(A, B) \tag{2.2}$$

есть def такой оператор, что $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(A, B)\ \forall a \in A$:

$$\alpha^\infty(\mathcal{C})(a) \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \alpha^k(\mathcal{C})(a). \tag{2.3}$$

Мы используем далее (2.2),(2.3) без дополнительных пояснений. Отметим только одну интерпретацию, полагая для произвольных множеств A и B, что

$$\mathcal{M}[A; B] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{H} \in \mathbb{M}(A, B)^{\mathbb{M}(A,B)} \mid \forall \mathcal{H} \in \mathbb{M}(A, B)\ \forall a \in A :\ \mathbf{H}(\mathcal{H})(a) \subset \mathcal{H}(a)\}. \tag{2.4}$$

Элементы множества (2.4) уместно именовать сжимающими операторами. Разумеется (2.1)-(2.3) можно рассматривать при дополнительных условиях, когда в (2.1) $H = \mathbb{M}(A, B)$ и $\alpha = \mathbf{H} \in \mathcal{M}[A; B]$; в этих условиях ($A$ и B — множества, $\mathbf{H} \in \mathcal{M}[A; B]$) при $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(A, B)$ в виде

$$(\mathbf{H}^k(\mathcal{C}))_{k \in \mathcal{N}_0} :\ \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathbb{M}(A, B)$$

мы имеем поточечно сходящуюся последовательность в пространстве МО: если $\mathcal{C}_k \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{H}^k(\mathcal{C})$ при $k \in \mathcal{N}_0$, то

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C},\ \mathcal{C}_s = \mathbf{H}(\mathcal{C}_{s-1})\ \ (s \in \mathcal{N}), \tag{2.5}$$

а для каждого фиксированного элемента $a \in A$ последовательность $(\mathcal{C}_k(a))_{k \in \mathcal{N}_0}$ (монотонно) сходится [18,с.31] к значению отображения $\mathcal{C}_\infty \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{H}^\infty(\mathcal{C})$ в точке a, т.е. к множеству $\mathcal{C}_\infty(a)$. Представление (2.5), подобное в логическом отношении варианту МПИ [11,12,15], будет подразумеваться в последующих построениях без дополнительных пояснений.

Фиксируем: непустые множества X, Y и Υ; непустое семейство $\mathcal{X}$ непустых подмножеств X, а также непустые множества Ω, $\Omega \subset \Upsilon^X$, и Z, $Z \subset Y^X$. Итак,

$$(\mathcal{X} \in 2^{(2^X)})\ \&\ (\Omega \in 2^{(\Upsilon^X)})\ \&\ (Z \in 2^{(Y^X)}). \tag{2.6}$$

В терминах (2.6) ниже будет сформулирована (см.[16,17]) абстрактная версия задачи о построении наследственного МС заданной мультифункции, в которой основным методом решения будет процедура типа (2.5). Предметом нашего исследования будет изучение операторов $\beta \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, для которых

$$\begin{aligned} &\forall \omega_1 \in \Omega \; \forall \omega_2 \in \Omega \; \forall A \in \mathcal{X} : \; ((\omega_1 \mid A) = (\omega_2 \mid A)) \implies \\ &\implies (\{(z \mid A) : \; z \in \beta(\omega_1)\} = \{(z \mid A) : \; z \in \beta(\omega_2)\}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Мы называем такие операторы β наследственными МО (во многих конкретных постановках (2.7) имеет смысл неупреждаемости; в частности, такая интерпретация уместна для задачи управления системой (1.1) в условиях неопределенности относительно реализации движений системы (1.2)). К отображению β со свойством (2.7) мы предъявляем далее дополнительные требования типа условий: $\beta(\omega) \subset \alpha(\omega), \; \omega \in \Omega$, где $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ задано априори. По ряду причин удобно несколько иное по форме определение свойства наследственности МО; это определение (в терминах свойства неподвижной точки) будет дано ниже.

Полагаем далее $\Sigma \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}(\Omega), \; \Sigma_0 \stackrel{\triangle}{=} 2^\Omega = \Sigma \setminus \{\emptyset\}, \; \mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}(X), \; \mathfrak{X} \stackrel{\triangle}{=} 2^X = \mathbb{X} \setminus \{\emptyset\}, \; \mathbb{Z} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}(Z)$. Тогда, в частности, $\Omega \in \Sigma_0$; при этом $\forall T \in \Sigma_0 :$ $\mathbb{M}(T, Z) = \mathbb{Z}^T$. Кроме того, полагаем $\forall T \in \Sigma_0 :$

$$\mathcal{Z}_T \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{M}(T, Z)^{\mathbb{M}(T,Z)}. \tag{2.8}$$

Для операторов из множества (2.8) определены конечные и бесконечная степени (см.(2.1)-(2.3)). Полагаем $\mathcal{Z} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{Z}_\Omega$, получая (в виде $\mathcal{Z}$) множество всех операторов, действующих в $\mathbb{M}(\Omega, Z)$. Если $T \in \Sigma_0$, то через $\mathcal{Z}^0_T$ обозначаем множество всех отображений $\mathbf{H} \in \mathcal{Z}_T$ таких, что $\mathbf{H} \circ \mathbf{H} = \mathbf{H}$. В частности, $\mathcal{Z}^0 \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{Z}^0_\Omega$ есть множество всех идемпотентных операторов из $\mathcal{Z}$. В дальнейшем широко используются ростки "частичных"функций со значениями в Υ и в Y. Если $T \in \Sigma_0, \; A \in \mathfrak{X}$ и $\omega \in \Omega$, то через $(Ge)[T; \omega \mid A]$ обозначаем множество всех $t \in T$ таких, что $(\omega \mid A) = (t \mid A)$; при $\omega \in T$ мы всегда имеем в последнем случае непустое множество. В частности, $\forall A \in \mathfrak{X} \; \forall \omega \in \Omega :$

$$\Omega_0(\omega \mid A) \stackrel{\triangle}{=} (Ge)[\Omega; \omega \mid A] = \{\tilde{\omega} \in \Omega \mid (\omega \mid A) = (\tilde{\omega} \mid A)\} \in \Sigma_0. \tag{2.9}$$

Заметим, что при $T \in \Sigma_0, \; t \in T$ и $A \in \mathfrak{X}$ имеет место $(Ge)[T; t \mid A] = T \cap \Omega_0(t \mid A) \in \Sigma_0$. Введем в рассмотрение второй тип ростков, полагая $\forall A \in \mathfrak{X} \; \forall z \in Z :$

$$Z_0(z \mid A) \stackrel{\triangle}{=} \{\tilde{z} \in Z \mid (z \mid A) = (\tilde{z} \mid A)\}. \tag{2.10}$$

В терминах ростков типа (2.9),(2.10) определяем некоторые специальные операторы на пространствах МО, имея в виду их последующее применение для получения представлений МО со свойством (2.7) в терминах неподвижных точек. Если $T \in \Sigma_0$ и $A \in \mathfrak{X}$, то полагаем, что оператор $\tilde{\gamma}_T[A] \in \mathcal{Z}_T$ определяется тем естественным условием, что $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(T, Z)\ \forall t \in T:$

$$\tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{C})(t) \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathcal{C}(t) \mid\ \forall s \in (Ge)[T; t \mid A]:\ Z_0(z \mid A) \cap \mathcal{C}(s) \neq \emptyset\}. \quad (2.11)$$

Из (2.4),(2.8) и (2.11) вытекает с очевидностью $\forall T \in \Sigma_0\ \forall A \in \mathfrak{X}:$

$$\tilde{\gamma}_T[A] \in \mathcal{M}[T; Z]. \quad (2.12)$$

Примечание. Заметим, что при $T \in \Sigma_0$ имеет место свойство: $\mathcal{M}[T; Z]$ есть множество всех отображений $\mathbf{H} \in \mathcal{Z}_T$, обладающих каждое тем свойством, что $\forall \mathcal{H} \in \mathbb{M}(T, Z)\ \forall t \in T:\ \mathbf{H}(\mathcal{H})(t) \subset \mathcal{H}(t)$. В частности, $\mathcal{M}[\Omega; Z]$ есть подмножество $\mathcal{Z}$.

Если $T \in \Sigma_0$, то введем оператор $\gamma_T \in \mathcal{Z}_T$ условием: если $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(T, Z)$ и $t \in T$, то

$$\begin{gathered}\gamma_T(\mathcal{C})(t) \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{C})(t) = \{z \in \mathcal{C}(t) \mid \\ \forall A \in \mathcal{X}\ \forall s \in (Ge)[T; t \mid A]:\ Z_0(z \mid A) \cap \mathcal{C}(s) \neq \emptyset\};\end{gathered} \quad (2.13)$$

из (2.13) вытекает, что

$$\gamma_T \in \mathcal{M}(T, Z). \quad (2.14)$$

Естественно выделить в определении (2.11),(2.12) важный частный случай: $T = \Omega$. Если $A \in \mathfrak{X}$, то оператор

$$\Gamma_A \stackrel{\triangle}{=} \tilde{\gamma}_\Omega[A] \in \mathcal{M}[\Omega; Z] \quad (2.15)$$

определяется тем условием, что $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall \omega \in \Omega:$

$$\Gamma_A(\mathcal{C})(\omega) = \{z \in \mathcal{C}(\omega) \mid \forall s \in \Omega_0(\omega \mid A):\ Z_0(z \mid A) \cap \mathcal{C}(s) \neq \emptyset\}. \quad (2.16)$$

В свою очередь, (2.14) доставляет в виде частного случая оператор

$$\Gamma \stackrel{\triangle}{=} \gamma_\Omega \in \mathcal{M}(\Omega, Z), \quad (2.17)$$

для которого имеет место $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall \omega \in \Omega:$

$$\begin{gathered}\Gamma(\mathcal{C})(\omega) = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \Gamma_A(\mathcal{C})(\omega) = \{z \in \mathcal{C}(\omega) \mid \forall A \in \mathcal{X}\ \forall \tilde{\omega} \in \Omega_0(\omega \mid A): \\ Z_0(z \mid A) \cap \mathcal{C}(\tilde{\omega}) \neq \emptyset\}.\end{gathered} \quad (2.18)$$

Мы используем операторы (2.15) - (2.18), как основные. Версии определений (2.11),(2.12),(2.14) будут использоваться в локальных построениях; в частности, (2.14) потребуется при "распараллеливании"основной итерационной процедуры. Свойства (2.12),(2.15) дополняются следующим полезным и достаточно очевидным положением.

Предложение 2.1. *Если* $A \in \mathfrak{X}$, *то:* $(\forall T \in \Sigma_0 : \ \tilde{\gamma}_T[A] \in \mathcal{Z}^0_T)$ & $(\Gamma_A \in \mathcal{Z}^0)$.

Весьма очевидное доказательство опустим; оно использует тот факт, что для фиксированного множества $A \in \mathfrak{X}$, в виде (2.12),(2.15) мы имеем "неигровые"конструкции, что и определяет фактически свойство идемпотентности операторов (2.12),(2.15). Соответствующее строгое обоснование легко следует из (2.11).

В связи с предложением 2.1 приобретают важное значение представления наследственных МО в терминах неподвижных точек. Полагаем $\forall T \in \Sigma_0$:

$$\begin{gathered}(\mathfrak{N}[T] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{C} \in \mathbb{M}(T, Z) \mid \mathcal{C} = \gamma_T(\mathcal{C})\}) \ \& \ (\forall A \in \mathfrak{X} : \\ (f.p.)[A \mid T] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{C} \in \mathbb{M}(T, Z) \mid \tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}).\end{gathered} \tag{2.19}$$

Из предложения 2.1 и (2.19) получаем $\forall T \in \Sigma_0 \ \forall A \in \mathfrak{X}$:

$$(f.p.)[A \mid T] = \{\tilde{\gamma}_T(\mathcal{H}) : \ \mathcal{H} \in \mathbb{M}(T, Z)\}. \tag{2.20}$$

Легко видеть, что (см.(2.13),(2.19)) $\forall T \in \Sigma_0$:

$$\mathfrak{N}[T] = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} (f.p.)[A \mid T]. \tag{2.21}$$

В (2.21) важные для дальнейшего неподвижные точки оператора γ_T получают представление в терминах универсальных относительно $A \in \mathcal{X}$ неподвижных точек операторов $\tilde{\gamma}_T[A]$; это представление подкрепляется свойством (2.20), логически связанным с идемпотентностью $\tilde{\gamma}_T[A]$. Соответственно имеем

$$\begin{gathered}(\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{N}[\Omega] = \{\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z) \mid \mathcal{C} = \Gamma(\mathcal{C})\}) \ \& \ (\forall A \in \mathfrak{X} : \\ (f.p.)[A] \stackrel{\triangle}{=} (f.p.)[A \mid \Omega] = \{\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z) \mid \Gamma_A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\} = \\ = \{\Gamma_A(\mathcal{H}) : \ \mathcal{H} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\}).\end{gathered} \tag{2.22}$$

Разумеется, из (2.20)-(2.22) следует представление: $\mathbb{N}$ есть пересечение всех множеств $(f.p.)[A], \ A \in \mathcal{X}$. Естественная связь (2.7) и $\mathbb{N}$ (2.22) устанавливается легко проверяемым на основе (2.18) утверждением: $\mathbb{N}$ есть множество всех отображений $\beta \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, обладающих каждое свойством (2.7). Итак, наследственные МО — суть неподвижные точки Γ и только они.

Замечание 2.1. *В связи с (2.13) полезно отметить естественную интерпретацию, допускающую аналогии с построениями [12]. В самом деле, из (2.13) имеем, при* $T \in \Sigma_0$, $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(T, Z)$ *и* $t \in T$, *что*

$$\gamma_T(\mathcal{C})(t) = \{z \in \mathcal{C}(t) \mid \forall A \in \mathcal{X} : \ (z \mid A) \in \bigcap_{s \in (Ge)[T;t|A]} \{(f \mid A) : \ f \in \mathcal{C}(s)\}\}. \tag{2.23}$$

Как частный случай, имеем представление $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z) \ \forall \omega \in \Omega :$

$$\Gamma(\mathcal{C})(\omega) = \{z \in \mathcal{C}(\omega) \mid \forall A \in \mathcal{X} : \ (z \mid A) \in \bigcap_{s \in \Omega_0(\omega|A)} \{(f \mid A) : \ f \in \mathcal{C}(s)\}\}. \tag{2.24}$$

В содержательном отношении основное условие в (2.23),(2.24) можно истолковать, как соблюдение некоторой "управляемой системой"ограничений на "отрезки"траекторий. В случае использования МПИ [12] для решения дифференциальных игр с информационной памятью (в отношении вопросов формализации и структуры таких игр см., например, [1]) указанные ограничения естественным образом заменяют нестационарные фазовые ограничения, преобразуемые (на основе МПИ) в [11,15].

3. Неупреждающие мультиселекторы многозначных отображений.

В дальнейших построениях мы существенно используем порядковую структуру и поточечную сходимость в пространствах МО. Если $T \in \Sigma_0$, $\alpha \in \mathbb{M}(T, Z)$ и $\beta \in \mathbb{M}(T, Z)$, то def полагаем, что

$$(\alpha \sqsubseteq \beta) \Longleftrightarrow (\forall \omega \in T : \ \alpha(\omega) \subset \beta(\omega)). \tag{3.1}$$

Мы рассматриваем (3.1), как поточечную упорядоченность по вложению. Особое значение (3.1) имеет для нас при $T \in \Omega$. Полагаем $\forall T \in \Sigma_0 \ \forall \alpha \in \mathbb{M}(T, Z)$:

$$\mathbf{S}_T(\alpha) \stackrel{\triangle}{=} \{\beta \in \mathbb{M}(T, Z) \mid \beta \sqsubseteq \alpha\}. \tag{3.2}$$

Элементы (3.2) — суть мультиселекторы или МС отображения α. Полагаем также $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z) : \ \mathbf{S}[\alpha] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{S}_\Omega(\alpha)$. Среди всевозможных МС заданной мультифункции выделяем наследственные, получая $\forall T \in \Sigma_0 \ \forall \alpha \in \mathbb{M}(T, Z)$:

$$\mathfrak{N}_0[T; \alpha] \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{N}[T] \cap \mathbf{S}_T(\alpha) \neq \emptyset. \tag{3.3}$$

Очевидный пример наследственного МС, т.е. пример элемента множества в левой части (3.3), доставляет постоянное МО, единственным значением которого является $\emptyset$. Разумеется, данный тривиальный МС мультифункции α интереса не представляет (он играет роль своеобразного "нуля"). Полагаем $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z): \ \mathbb{N}_0[\alpha] \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{N}_0[\Omega;\alpha] = \mathbb{N} \cap \mathbf{S}[\alpha]$. Заметим, что последнее множество и его аналоги (3.3) непременно обладают наибольшими элементами, которые легко получить в виде точных верхних граней множеств (3.3) относительно поточечного порядка, определяемого посредством (3.1). Отметим в этой связи одну вспомогательную конструкцию. Если $T \in \Sigma_0$ и $\mathbf{A}$ — подмножество $\mathbb{M}(T, Z)$ (т.е. $\mathbf{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{M}(T, Z))$), то

$$\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}}^{[T]} \alpha \in \mathbb{M}(T, Z) \tag{3.4}$$

есть def такое отображение, что $\forall \omega \in T$:

$$\left(\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}}^{[T]} \alpha \right) (\omega) \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} \alpha(\omega); \tag{3.5}$$

посредством (3.4),(3.5) введена точная верхняя грань $\mathbf{A}$ в $\mathbb{M}(T, Z)$ с порядком, определяемым в (3.1). Если $T \in \Sigma_0$ и $\mathbf{A}$ есть непустое подмножество $\mathbb{M}(T, Z)$, то

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathbf{A}}^{[T]} \alpha \in \mathbb{M}(T, Z) \tag{3.6}$$

есть def такое отображение из T в $\mathcal{P}(Z)$, что $\forall \omega \in T$:

$$\left(\bigwedge_{\alpha \in \mathbf{A}}^{[T]} \alpha \right) (\omega) \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} \alpha(\omega). \tag{3.7}$$

Мы получили в (3.6),(3.7) точную нижнюю грань множества $\mathbf{A}$ в $\mathbb{M}(T, Z)$ с порядком (3.1). Если в (3.4) - (3.7) $T = \Omega$, то верхний индекс $[T]$ в этих соотношениях опускаем. Так, если $\mathbf{A}$ — непустое подмножество $\mathbb{M}(\Omega, Z)$, то

$$\left(\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} \alpha \stackrel{\triangle}{=} \bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}}^{[\Omega]} \alpha \right) \ \& \ \left(\bigwedge_{\alpha \in \mathbf{A}} \alpha \stackrel{\triangle}{=} \bigwedge_{\alpha \in \mathbf{A}}^{[\Omega]} \alpha \right); \tag{3.8}$$

в первом равенстве в (3.8) допустимо рассматривать случай $\mathbf{A} = \emptyset$. Полезно заметить, что операторы на пространствах МО, рассматриваемые в разделе 2, обладают монотонностью в смысле (3.1). Из (2.11) и (3.1) легко следует, что $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(T, Z)\ \forall \mathcal{D} \in \mathbb{M}(T, Z)$:

$$(\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{D}) \Longrightarrow (\forall A \in \mathfrak{X}:\ \tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{C}) \sqsubseteq \tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{D})). \tag{3.9}$$

Свойство (3.9) является полезным дополнением (2.12). Еще более важным является (см.(2.13)) то, что $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(T, Z)\ \forall \mathcal{D} \in \mathbb{M}(T, Z)$:

$$(\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{D}) \Longrightarrow (\gamma_T(\mathcal{C}) \sqsubseteq \gamma_T(\mathcal{D})). \tag{3.10}$$

Из (3.9),(3.10) извлекаются следствия, касающиеся основного случая $T = \Omega$. Из (2.15),(3.9) получаем, что $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall \mathcal{D} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$:

$$(\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{D}) \Longrightarrow (\forall A \in \mathfrak{X}:\ \Gamma_A(\mathcal{C}) \sqsubseteq \Gamma_A(\mathcal{D})). \tag{3.11}$$

В свою очередь, из (2.17) и (3.10) следует, что $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall \mathcal{D} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$:

$$(\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{D}) \Longrightarrow (\Gamma(\mathcal{C}) \sqsubseteq \Gamma(\mathcal{D})). \tag{3.12}$$

Из (2.13) и (3.5) вытекает, что $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \mathbf{A} \in \mathcal{P}(\mathfrak{N}_T)$:

$$\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}}^{[T]} \alpha \in \mathfrak{N}[T]. \tag{3.13}$$

Обоснование (3.13) практически очевидно (см.(2.13),(2.19)) и в данном кратком изложении опущено. В качестве $\mathbf{A}$ в (3.13) можно использовать множество (3.3); при этом в согласии с (3.2) и (3.5) имеем $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \alpha \in \mathbb{M}(T, Z)$:

$$(T - Na)[\alpha] \stackrel{\triangle}{=} \bigvee_{\mathcal{C} \in \mathfrak{N}_0[T;\alpha]}^{[T]} \mathcal{C} \in \mathfrak{N}_0[T; \alpha]. \tag{3.14}$$

Разумеется, в (3.14) мы имеем наибольший в смысле (3.1) элемент множества (3.3): если $T \in \Sigma_0,\ \alpha \in \mathbb{M}(T, Z)$ и $\beta \in \mathfrak{N}_0[T; \alpha]$, то

$$\beta \sqsubseteq (T - Na)[\alpha]. \tag{3.15}$$

Из (3.14),(3.15) извлекается важный частный случай. Именно, $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$:

$$(na)[\alpha] \stackrel{\triangle}{=} (\Omega - Na)[\alpha] = \bigvee_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_0[\alpha]} \mathcal{C} \in \mathbb{N}_0[\alpha]. \tag{3.16}$$

При этом, конечно, в согласии с (3.15) имеем $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall \beta \in \mathbb{N}_0[\alpha]$: $\beta \sqsubseteq (na)[\alpha]$. Последнее означает, что (3.16) есть наибольший (в смысле (3.1)) элемент $\mathbb{N}_0[\alpha]$. Полезно отметить также очевидные соотношения для операторов, действующих в $\mathbb{M}(\Omega, Z)$, и их "локальных"аналогов. Из (2.11), (2.16) следует, что $\forall T \in \Sigma_0\ \forall A \in \mathfrak{X}\ \forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall t \in T$:

$$\Gamma_A(\mathcal{C})(t) \subset \tilde{\gamma}_T[A]((\mathcal{C} \mid T))(t) \subset \mathcal{C}(t).$$

Иными словами, имеет место $\forall T \in \Sigma_0\ \forall A \in \mathfrak{X}\ \forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$:

$$(\Gamma_A(\mathcal{C}) \mid T) \sqsubseteq \tilde{\gamma}_T[A]((\mathcal{C} \mid T)) \sqsubseteq (\mathcal{C} \mid T). \tag{3.17}$$

Теперь уже вполне очевидно, что (см.(2.22),(3.17)) $\forall A \in \mathfrak{X}\ \forall \mathcal{C} \in (f.p.)[A]$ $\forall T \in \Sigma_0 :\ \tilde{\gamma}_T[A]((\mathcal{C} \mid T)) = (\mathcal{C} \mid T)$. Иными словами, имеем (см.(2.19)) свойство: если $A \in \mathfrak{X}$, $\mathcal{C} \in (f.p.)[A]$ и $T \in \Sigma_0$, то $(\mathcal{C} \mid T) \in (f.p.)[A \mid T]$. Это свойство обладает очевидным аналогом в классе "универсальных"неподвижных точек. Отметим для этого предварительно, что в силу (2.13),(2.18) и (3.17) имеет место $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall T \in \Sigma_0\ \forall t \in T :\ \Gamma(\mathcal{C})(t) \subset \gamma_T((\mathcal{C} \mid T))(t) \subset \mathcal{C}(t)$. Иными словами, имеем в согласии с (3.1) свойство: если $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ и $T \in \Sigma_0$, то справедливо

$$(\Gamma(\mathcal{C}) \mid T) \sqsubseteq \gamma_T((\mathcal{C} \mid T)) \sqsubseteq (\mathcal{C} \mid T). \tag{3.18}$$

В свою очередь, из (2.22) и (3.18) следует, что $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{N}\ \forall T \in \Sigma_0 :\ (\mathcal{C} \mid T) = \gamma_T((\mathcal{C} \mid T))$. Из (2.19) имеем теперь утверждение: если $\mathcal{C} \in \mathbb{N}$ и $T \in \Sigma_0$, то $(\mathcal{C} \mid T) \in \mathfrak{N}[T]$. Для наших последующих конструкций существенно следствие: если $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, $\mathcal{C} \in \mathbb{N}_0[\alpha]$ и $T \in \Sigma_0$, то

$$(\mathcal{C} \mid T) \in \mathfrak{N}_0[T; (\alpha \mid T)]; \tag{3.19}$$

в то же время множество в правой части (3.19) не исчерпывается, вообще говоря, такими функциями-сужениями $(\mathcal{C} \mid T)$. Грубо говоря, локальных наследственных МС отображения α может быть больше, чем "глобальных". Из (3.15),(3.16) и (3.19) вытекает, что $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall T \in \Sigma_0$:

$$((na)[\alpha] \mid T) \sqsubseteq (T - Na)[(\alpha \mid T)]. \tag{3.20}$$

4. Локальные версии наследственных мультиселекторов и их склеивание.

При некоторых условиях (3.20) обращается в равенство. Это обстоятельство определяет полезную возможность локализаций основной задачи определения наибольшего наследственного МС заданной априори мультифункции (см.[17]). Упомянутая возможность позволяет затем осуществлять, тем или иным способом, построение построение фрагментов искомого МС, определяемых в виде МО в левой части (3.20). В известных процедурах МПИ [11-15], используемых в теории дифференциальных игр, каких-либо аналогов указанной процедуры локального построения решения не исследовалось. Рассмотрим следующее семейство подмножеств Ω :

$$\mathbb{H} \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \Sigma \mid \forall \omega \in H : \bigcup_{A \in \mathcal{X}} \Omega_0(\omega \mid A) \subset H\}. \tag{4.1}$$

Отметим очевидный пример множества — элемента семейства (4.1), полагая в дальнейшем, что $\forall T \in \Sigma_0 \; \forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(T, Z)$:

$$(DOM)[\mathcal{C}] \stackrel{\triangle}{=} \{\omega \in T \mid \mathcal{C}(\omega) \neq \emptyset\} \tag{4.2}$$

(в (4.2) введена эффективная область область мультифункции); (4.2) можно, в частности, использовать при $T = \Omega$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{N}$. Тогда (см. (2.18), (2.22)) имеем $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{N} : \; (DOM)[\mathcal{C}] \in \mathbb{H}$. Легко видеть, что (4.1) есть (булева) алгебра подмножеств Ω, см. [18,с.21,22]. С другой стороны, $\mathbb{H}$ (4.1) есть топология Ω, для которой все множества из $\mathbb{H}$ открыто-замкнуты [25,с.35]. Стало быть, $\mathbb{H}$ (4.1) содержит пересечение любого непустого семейства множеств из $\mathbb{H}$. Легко видеть, что $\forall \omega \in \Omega \; \forall A \in \mathfrak{X} \; \forall \tilde{\omega} \in \Omega_0(\omega \mid A) : \; \Omega_0(\omega \mid A) = \Omega_0(\tilde{\omega} \mid A)$. Однако, в общем случае возможна следующая ситуация: при некотором $\omega_* \in \Omega$ объединение всех множеств $\Omega_0(\omega_* \mid A), \; A \in \mathcal{X}$, не является элементом $\mathbb{H}$.

Пример. Пусть:$X \stackrel{\triangle}{=} [0,1], \; \Upsilon \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}, \; \Omega$ есть def множество $C([0,1])$ всех непрерывных функций из $[0,1]$ в $\mathbb{R}, \; \mathcal{X}$ есть def семейство всех отрезков $[a,b], \; 0 \leq a < b \leq 1$. Пусть $\omega_* \in \Omega, \; \omega_*(x) \equiv 0$ на X. Тогда функция $\omega^* \in \Omega$, определяемая условиями $\omega^*(x) \stackrel{\triangle}{=} 0$ при $x \in [0, 1/2[$ и $\omega^*(x) \stackrel{\triangle}{=} x - 1/2$ при $x \in [1/2, 1]$, есть элемент объединения всех множеств $\Omega_0(\omega_* \mid A), \; A \in \mathcal{X}$, обозначаемого сейчас для краткости через H_*. Функция $\tilde{\omega} \in \Omega$, для которой $\tilde{\omega}(x) \stackrel{\triangle}{=} 1/4$ при $x \in [0, 3/4]$ и $\tilde{\omega}(x) \stackrel{\triangle}{=} x - 1/2$ при $x \in [3/4, 1]$, есть элемент $\Omega_0(\omega^* \mid [3/4, 1])$. Однако, $\tilde{\omega} \notin H_*$, т.к. $\forall x \in X : \; \tilde{\omega}(x) \neq 0$. Следовательно, $H_* \notin \mathbb{H}$.

Введем в рассмотрение семейство $\mathbb{H}_0 \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{H} \backslash \{\emptyset\}$ (всех непустых множеств из $\mathbb{H}$), а также множество

$$\mathbf{H}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{U} \in 2^{\mathbb{H}_0} \mid (\Omega = \bigcup_{U \in \mathbb{U}} U) \ \& \ (\forall U_1 \in \mathbb{U} \ \forall U_2 \in \mathbb{U} \setminus \{U_1\} : \\ U_1 \cap U_2 = \emptyset)\} \in 2^{(2^{\mathbb{H}_0})} \tag{4.3}$$

всех $\mathbb{H}_0$-разбиений Ω; элементы (4.2) именуем также открытыми (в $(\Omega, \mathbb{H})$) разбиениями Ω в сумму непустых множеств. Следуя [17] вводим процедуру склеивания частичных МО. Если $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_0$ и $(\alpha_U)_{U \in \mathcal{U}} \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{M}(U, Z)$, то склейка

$$\square_{U \in \mathcal{U}} \alpha_U \in \mathbb{M}(\Omega, Z) \tag{4.4}$$

есть def такое отображение, что

$$\forall P \in \mathcal{U} \ \forall \omega \in P : \ (\square_{U \in \mathcal{U}} \alpha_U)(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \alpha_P(\omega). \tag{4.5}$$

Легко видеть, что $\forall U \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\} : \ \{U; \ \Omega \setminus U\} = \{U\} \cup \{\Omega \setminus U\} \in \mathbf{H}_0$. Поэтому естественным образом выделяется частный случай (4.3),(4.4). Именно, если $U \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\}$, $\alpha \in \mathbb{M}(U, Z)$ и $\beta \in \mathbb{M}(\Omega \setminus U, Z)$, то $\alpha \square \beta \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ есть def такое отображение, что

$$(\forall \omega \in U : \ (\alpha \square \beta)(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \alpha(\omega)) \ \& \ (\forall \omega \in \Omega \setminus U : \ (\alpha \square \beta)(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \beta(\omega)).$$

Легко видеть, что в этих терминах реализуется, в частности, построение наследственных МО "по частям": если $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_0$ и $(\alpha_U)_{U \in \mathcal{U}}$ есть элемент произведения всех множеств $\mathfrak{N}[U]$, $U \in \mathcal{U}$, то $\square_{U \in \mathcal{U}} \alpha_U \in \mathbb{N}$. Если $U \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\}$, $\alpha \in \mathfrak{N}[U]$ и $\beta \in \mathfrak{N}[\Omega \setminus U]$, то $\alpha \square \beta \in \mathbb{N}$. Доказательство вышеупомянутых простых утверждений непосредственно следует из (4.1) и (4.4); следует учесть, конечно, (2.13) и (2.18), а также тот очевидный факт, что $\mathbb{H}_0 \subset \Sigma_0$ и при этом $\forall H \in \mathbb{H}_0 \ \forall \omega \in H \ \forall A \in \mathfrak{X} : \ (Ge)[H; \omega \mid A] = \Omega_0(\omega \mid A)$. Как следствие, имеем

Предложение 4.1. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_0$, $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ *и* $(\alpha_U)_{U \in \mathcal{U}} \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathfrak{N}_0[U; (\mathcal{C} \mid U)]$, *то (4.3) определяет наследственный МС отображения* $\mathcal{C}$:

$$\square_{U \in \mathcal{U}} \alpha_U \in \mathbb{N}_0[\mathcal{C}].$$

Следствие. *Если* $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, $U \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\}$, $\alpha \in \mathfrak{N}_0[U; (\mathcal{C} \mid U)]$ *и* $\beta \in \mathfrak{N}_0[\Omega \setminus U; (\mathcal{C} \mid \Omega \setminus U)]$, *то* $\alpha \square \beta \in \mathbb{N}_0[\mathcal{C}]$.

Предложение 4.1 и его следствие могут сочетаться с различными методами определения наследственных МС "парциальных"МО, получаемых каждое сужением основного "целевого"МО. Данную конструкцию можно связать и с проблемой построения наибольшего наследственного МС упомянутого целевого МО. Отметим предварительно одну простую вспомогательную конструкцию: если $T \in \Sigma_0$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(T, Z)$, то $(\emptyset - ext)[\mathcal{C}] \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ есть def такое отображение, что

$$(\forall \omega \in T:\ (\emptyset - ext)[\mathcal{C}](\omega) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{C}(\omega))\ \&\ (\forall \omega \in \Omega \setminus T:\ (\emptyset - ext)[\mathcal{C}](\omega) \stackrel{\triangle}{=} \emptyset).$$

Если $T \in \mathbb{H}_0$ и $\mathcal{C} \in \mathfrak{N}[T]$, то $(\emptyset - ext)[\mathcal{C}] \in \mathbb{N}$; если же при этом $\mathcal{C} \in \mathfrak{N}_0[T; (\alpha \mid T)]$, где $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, то $(\emptyset - ext)[\mathcal{C}] \in \mathbb{N}_0[\alpha]$. Как следствие, имеем

Предложение 4.2. *Если* $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ *и* $T \in \mathbb{H}_0$, *то* $(T - Na)[(\alpha \mid T)] = ((na)[\alpha] \mid T)$.

Для доказательства достаточно учесть экстремальные (по порядку) свойства МО (3.14) и (3.16), следующие из (3.15), а также (3.19) и построение предшествующее формулировке предложения. Теперь уже вполне очевидна следующая

Теорема 4.1. *Если* $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ *и* $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_0$, *то* $(na)[\mathcal{C}] = \Box_{U \in \mathcal{U}}(U - Na)[(\mathcal{C} \mid U)]$.

Для доказательства достаточно учесть (4.4) и предложение 4.2. В виде следствия теоремы 4.1 отметим утверждение: если $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, $U \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\}$ и $V \stackrel{\triangle}{=} \Omega \setminus U$, то $(na)[\mathcal{C}] = (U - Na)[(\mathcal{C} \mid U)] \Box (V - Na)[(\mathcal{C} \mid V)]$.

5. Универсальные неподвижные точки,1.

В настоящем кратком разделе конструкции на основе предложения 2.1 (см., например, (2.20),(2.21)) применяются к мультиселекторам заданных априори МО. Если $T \in \Sigma_0$, $\alpha \in \mathbb{M}(T, Z)$ и $A \in \mathfrak{X}$, то

$$\begin{gathered}(f.p. - \alpha)[A \mid T] \stackrel{\triangle}{=} (f.p.)[A \mid T] \cap \mathbf{S}_T(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{M}(T, Z) \mid \\ (\beta = \tilde{\gamma}_T[A](\beta))\ \&\ (\beta \sqsubseteq \alpha)\}.\end{gathered} \tag{5.1}$$

Из (2.21),(3.3) и (5.1) вытекает $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \alpha \in \mathbb{M}(T, Z):$

$$\mathfrak{N}_0[T; \alpha] = (\bigcap_{A \in \mathcal{X}} (f.p.)[A \mid T]) \cap \mathbf{S}_T(\alpha) = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} (f.p. - \alpha)[A \mid T]. \tag{5.2}$$

Равенство (5.2) дополняется очевидным следствием (2.20): если $T \in \Sigma_0,\ \alpha \in \mathbb{M}(T,Z)$ и $A \in \mathfrak{X}$, то

$$(f.p. - \alpha)[A \mid T] = \{\tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{H}) :\ \mathcal{H} \in \mathbf{S}_T(\alpha)\} \tag{5.3}$$

(при выводе (5.3) следует учесть (2.12),(2.19) и (5.1)). Из (3.14),(5.2) и (5.3) получаем, что $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \alpha \in \mathbb{M}(T,Z)$:

$$(T - Na)[\alpha] \in \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \{\tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{H}) :\ \mathcal{H} \in \mathbf{S}_T(\alpha)\}. \tag{5.4}$$

Разумеется, (5.4) следует дополнить суждением (следующим из (3.15)): МС α, используемый в левой части (5.4) является наибольшим элементом множества в правой части. В (5.4) мы имеем попытку, с помощью сравнительно "простой"операции взятия образа при действии оператора (2.11) с последующим пересечением всех таких множеств-образов, "очертить"множество в пространстве мультифункций, заведомо содержащее искомое решение. Это множество желательно по возможности "сократить", используя ту или иную априорную информацию о свойствах МО в левой части (5.4). Такую информацию в ряде случаев можно получить, анализируя свойства α, наследуемые МО (3.14). Свойство (5.4) нас интересует главным образом в условиях, когда $\alpha \in (\mathcal{C} \mid T)$, где $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ — целевое МО. В этой связи отметим частный случай, когда в (5.1) – (5.4) $T = \Omega$. Если $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ и $A \in \mathfrak{X}$, то (см.(5.1)) $(f.p. - \mathcal{C})[A] \overset{\triangle}{=} (f.p. - \mathcal{C})[A \mid \Omega] = (f.p.)[A] \cap \mathbf{S}[\mathcal{C}]$. Разумеется, $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$:

$$\mathbb{N}_0[\mathcal{C}] = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} (f.p. - \mathcal{C})[A]. \tag{5.5}$$

Наконец, из (5.3) имеем свойство: если $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ и $A \in \mathfrak{X}$, то $(f.p. - \mathcal{C})[A] = \{\Gamma_A(\mathcal{H}) :\ \mathcal{H} \in \mathbf{S}[\mathcal{C}]\}$. Теперь уже в качестве конкретизации (5.4) получаем (см.(3.16)), что $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$:

$$(na)[\mathcal{C}] \in \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \{\Gamma_A(\mathcal{H}) :\ \mathcal{H} \in \mathbf{S}[\mathcal{C}]\}. \tag{5.6}$$

Более того, отображение в левой части (5.6) есть наибольщий элемент множества-пересечения, используемого в правой части. Отметим еще одно следствие. Если $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, то $\mathbb{N}_0[\mathcal{C}]$ есть пересечение всех множеств $\{\Gamma_A(\mathcal{H}) :\ \mathcal{H} \in \mathbf{S}[\mathcal{C}]\},\ A \in \mathcal{X}$; если при этом $\mathcal{D} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ таково, что

$$\forall A \in \mathcal{X}\ \exists \mathcal{H}_A \in \mathbf{S}[\mathcal{C}] :\ \mathcal{D} = \Gamma_A(\mathcal{H}_A), \tag{5.7}$$

то $\mathcal{D} \in \mathbb{N}_0[\mathcal{C}]$. В (5.7) мы имеем гипотетический вариант "подбора"МС отображения $\mathcal{C}$, а именно мультифункции $\mathcal{D}$, в качестве наследственного МС $\mathcal{C}$. Разумеется, интерпретация, подобная (5.7), возможна и при $T \in \Sigma_0,\ T \neq \Omega$; см. в этой связи (5.2),(5.3). В связи с (5.4) уместно ввести модели наследственных, относительно операторов (2.12), свойств частичных МО, полагая $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \alpha \in \mathbb{M}(T, Z)\ \forall A \in \mathfrak{X}$:

$$\mathfrak{M}(T, \alpha, A) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{M}(T, Z)) \mid \ \forall P \in \mathbb{P} \cap \mathbf{S}_T(\alpha):\ \tilde{\gamma}_T[A](P) \in \mathbb{P}\}. \qquad (5.8)$$

Если же $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ и $A \in \mathfrak{X}$, то полагаем $\mathfrak{M}[\alpha; A] \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{M}(\Omega, \alpha, A)$; здесь следует иметь в виду определение $\mathbf{S}[\alpha]$ раздела 3. Легко проверить, что $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \alpha \in \mathbb{M}(T, Z)\ \forall \mathbb{P} \in \mathfrak{M}(T, \alpha, A)$:

$$\mathbb{P} \cap (f.p. - \alpha)[A \mid T] = \{\tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{H}):\ \mathcal{H} \in \mathbb{P} \cap \mathbf{S}_T(\alpha)\}. \qquad (5.9)$$

В частности, из (5.9) вытекает с очевидностью свойство: если $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, $A \in \mathfrak{X}$ и $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}[\alpha; A]$, то

$$\mathbb{P} \cap (f.p. - \alpha)[A] = \{\Gamma_A(\mathcal{H}):\ \mathcal{H} \in \mathbb{P} \cap \mathbf{S}[\alpha]\}. \qquad (5.10)$$

В связи с возможным применением (5.10) отметим следующую гипотетическую схему. Пусть $\mathbb{P}$ есть множество из пересечения всех семейств $\mathfrak{M}[\alpha; A],\ A \in \mathcal{X}$, где $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ задано априори. Пусть (далее) нас интересует построение отображений из $\mathbb{N}_0[\alpha] \cap \mathbb{P}$. Для этого заметим, что $\mathbb{N}_0[\alpha] \cap \mathbb{P}$ есть в силу (5.5),(5.10) пересечение всех множеств $\{\Gamma_A(\mathcal{H}):\ \mathcal{H} \in \mathbb{P} \cap \mathbf{S}[\alpha]\},\ A \in \mathcal{X}$. Если $\mathcal{D} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ таково, что

$$\forall A \in \mathcal{X}\ \exists \tilde{\mathcal{H}}_A \in \mathbb{P} \cap \mathbf{S}[\alpha]:\ \mathcal{D} = \Gamma_A(\tilde{\mathcal{H}}_A),$$

то $\mathcal{D} \in \mathbb{N}_0[\alpha] \cap \mathbb{P}$, т.е. мы имеем решение поставленной задачи. Иногда, впрочем, удается установить, используя свойства α, что $\mathbb{N}_0[\alpha] \subset \mathbb{P}$. В дальнейшем вернемся к упомянутой конструкции для двух конкретных версий семейства $\mathbb{P}$, отвечающих случаю исследования МО со значениями в ТП.

6. Итерационные конструкции.

Сейчас мы рассмотрим процедуру [16] и [17], в логическом отношении подобную конструкциям известного МПИ [11-15]. Предварительно условимся относительно использования стрелок $\downarrow$, $\uparrow$ в обозначениях, связанных с "обычной"секвенциальной сходимостью множеств (см., например, [18,с.28]).

Далее, в согласии с [16],[17] введем в рассмотрение поточечную сходимость МО: если $T \in \Sigma_0$, $(\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}} \in \mathbb{M}(T,Z)^{\mathcal{N}}$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(T,Z)$, то полагаем def :

$$((\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}} \Downarrow \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (\forall \omega \in T:\ (\mathcal{C}_i(\omega))_{i\in\mathcal{N}} \downarrow \mathcal{C}(\omega)). \tag{6.1}$$

В частности, (6.1) используем при $T = \Omega$. Если $T \in \Sigma_0$, то в полном соответствии с (2.1),(2.3) введем последовательность

$$(\gamma_T^k)_{k\in\mathcal{N}_0} :\ \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathcal{Z}_T \tag{6.2}$$

и оператор $\gamma_T^\infty \in \mathcal{Z}_T$. Учтем (2.14).

Предложение 6.1. *Пусть $T \in \Sigma_0$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(T,Z)$. Тогда*

$$(\gamma_T^k(\mathcal{C}))_{k\in\mathcal{N}} \Downarrow \gamma_T^\infty(\mathcal{C}). \tag{6.3}$$

Доказательство. Имеем в виде $(\gamma_T^k(\mathcal{C}))_{k\in\mathcal{N}_0} :\ \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathbb{M}(T,Z)$ следующую последовательность МО. Именно, $\forall s \in \mathcal{N}_0 :\ \ \gamma_T^{(s+1)}(\mathcal{C}) = \gamma_T(\gamma_T^{(s)}(\mathcal{C}))$. Как следствие, имеем (см.(2.4),(2.14),(3.1)) $\forall s \in \mathcal{N}_0 :\ \ \gamma_T^{(s+1)}(\mathcal{C}) \sqsubseteq \gamma_T^{(s)}(\mathcal{C})$. С другой стороны, $\gamma_T^\infty(\mathcal{C}) \in \mathbb{M}(T,Z)$ есть такое отображение, что $\forall \omega \in T$:

$$\gamma_T^\infty(\mathcal{C})(\omega) = \bigcap_{k\in\mathcal{N}_0} \gamma_T^k(\mathcal{C})(\omega). \tag{6.4}$$

При этом $\gamma_T^1(\mathcal{C}) \sqsubseteq \gamma_T^0(\mathcal{C})$, т.к. по определению (2.1) $\gamma_T^0(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ и $\gamma_T^1(\mathcal{C}) = \gamma_T(\mathcal{C})$. Но тогда (см.(3.1),(6.4)) $\gamma_T^\infty(\mathcal{C})(\omega)$ есть (при $\omega \in T$) пересечение всех множеств $\gamma_T^k(\mathcal{C})(\omega)$, $k \in \mathcal{N}$; кроме того, $\gamma_T^{s+1}(\mathcal{C})(\omega) \subset \gamma_T^s(\mathcal{C})(\omega)$ при $s \in \mathcal{N}$ в силу (3.1). Это означает монотонную сходимость $(\gamma_T^k(\mathcal{C})(\omega))_{k\in\mathcal{N}}$ к множеству $\gamma_T^\infty(\mathcal{C})(\omega)$ при $\omega \in T$, ч.т.д.

Заметим, что в согласии с (6.2) определяется (см.[16],[17]) последовательность $(\Gamma^k)_{k\in\mathcal{N}_0}$ в $\mathcal{Z}$ и оператор Γ^∞; $\Gamma^s = \gamma_\Omega^s$ при $s \in \mathcal{N}_0$ и $\Gamma^\infty = \gamma_\Omega^\infty$. Из предложения 6.1 вытекает, что $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega,Z)$:

$$(\Gamma^k(\mathcal{C}))_{k\in\mathcal{N}} \Downarrow \Gamma^\infty(\mathcal{C}). \tag{6.5}$$

Сходимость (6.3),(6.5) определяет естественную основу для построения итерационных процедур. Если $T \in \Sigma_0$, то

$$\mathfrak{Z}_T \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{M}(T,Z)) \mid \forall \mathcal{Q} \in \mathbf{Q}:\ \gamma_T(\mathcal{Q}) \in \mathbf{Q}\} \tag{6.6}$$

есть семейство всех инвариантных, относительно γ_T, п/п $\mathbb{M}(T,Z)$; $\emptyset \in \mathfrak{Z}_T$ и $\mathbb{M}(T,Z) \in \mathfrak{Z}_T$. В терминах сходимости (6.1) естественно определяется понятие секвенциально замкнутого множества. Полагаем далее $\forall T \in \Sigma_0$:

$$\mathbf{Z}_T \stackrel{\triangle}{=} \{\mathfrak{H} \in \mathcal{P}(\mathbb{M}(T,Z)) \mid \forall (\mathcal{H}_i)_{i\in\mathcal{N}} \in \mathfrak{H}^{\mathcal{N}}\ \forall \mathcal{H} \in \mathbb{M}(T,Z) : \\ ((\mathcal{H}_i)_{i\in\mathcal{N}} \Downarrow \mathcal{H}) \Longrightarrow (\mathcal{H} \in \mathfrak{H})\}. \tag{6.7}$$

Элементы (6.7) — суть секвенциально $\Downarrow$-замкнутые подмножества $\mathbb{M}(T,Z)$ и только они. Разумеется, $\emptyset \in \mathbf{Z}_T$ и $\mathbb{M}(T,Z) \in \mathbf{Z}_T$ при $T \in \Sigma_0$. В терминах (6.1) можно ввести также секвенциальную непрерывность; возникает естественный вопрос и о подмножествах $\mathbb{M}(T,Z)$, на которых γ_T обладает такой непрерывностью. Если $T \in \Sigma_0$, то

$$\mathfrak{C}_T \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{U} \in \mathcal{P}(\mathbb{M}(T,Z)) \mid \forall (U_j)_{j\in\mathcal{N}} \in \mathbf{U}^{\mathcal{N}}\ \forall U \in \mathbb{M}(T,Z) : \\ ((U_j)_{j\in\mathcal{N}} \Downarrow U) \Longrightarrow ((\gamma_T(U_j))_{j\in\mathcal{N}} \Downarrow \gamma_T(U))\} \tag{6.8}$$

есть семейство всех подмножеств $\mathbb{M}(T,Z)$ с вышеупомянутым свойством секвенциальной непрерывности γ_T; ясно, что $\emptyset \in \mathfrak{C}_T$. Более содержательные примеры будут даны ниже. Полагаем

$$(\mathfrak{Z} \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{Z}_\Omega)\ \&\ (\mathbf{Z} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{Z}_\Omega)\ \&\ (\mathfrak{C} \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{C}_\Omega). \tag{6.9}$$

Легко видеть, что при $T \in \Sigma_0$, $\mathbf{Q} \in \mathfrak{Z}_T$ и $\alpha \in \mathbf{Q}$ в виде $(\gamma_T^k(\alpha))_{k\in\mathcal{N}_0}$ реализуется последовательность в $\mathbf{Q}$. В частности, при $\mathbf{Q} \in \mathfrak{Z}$ и $\alpha \in \mathbf{Q}$ имеем в виде $(\Gamma^k(\alpha))_{k\in\mathcal{N}_0}$ последовательность в $\mathbf{Q}$.

Предложение 6.2. *Если* $T \in \Sigma_0$, $\mathbf{Q} \in \mathfrak{Z}_T \cap \mathbf{Z}_T$ *и* $\alpha \in \mathbf{Q}$, *то* $\gamma_T^\infty(\alpha) \in \mathbf{Q}$.

В самом деле, согласно предложению 6.1 мы имеем (см.(6.3)) в виде $(\gamma_T^k(\alpha))_{k\in\mathcal{N}}$ последовательность в $\mathbf{Q}$, сходящуюся в смысле (6.1) к $\gamma_T^\infty(\alpha)$. В силу (6.7) имеем по свойствам $\mathbf{Q}$, что $\gamma_T^\infty(\alpha) \in \mathbf{Q}$.

Следствие. *Если* $\mathbf{Q} \in \mathfrak{Z} \cap \mathbf{Z}$ *и* $\alpha \in \mathbf{Q}$, то непременно $\Gamma^\infty(\alpha) \in \mathbf{Q}$.

Из (3.9),(3.14) имеем с очевидностью $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \alpha \in \mathbb{M}(T,Z) :\ (T - Na)[\alpha] \sqsubseteq \gamma_T^\infty(\alpha)$. Как следствие, имеем $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega,Z) :\ (na)[\alpha] \sqsubseteq \Gamma^\infty(\alpha)$. В последних двух утверждениях наиболее интересен случай, когда имеет место равенство.

Предложение 6.3. *Если* $T \in \Sigma_0$, $\mathbf{Q} \in \mathfrak{Z}_T \cap \mathfrak{C}_T$ *и* $\alpha \in \mathbf{Q}$, *то* $(T - Na)[\alpha] = \gamma_T^\infty(\alpha)$.

Доказательство. В силу (6.6) имеем в виде $(\gamma_T^k(\alpha))_{k\in\mathcal{N}}$ последовательность в $\mathbf{Q}$, которая сходится (см.(6.3)) к $\gamma_T^\infty(\alpha)$. Из (6.8) имеем теперь сходимость

$$(\gamma_T(\gamma_T^k(\alpha)))_{k\in\mathcal{N}} \Downarrow \gamma_T(\gamma_T^\infty(\alpha)).$$

Иными словами $(\gamma_T^{k+1}(\alpha))_{k\in\mathcal{N}}$ сходится и к $\gamma_T^\infty(\alpha)$ и к $\gamma_T(\gamma_T^\infty(\alpha))$, что означает справедливость свойства $\gamma_T^\infty(\alpha) \in \mathfrak{N}_0[T;\alpha]$ и, как следствие, $\gamma_T^\infty(\alpha) \sqsubseteq (T - Na)[\alpha]$ согласно (3.15), что достаточно для доказательства.

Следствие. $\forall \mathbf{Q} \in \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{C}\ \forall \alpha \in \mathbf{Q}:\ \Gamma^\infty(\alpha) = (na)[\alpha]$.

На п/п, характеризуемых (6.6) - (6.9), решение задачи о нахождении наибольшего наследственного мультиселектора, как отображение на пространстве мультифункций, обладает свойством секвенциальной непрерывности при изменении исходного МО, поскольку справедливо

Предложение 6.4. *Пусть* $T \in \Sigma_0$, $\mathbb{P} \in \mathfrak{Z}_T \cap \mathbf{Z}_T \cap \mathfrak{C}_T$, $(\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}}$ *есть последовательность в* $\mathbb{P}$ *и* $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(T, Z)$. *Тогда*

$$((\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}} \Downarrow \mathcal{C}) \Longrightarrow (((T - Na)[\mathcal{C}_i])_{i\in\mathcal{N}} \Downarrow (T - Na)[\mathcal{C}]). \tag{6.10}$$

Схема доказательства. Пусть истинна посылка импликации (6.10). В силу (6.7) имеем свойство: $\mathcal{C} \in \mathbb{P}$. Из предложения 6.2 вытекает, что: $(\forall j \in \mathcal{N}:\ \gamma_T^\infty(\mathcal{C}_j) \in \mathbb{P})\ \&\ (\gamma_T^\infty(\mathcal{C}) \in \mathbb{P})$. В силу предложения 6.3 имеем

$$(\forall j \in \mathcal{N}:\ (T - Na)[\mathcal{C}_j] = \gamma_T^\infty(\mathcal{C}_j))\ \&\ ((T - Na)[\mathcal{C}] = \gamma_T^\infty(\mathcal{C})).$$

Мы получили, в частности, что $((T - Na)[\mathcal{C}_i])_{i\in\mathcal{N}}$ есть последовательность в множестве $\mathbb{P} \cap \mathfrak{N}[T]$; кроме того, $(T - Na)[\mathcal{C}] \in \mathbb{P} \cap \mathfrak{N}[T]$. Имеем $\forall j \in \mathcal{N}$:

$$(T - Na)[\mathcal{C}_{j+1}] \sqsubseteq (T - Na)[\mathcal{C}_j]. \tag{6.11}$$

В связи с (6.11) отметим, что $\mathcal{C}_{j+1} \sqsubseteq \mathcal{C}_j$ и, как следствие (см.(3.3)), имеет место $\mathfrak{N}_0[T;\mathcal{C}_{j+1}] \subset \mathfrak{N}_0[T;\mathcal{C}_j]$ (см. также (3.2) и (6.1)); из (3.14) и (3.15) имеем (6.11). Используя фактически конструкцию (3.6),(3.7) в случае счетного множества $\mathbf{A}$, мы введем $\beta \in \mathbb{M}(T, Z)$, полагая $\forall t \in T$:

$$\beta(t) \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{i\in\mathcal{N}} (T - Na)[\mathcal{C}_i](t). \tag{6.12}$$

Из (3.1),(6.11) и (6.12) вытекает, что имеет место

$$((T - Na)[\mathcal{C}_i])_{i\in\mathcal{N}} \Downarrow \beta. \tag{6.13}$$

Из (6.13) и свойства $\mathbb{P} \in \mathbf{Z}_T$ следует (см.(6.7)) свойство $\beta \in \mathbb{P}$. Напомним, что (см.(2.19)) $\forall j \in \mathcal{N}:\ (T - Na)[\mathcal{C}_j] = \gamma_T((T - Na)[\mathcal{C}_j])$. Из (6.13) имеем сходимость последовательности $(\gamma_T((T-Na)[\mathcal{C}_i]))_{i\in\mathcal{N}}$ к β в смысле (6.1). Но $\mathbb{P} \in \mathfrak{C}_T$ и, в силу (6.8),(6.13), та же самая последовательность сходится к

$\gamma_T(\beta)$. В итоге $\beta = \gamma_T(\beta)$, т.е. $\beta \in \mathfrak{N}[T]$. При этом $\beta \sqsubseteq (N - Na)[\mathcal{C}_i] \sqsubseteq \mathcal{C}_i$ при $i \in \mathcal{N}$. Поскольку истинна посылка (6.10), имеем $\beta \sqsubseteq \mathcal{C}$, т.е. $\beta \in \mathfrak{N}_0[T; \mathcal{C}]$ (см.(3.2),(3.3)). Стало быть, в силу (3.15):

$$\beta \sqsubseteq (T - Na)[\mathcal{C}]. \tag{6.14}$$

Но $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{C}_i$ при $i \in \mathcal{N}$. Поэтому $(T - Na)[\mathcal{C}] \sqsubseteq (T - Na)[\mathcal{C}_j]$, $j \in \mathcal{N}$. С учетом (6.13),(6.14) получаем равенство $\beta = (T - Na)[\mathcal{C}]$ и, стало быть, утверждение следствия (6.10).□

Следствие. *Пусть* $\mathbb{P} \in \mathfrak{Z} \cap \mathbf{Z} \cap \mathfrak{C}$, $(\mathcal{C}_i)_{i \in \mathcal{N}}$ — *последовательность* в $\mathbb{P}$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$. *Тогда*

$$((\mathcal{C}_i)_{i \in \mathcal{N}} \Downarrow \mathcal{C}) \Longrightarrow (((na)[\mathcal{C}_i])_{i \in \mathcal{N}} \Downarrow (na)[\mathcal{C}]).$$

Возвращаясь к замечанию, сделанному перед предложением 6.4, уместно следующее толкование последнего утверждения: отображение

$$\mathcal{C} \longmapsto (na)[\mathcal{C}] : \ \mathbb{M}(\Omega, Z) \longrightarrow \mathbb{M}(\Omega, Z) \tag{6.15}$$

секвенциально непрерывно в смысле сходимости (6.1) на каждом из множеств семейства $\mathfrak{Z} \cap \mathbf{Z} \cap \mathfrak{C}$. При этом (6.15) имеет смысл зависимости решения основной задачи при изменении ее основного условия, а именно, при изменении целевого (априорного) МО.

7. Параллельные итерационные процессы.

Следствие предложения 6.3 характеризует, в терминах (2.5), основной итерационный метод определения наибольшего наследственного мультиселектора целевого МО. Этот "глобальный"метод связан с локальными вариантами итерационной процедуры соотношениями, восходящими к (3.18). В то же время, если в качестве фрагментов Ω рассматривать множества из $\mathbb{H}_0$, то наибольшие наследственные мультиселекторы "локализуются"до своих аналогов на упомянутых фрагментах (см. предложение 4.2), что позволяет затем (см. теорему 4.1) определять решение основной задачи склеиванием аналогичных решений для локальных ее вариантов. Представляет интерес рассмотрение подобной возможности для итерационных процедур, коль скоро последние, как видно из предложения 6.3 и его следствия, реализуют при некоторых условиях искомые наибольшие наследственные мультиселекторы. Заметим, что из (3.10) и (3.18) рассуждением по индукции получаем $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall T \in \Sigma_0\ \forall k \in \mathcal{N}_0 :$

$$(\Gamma^k(\alpha) \mid T) \sqsubseteq \gamma_T^k((\alpha \mid T)). \tag{7.1}$$

В свою очередь, из (7.1) вытекает, что $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall T \in \Sigma_0 :$

$$(\Gamma^\infty(\alpha) \mid T) \sqsubseteq \gamma_T^\infty((\alpha \mid T)). \tag{7.2}$$

В частности, (7.1) и (7.2) можно рассматривать в случае $T \in \mathbb{H}_0$; при этом условии данные соотношения допускают существенное уточнение (см.[17]), основой которого является следующее

Предложение 7.1. *Если* $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z),\ U \in \mathbb{H}_0$ *и* $\mathcal{C}_U \triangleq (\mathcal{C} \mid U)$, *то* $(\Gamma(\mathcal{C}) \mid U) = \gamma_U(\mathcal{C}_U)$.

Доказательство легко следует из (2.13),(2.18) и (4.1). Рассуждением по индукции получаем

Следствие 1. *Если* $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z),\ U \in \mathbb{H}_0$ *и* $\alpha_U \triangleq (\alpha \mid U)$, *то* $\forall k \in \mathcal{N}_0 :$

$$(\Gamma^k(\alpha) \mid U) = \gamma_U^k(\alpha_U).$$

Следствие 2. *Если* $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z),\ U \in \mathcal{H}_0$ *и* $\alpha_U \triangleq (\alpha \mid U)$, *то* $(\Gamma^\infty(\alpha) \mid U) = \gamma_U^\infty(\alpha_U)$.

Доказательство получается непосредственной комбинацией (2.3) и следствия 1. Теперь уже вполне очевидна

Теорема 7.1. *Если* $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ *и* $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_0$, *то справедливы равенства*

$$(\forall k \in \mathcal{N}_0 :\ \Gamma^k(\alpha) = \square_{U \in \mathcal{U}} \gamma_U^k((\alpha \mid U)))\ \&\ (\Gamma^\infty(\alpha) = \square_{U \in \mathcal{U}} \gamma_U^\infty((\alpha \mid U))). \tag{7.3}$$

В интересах интерпретации (7.3) воспользуемся представлением (2.5). Если полагать $\alpha_k \triangleq \Gamma^k(\alpha)$ при $k \in \mathcal{N}_0$ и $\alpha_\infty \triangleq \Gamma^\infty(\alpha)$, то в соответствии с (2.3) и (2.5) мы получаем, что α_∞ есть предел в смысле (6.1) последовательности, определяемой условиями

$$(\alpha_0 \triangleq \alpha)\ \&\ (\forall k \in \mathcal{N} :\ \alpha_k = \Gamma(\alpha_{k-1})); \tag{7.4}$$

здесь мы учли (6.5). Можно, однако, при $U \in \mathcal{U}$ ввести $\alpha_U \triangleq (\alpha \mid U)$, как в следствиях предложения 7.1. Тогда при $\alpha_U^{(k)} \triangleq \gamma_U^k(\alpha_U),\ k \in \mathcal{N}_0$, и $\alpha_U^{(\infty)} \triangleq$

$\gamma_U^\infty(\alpha_U)$ имеем в виде $\alpha_U^{(\infty)}$ предел в смысле (6.1) следующей итерационной последовательности

$$(\alpha_U^{(0)} \triangleq \alpha_U) \ \&\ (\forall k \in \mathcal{N}:\ \alpha_U^{(k)} = \gamma_U(\alpha_U^{(k-1)})). \tag{7.5}$$

Разумеется, здесь учтено предложение 6.1. Последовательность (7.5) может быть реализована для всякого множества $U \in \mathcal{U}$; мы имеем следовательно систему независимых "локальных"итерационных процессов. В свою очередь, "глобальный"итерационный процесс (7.4) можно, в силу теоремы 7.1 (см.(7.3)), интерпретировать, как склейку аналогичных "локальных"процессов (7.5), причем данное суждение охватывает и пределы последовательностей и сами члены последовательностей (при одном и том же значении индекса). В качестве простейшего отметим следующий вариант: если $\alpha^* \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, $H \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\}$, $U_1 \triangleq H$, $U_2 \triangleq \Omega \setminus H$, $\alpha_1^* \triangleq (\alpha^* \mid U_1)$ и $\alpha_2^* \triangleq (\alpha^* \mid U_2)$, то

$$(\forall k \in \mathcal{N}_0:\ \Gamma^k(\alpha^*) = \gamma_{U_1}^k(\alpha_1^*)\Box\gamma_{U_2}^k(\alpha_2^*)) \ \&\ (\Gamma^\infty(\alpha^*) = \gamma_{U_1}^\infty(\alpha_1^*)\Box\gamma_{U_2}^\infty(\alpha_2^*)). \tag{7.6}$$

В (7.6) осуществляется склеивание двух итерационных процессов типа (7.5). Одно из применений теоремы 7.1 может быть связано с исследованием условий, обеспечивающих сходимость основной итерационной процедуры (см.(7.4)), что формализуется в виде равенства $\Gamma^\infty(\alpha) = (na)[\alpha]$, где $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$. Сделаем сначала ряд совсем простых наблюдений. Справедливо очевидное

Предложение 7.2. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ *и* $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_0$ *таковы, что* $\forall U \in \mathcal{U}:$ $\gamma_U^\infty((\alpha \mid U)) = (U - Na)[(\alpha \mid U)]$. *Тогда* $\Gamma^\infty(\alpha) = (na)[\alpha]$.

Следствие. *Пусть* $\alpha^* \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, $U \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\}$, $U_1 \triangleq U$, $U_2 \triangleq \Omega \setminus U$, $\alpha_1^* \triangleq (\alpha^* \mid U_1)$ *и* $\alpha_2^* \triangleq (\alpha^* \mid U_2)$. *Пусть, кроме того,* $(U_1 - Na)[\alpha_1^*] = \gamma_{U_1}^\infty(\alpha_1^*)$ и $(U_2 - Na)[\alpha_2^*] = \gamma_{U_2}^\infty(\alpha_2^*)$. *Тогда* $\Gamma^\infty(\alpha^*) = (na)[\alpha^*]$.

Для доказательства достаточно сравнить теоремы 4.1 и 7.1. В свою очередь, предложение 7.2 (и его следствие) уместно дополнить предложением 6.3.

Предложение 7.3. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_0$ *и* $(\mathbf{Q}_U)_{U \in \mathcal{U}} \in \prod_{U \in \mathcal{U}} (\mathfrak{Z}_U \cap \mathfrak{C}_U)$. *Кроме того, пусть* $\forall T \in \mathcal{U}:\ (\alpha \mid T) \in \mathbf{Q}_T$. *Тогда* $(na)[\alpha] = \Gamma^\infty(\alpha)$.

Доказательство сводится к комбинации предложений 6.3 и 7.2. Отметим частный случай: если $\alpha^* \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, $U \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\}$, $U_1 \triangleq U$, $U_2 \triangleq \Omega \setminus$

U, $\mathbf{Q}_1 \in \mathfrak{Z}_{U_1} \cap \mathfrak{C}_{U_1}$, $\mathbf{Q}_2 \in \mathfrak{Z}_{U_2} \cap \mathfrak{C}_{U_2}$, $\alpha_1^* \stackrel{\triangle}{=} (\alpha^* \mid U_1) \in \mathbf{Q}_1$ и $\alpha_2^* \stackrel{\triangle}{=} (\alpha^* \mid U_2) \in \mathbf{Q}_2$, то $\Gamma^\infty(\alpha^*) = (na)[\alpha^*]$. Здесь удобно использовать непосредственную комбинацию следствий предложений 6.3 и 7.2.

Некоторые частные случаи. В общей постановке задачи определения наследственного МС априори заданной мультифункции естественно выделяется случай построения (однозначных) наследственных селекторов исходного МО. По сути дела речь идет об абстрактном аналоге конструкций [8-10]. Через $\mathbf{n}$ обозначаем сейчас множество всех отображений $\beta \in Z^\Omega$ таких, что $\forall \omega_1 \in \Omega\ \forall \omega_2 \in \Omega\ \forall A \in \mathcal{X}$:

$$((\omega_1 \mid A) = (\omega_2 \mid A)) \Longrightarrow ((\beta(\omega_1) \mid A) = (\beta(\omega_2) \mid A)). \tag{7.7}$$

Элементы $\mathbf{n}$ — абстрактные квазистратегии, если иметь в виду аналогии с [8-10]. Разумеется, (7.7) допускает редукцию, подобно тому как в разделе 2 условие (2.7) было сведено к представлению в терминах свойства неподвижной точки. Тогда имеем свойство: если $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, то

$$\mathbf{n}^0[\mathcal{C}] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{n} \cap (\prod_{\omega \in \Omega} \mathcal{C}(\omega)) \tag{7.8}$$

есть множество всех отображений h из произведения всех множеств $\mathcal{C}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, со свойством

$$\forall \omega_1 \in \Omega\ \forall A \in \mathcal{X}\ \forall \omega_2 \in \Omega_0(\omega_1 \mid A) :\ (h(\omega_1) \mid A) = (h(\omega_2) \mid A).$$

Мы учли (2.9). В теории дифференциальных игр одна из возможностей конструирования квазистратегий состоит в применении т.н. контруправлений [1,с.368]. Такая же схема может быть реализована для построения некоторых отображений, являющихся элементами (7.8). Речь идет о преобразовании элементов Ω в элементы Z посредством отображений r, действующих из $X \times \Upsilon$ в Y и обладающих тем свойством, что $\forall \omega \in \Omega$:

$$(r(x, \omega(x)))_{x \in X} \in Z; \tag{7.9}$$

если при этом ввести отображение β из Ω в Z, сопоставляющее точке $\omega \in \Omega$ функцию (7.9) в виде значения $\beta(\omega)$, то (7.7) выполняется, т.е. (в данном случае) $\beta \in \mathbf{n}$. Ясно также, что $\mathbf{n}$ можно естественным образом погрузить в $\mathbb{N}$, а $\mathbf{n}^0[\mathcal{C}]$, где $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, — в множество $\mathbb{N}_0[\mathcal{C}]$. По этой причине (см. оценки раздела 6) при $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ условие $(DOM)[\Gamma^\infty(\alpha)] \neq \emptyset$ (см.(4.2)) необходимо для справедливости утверждения $\mathbf{n}^0[\alpha] \neq \emptyset$ (при $\beta \in \mathbf{n}^0[\alpha]$ имеем, для $\omega \in \Omega$, свойство $\beta(\omega) \in (na)[\alpha](\omega)$; см.(3.15),(3.16)).

Отметим теперь один совсем простой вариант построения наследственного МС априорного МО, не использующий аналогов МПИ. Для этого заметим прежде всего, что для $T \in \Sigma_0$ и $\mathcal{H} \in \mathbb{M}(T, Z)$ из того, что $\mathcal{H}$ постоянно на T (т.е. $\mathcal{H}(t) \equiv H_0$, где $H_0 \in \mathcal{P}(Z)$), вытекает свойство $\mathcal{H} \in \mathfrak{N}[T]$; для проверки достаточно сравнить (2.13),(2.19). В частности, здесь может рассматриваться случай постоянного (на Ω) отображения $\mathcal{H} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$; при этом $\mathcal{H} \in \mathbb{N}$. Однако, при заданном целевом МО $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ здесь может нарушаться условие $\mathcal{H} \in \mathbf{S}[\alpha]$. В этой связи представляется целесообразным использование локальных версий $\mathcal{H}$ и, на их основе, построение кусочно-постоянных МС "глобального"МО α. Рассмотрим простейшую схему такого рода.

Пусть $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ и $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_0$; МО α рассматриваем в качестве целевого. Если $U \in \mathcal{U}$, то полагаем, что $\mu_U \in \mathbb{M}(U, Z)$ таково, что при всяком $u \in U$ множество $\mu_U(u)$ есть def пересечение всех множеств $\alpha(v)$, $v \in U$; разумеется, μ_U есть постоянное (на U) отображение. Более того (см.(3.3)), $\forall U \in \mathcal{U}: \ \mu_U \in \mathfrak{N}_0[U; (\alpha \mid U)]$. В итоге $(\mu_U)_{U \in \mathcal{U}}$ есть элемент произведения всех множеств $\mathfrak{N}_0[U; (\alpha \mid U)]$, $U \in \mathcal{U}$. Согласно предложению 4.1 имеем, что

$$\mu^* \overset{\triangle}{=} \square_{U \in \mathcal{U}} \mu_U \in \mathbb{N}_0[\alpha]. \tag{7.10}$$

Разумеется, для МО (7.10) возможна ситуация $\mu^* \neq (na)[\alpha]$. Из способа построения μ^* видно, что весьма желательным является использование в качестве $\mathcal{U}$ "самого тонкого"открытого разбиения Ω. В этой связи ниже рассматривается конструкция, исключающая, при одном естественном условии, примеры типа рассмотренного в разделе 4. С этой конструкцией связан и целый ряд других выводов, применимых, в частности, к задаче о построении многозначных квазистратегий для целей управления динамическими системами в условиях помех.

8. Структура фактор-пространства входных воздействий.

В настоящем разделе предполагается выполненным следующее

Условие 8.1. *Семейство $\mathcal{X}$ есть базис фильтра (см.[25],[28]) множества X, т.е. $\forall A \in \mathcal{X}\ \forall B \in \mathcal{X}\ \exists C \in \mathcal{X}: \ C \subset A \cap B$.*

Замечание 8.1. *Условие 8.1 отвечает, по существу, идее представления пространства входных воздействий развивающейся системы. Про-*

стой пример доставляет задача управления системой (1.1) с целью осуществления встречи с движениями системы (1.2) (см. раздел 1). В этом случае разумно (в согласии с (1.3)) определить, при $X = \mathbf{I}_0$, *семейство* $\mathcal{X}$ *в виде семейства всех отрезков* $[t_0, t]$, $t \in X$; *в итоге получается базис фильтра множества* X. *В следующем примере раздела 1 уместно определить* X *в виде отрезка* $I = [-2, 2]$, *а* $\mathcal{X}$ *задать в виде одноэлементного множества* $\{[-1, 1]\}$; *разумеется, и в этом случае* $\mathcal{X}$ *есть базис фильтра. Наконец, в третьем примере раздела 1 наиболее естественный и обсуждавшийся, в связи с "пошаговой"(т.е. "кусочно-программной") схемой развития к.-а. меры, вариант постановки с линейно упорядоченным по вложению множеством* $\mathbb{L}$ *также приводит к удовлетворению условия 8.1 в условиях* $X = \mathcal{L}$ *и* $\mathcal{X} = \mathbb{L}$.

Возвращаясь к общему случаю, отметим, что (при условии 8.1)

$$\mathcal{G} \overset{\triangle}{=} \{ \bigcup_{E \in \mathcal{X}} \Omega_0(\omega \mid E) : \ \omega \in \Omega\} \in \mathbf{H}_0. \tag{8.1}$$

Итак, в данном случае невозможна ситуация, рассмотренная в примере раздела 4. Разумеется, $\mathcal{G} \in 2^{\mathbb{H}_0}$ и, в частности, $\mathcal{G} \subset \Sigma_0$. Кроме того, из (4.1) следует, что $\mathcal{G}$ (8.1) есть топологический базис пространства $(\Omega, \mathbb{H})$. Как обычно [25,с.196], оснащаем $\mathbf{H}_0$ порядком $\prec$, определяемым в терминах вписанности одного открытого разбиения Ω в другое: если $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_0$ и $\mathcal{V} \in \mathbf{H}_0$, то def полагаем, что

$$(\mathcal{U} \prec \mathcal{V}) \Longleftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V} \ \exists U \in \mathcal{U} : \ V \subset U).$$

Легко видеть, что $\mathcal{G}$ есть наибольший в $(\mathbf{H}_0, \prec)$ элемент $\mathbf{H}_0$, т.е. $\mathcal{U} \prec \mathcal{G}$ при $\mathcal{U} \in \mathbf{H}_0$. С другой стороны, (8.1) связано и с естественной факторизацией Ω : если $\omega_1 \in \Omega$ и $\omega_2 \in \Omega$, то def:

$$(\omega_1 \sim \omega_2) \Longleftrightarrow (\exists A \in \mathcal{X} : \ (\omega_1 \mid A) = (\omega_2 \mid A)). \tag{8.2}$$

Именно, как легко проверить, для всяких $\omega_1 \in \Omega$ и $\omega_2 \in \Omega$ свойство $\omega_1 \sim \omega_2$ эквивалентно утверждению о том, что $\exists G \in \mathcal{G} : \ (\omega_1 \in G) \ \& \ (\omega_2 \in G)$. Стало быть, (8.2) — отношение эквивалентности, а $\mathcal{G}$ можно интерпретировать, как соответствующее фактор-пространство Ω. Множества — элементы семейства (8.1) — именуем клетками Ω. Отметим ряд простых свойств клеток (классов эквивалентности).

Предложение 8.1. *Если* $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$ *и* $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\mathbf{G}, Z)$, *то непременно*

$$((DOM)[\gamma_{\mathbf{G}}(\mathcal{C})] \neq \emptyset) \Longrightarrow ((DOM)[\mathcal{C}] = \mathbf{G}).$$

Доказательство представляет собой простую комбинацию (2.13), (2.18), (4.1), (4.2) и, разумеется, условия 8.1. Имеем (см.(2.19)) в качестве следствия, что $\forall \mathbf{G} \in \mathcal{G}\ \forall \mathcal{C} \in \mathfrak{N}[\mathbf{G}]$:

$$((DOM)[\mathcal{C}] \neq \emptyset) \Longrightarrow ((DOM)[\mathcal{C}] = \mathbf{G}). \tag{8.3}$$

В (8.3) имеем полезную характеристику клеток Ω с точки зрения важного свойства невырожденности наследственных МО. Свойства, определяемые предложением 8.1 и (8.3) полезно дополнить предложением 7.1. В самом деле, тогда (см.(4.2)) $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall \mathbf{G} \in \mathcal{G}$:

$$((DOM)[\Gamma(\alpha)] \cap \mathbf{G} \neq \emptyset) \Longrightarrow (\mathbf{G} \subset (DOM)[\alpha]). \tag{8.4}$$

Из (8.4) легко следует, что $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall G \in \mathcal{G}\ \forall k \in \mathcal{N}_0$:

$$(G \cap (DOM)[\Gamma^{k+1}(\alpha)] \neq \emptyset) \Longrightarrow (G \subset (DOM)[\Gamma^k(\alpha)]). \tag{8.5}$$

В свою очередь, из (2.3) и (8.5) вытекает, что $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall G \in \mathcal{G}$:

$$(G \cap (DOM)[\Gamma^\infty(\alpha)] \neq \emptyset) \Longrightarrow (\forall k \in \mathcal{N}_0 :\ G \subset (DOM)[\Gamma^k(\alpha)]). \tag{8.6}$$

Далее, из оценок раздела 6 и (8.6) получаем полезную характеристику решения задачи о наибольшем наследственном мультиселекторе: если $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ и $G \in \mathcal{G}$, то

$$(G \cap (DOM)[(na)[\alpha]] \neq \emptyset) \Longrightarrow (\forall k \in \mathcal{N}_0 :\ G \subset (DOM)[\Gamma^k(\alpha)]). \tag{8.7}$$

Свойство (8.7) естественно сочетается с (8.3) в силу предложения 4.2. В этой связи отметим, что $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{N}\ \forall \mathbf{G} \in \mathcal{G}$:

$$((DOM)[\mathcal{C}] \cap \mathbf{G} \neq \emptyset) \Longleftrightarrow (\mathbf{G} \subset (DOM)[\mathcal{C}]). \tag{8.8}$$

Из (8.8) имеем, конечно, $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall \mathbf{G} \in \mathcal{G}$:

$$((DOM)[(na)[\alpha]] \cap \mathbf{G} \neq \emptyset) \Longleftrightarrow (\mathbf{G} \subset (DOM)[(na)[\alpha]]). \tag{8.9}$$

Свойства (8.8),(8.9) наглядно характеризуют факторизацию Ω на основе (8.2), как согласующуюся с наследственностью, определяемой в терминах базиса фильтра $\mathcal{X}$. В этих представлениях можно, оказывается, существенно продвинуться при некоторых дополнительных преположениях о свойствах пространств раздела 2, связанных с их топологическим оснащением.

9. Наследственные мультиселекторы со значениями в топологических пространствах.

В пределах этого раздела рассматривается общий случай семейства $\mathcal{X}$ раздела 2 (иными словами, здесь мы отказываемся от условия 8.1). Итак, здесь относительно $\mathcal{X}$ предполагается только справедливость (2.6).

Пусть τ — топология Y; стало быть, (Y, τ) — топологическое пространство (ТП). В этих условиях оснащаем множество Y^X (всех отображений из X в Y) естественной топологией $\otimes^X(\tau)$ тихоновского произведения экземпляров (Y, τ) с индексным множеством X (см.[24],[25]). Иными словами,

$$(Y^X, \otimes^X(\tau))$$

есть Y^X в топологии поточечной сходимости; рассматриваем Z как п/п упомянутого ТП. Итак, оснащаем Z топологией θ, индуцированной [24,с.77] топологией $\otimes^X(\tau)$ из Y^X. Итак, (Z, θ) соответствует оснащению Z топологией поточечной сходимости.

Замечание 9.1. *В ряде случаев (см., в частности, третий пример раздела 1) естественно использовать (вместо θ) другое топологическое оснащение Z. Нередко в таком качестве используются более сильные топологии. При этом, однако, важные для дальнейшего свойства компактности подмножеств Z в этих более сильных топологиях сохраняются и в смысле соответствующих п/п (Z, θ). Это суждение полезно дополнить известным свойством [25,с.199], касающимся совпадения сравнимых относительных топологий подмножеств Z; см. также обсуждение конструкций, использующих топологию поточечной сходимости и более сильные топологии, в [24,гл.7].*

В дальнейшем используем обозначения: через $\mathbb{F}$ (через $\mathcal{F}$) обозначаем семейство всех замкнутых (секвенциально замкнутых [4]) в (Z, θ) подмножеств Z; $\mathbb{K}$, $\mathcal{K}$ и $\mathbb{C}$ определяются соответственно, как семейства всех компактных [25,с.196], секвенциально компактных и счетно-компактных в (Z, θ) подмножеств Z; $\mathbb{T} \triangleq \mathbb{C} \cap \mathbb{F}$ (семейство всех замкнутых и счетно-компактных в (Z, θ) подмножеств Z; см.[25]). При $T \in \Sigma_0$ используем (см. раздел 2) $\mathbb{K}^T$, $\mathcal{K}^T$, $\mathbb{C}^T$ и $\mathbb{T}^T$ для обозначения множеств всех отображений из T в $\mathbb{K}$, $\mathcal{K}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{T}$ соответственно, получая подмножества $\mathbb{M}(T, Z)$. Мы следуем здесь символике [17]. Напомним, что $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ и $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$; если (Y, τ) — хаусдорфово ТП, то $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ и $\mathbb{C} \subset \mathcal{F}$. Эти простые свойства легко могут быть извлечены из положений [25,§3.10]. Удобный прием доставляют в этой части конструкции на основе сходимости по Мору-Смиту [24]. Заметим [17], что для всякого $U \in \Sigma_0$ имеет место $\mathbb{T}^U \in \mathbf{Z}_U$, а в случае хаусдорфова ТП (Y, τ) непременно $\mathbb{K}^U \in \mathbf{Z}_U$ и $\mathcal{K}^U \in \mathbf{Z}_U$; проверка этих утверждений очевидна (следует использовать простейшие свойства замкнутых множеств и хаусдорфовых ТП; см. [24],[25]). Эти свойства при $T = \Omega$ использовались в [16].

Предложение 9.1. *Если* (Y, τ) *— хаусдорфово ТП, то* $\forall U \in \Sigma_0$:

$$(\mathbb{K}^U \in \mathfrak{Z}_U) \,\&\, (\mathcal{K}^U \in \mathfrak{Z}_U).$$

Доказательство соответствует в идейном отношении обоснованию подобного утверждения (об инвариантных п/п) в [29],[30]; см. также [16],[17]. Поэтому в данном изложении оно опущено.

Предложение 9.2. *Пусть* (Y, τ) *есть* T_1*-пространство [25,с.69]. Тогда* $\forall U \in \Sigma_0 :\ \mathbb{T}^U \in \mathfrak{C}_U$.

Схема доказательства. Пусть $U \in \Sigma_0$, $(\mathcal{C}_i)_{i \in \mathcal{N}}$ — последовательность в $\mathbb{T}^U$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(U, Z)$; полагаем, что $(\mathcal{C}_i)_{i \in \mathcal{C}} \Downarrow \mathcal{C}$. Тогда в силу (3.10) $\gamma_U(\mathcal{C}) \sqsubseteq \gamma_U(\mathcal{C}_j)$ при $j \in \mathcal{N}$; последовательность $(\gamma_U(\mathcal{C}_i))_{i \in \mathcal{N}}$ монотонно "убывает". Пусть $\omega \in U$, φ — элемент пересечения всех множеств $\gamma_U(\mathcal{C}_i)(\omega)$, $i \in \mathcal{N}$. Ясно (см.(2.13)), что $\varphi \in \mathcal{C}(\omega)$. Пусть $A^* \in \mathcal{X}$ и $\omega^* \in (Ge)[U; \omega \mid A^*]$. Поскольку (см.(2.13)) φ — элемент пересечения всех множеств $\tilde{\gamma}_U[A^*](\mathcal{C}_i)(\omega)$, $i \in \mathcal{N}$, используем (2.11). Пусть последовательность $(\varphi_i^*)_{i \in \mathcal{N}}$ есть элемент произведения всех множеств $Z_0(\varphi \mid A^*) \cap \mathcal{C}_i(\omega^*)$, $i \in \mathcal{N}$. Поскольку, в частности, $(\varphi_i^*)_{i \in \mathcal{N}}$ есть последовательность в множестве $\mathcal{C}_1(\omega^*) \in \mathbb{C}$, то можно указать $\varphi^* \in \mathcal{C}_1(\omega^*)$, направленное множество $(D, \preceq)$, $D \neq \emptyset$, и изотонное, относительно $(D, \preceq)$ и $\mathcal{N}$ (в обычной упорядоченности), отображение $l \in \mathcal{N}^D$ с конфинальным (в $\mathcal{N}$) образом $\{l(d) :\ d \in D\}$, для которых направленность $(D, \preceq, (\varphi_{l(d)}^*)_{d \in D})$ сходится в (Z, θ) к φ^*. Здесь было использовано одно легкоизвлекаемое из утверждений [25,§3.10] представление свойства счетной компактности в терминах возможности "изотонного"прореживания последовательности до сходящейся поднаправленности. По определению θ имеем при $x \in X$ сходимость направленности

$$(D, \preceq, (\varphi_{l(d)}^*(x))_{d \in D})$$

к $\varphi^*(x)$ в ТП (Y, τ). Из (2.10) получаем теперь по основному свойству T_1-пространств [25,с.69] равенство $(\varphi \mid A^*) = (\varphi^* \mid A^*)$. Легко видеть, что

$\mathcal{C}_n(\omega^*) \in \mathbb{F}$ и, стало быть, $\varphi^* \in \mathcal{C}_n(\omega^*)$ при $n \in \mathcal{N}$. Эти свойства означают, что $\varphi^* \in Z_0(\varphi \mid A^*) \cap \mathcal{C}(\omega^*)$, а, поскольку ω^* выбрано произвольно, то $\varphi \in \tilde{\gamma}_U[A^*](\mathcal{C})(\omega)$ в силу (2.11). Но и выбор A^* был произвольным. Поэтому (см.(2.13)) $\varphi \in \gamma_U(\mathcal{C})(\omega)$, чем и завершается существенная часть доказательства. Прочие рассуждения очевидны.

Следствие. *Если (Y,τ) — хаусдорфово ТП и $U \in \Sigma_0$, то $\mathbb{K}^U \in \mathfrak{Z}_U \cap \mathbf{Z}_U \cap \mathfrak{C}_U$.*

Предложение 9.3. *Если (Y,τ) есть хаусдорфово ТП, то $\mathcal{K}^U \in \mathfrak{Z}_U \cap \mathbf{Z}_U \cap \mathfrak{C}_U$.*

Доказательства требует только проверка утверждения $\mathcal{K} \in \mathfrak{C}_U$ в условиях отделимости (Y,τ); эта проверка аналогична в идейном отношении доказательству предложения 9.2 (в его более простой "секвенциальной"версии). Из следствия предложения 9.2 и предложения 9.3 следует утверждение: если (Y,τ) — хусдорфово ТП, то

$$(\mathbb{K}^\Omega \in \mathfrak{Z} \cap \mathbf{Z} \cap \mathfrak{C}) \,\&\, (\mathcal{K}^\Omega \in \mathfrak{Z} \cap \mathbf{Z} \cap \mathfrak{C}). \tag{9.1}$$

Заметим, что в случае, когда (Y,τ) есть T_1-пространство, имеет место $\forall U \in \Sigma_0 :\ \mathbb{T}^U \in \mathbf{Z}_U \cap \mathfrak{C}_U$; в частности, при этом условии $\mathbb{T}^\Omega \in \mathbf{Z} \cap \mathfrak{C}$.

Предложение 9.4. *Пусть (Y,τ) — хаусдорфово ТП и $\mathbf{T} \in \Sigma_0$. Тогда*

$$(\forall \mathcal{C} \in \mathbb{K}^{\mathbf{T}} :\ (\mathbf{T} - Na)[\mathcal{C}] = \gamma^\infty_{\mathbf{T}}(\mathcal{C}) \in \mathbb{K}^{\mathbf{T}}) \,\&\, (\forall \mathcal{D} \in \mathcal{K}^{\mathbf{T}} :$$
$$(\mathbf{T} - Na)[\mathcal{D}] = \gamma^\infty_{\mathbf{T}}(\mathcal{D}) \in \mathcal{K}^{\mathbf{T}}).$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией предложений 6.3,9.3 и следствия предложения 9.2.

Следствие 1. *Пусть (Y,τ) есть хаусдорфово ТП. Тогда*

$$(\forall \alpha \in \mathbb{K}^\Omega :\ (na)[\alpha] = \Gamma^\infty(\alpha) \in \mathbb{K}^\Omega) \,\&\, (\forall \alpha \in \mathcal{K}^\Omega :\ (na)[\alpha] = \Gamma^\infty(\alpha) \in \mathcal{K}^\Omega).$$

Следствие 2. *Пусть (Y,τ) есть хаусдорфово ТП, $U \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\}$, $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ и при этом*

$$(\forall \omega \in U :\ \alpha(\omega) \in \mathbb{K}) \,\&\, (\forall \omega \in \Omega \setminus U :\ \alpha(\omega) \in \mathcal{K}).$$

Тогда $(na)[\alpha] = \Gamma^\infty(\alpha)$ и при этом справедливо:

$$(\forall \omega \in U :\ (na)[\alpha](\omega) \in \mathbb{K}) \,\&\, (\forall \omega \in \Omega \setminus U :\ (na)[\alpha](\omega) \in \mathcal{K}).$$

Для доказательства следствия 2 достаточно использовать (7.6), очевидное следствие теоремы 4.1 и предложение 9.4. Таким образом, в терминах компактности, секвенциальной компактности множеств — значений априорного МО, а также в терминах некоторых комбинаций этих свойств установлен ряд достаточных условий сходимости "глобальной"итерационной процедуры.

10. Некоторые вопросы, связанные со сходимостью эффективных областей мультифункций.

Проблема существования наследственного МС априорной мультифункции, имеющего своими значениями только непустые множества, является одной из ключевых; во многих простых примерах априорная мультифункция с непустыми значениями (непустозначное МО) не обладает такими (нетривиальными) мультиселекторами. По сути дела эта проблема подобна, для случая задач теории дифференциальных игр, проблеме успешной разрешимости в классе квазистратегий и, стало быть, аналогичной разрешимости в соответствующем классе позиционных стратегий (см.[1],[2]), поскольку, как уже отмечалось, две вышеупомянутые формализации игрового управления эквивалентны. Здесь следует иметь в виду, что с точки зрения содержательной задачи определения наследственного МС заданного МО важен именно случай, когда упомянутый мультиселектор имеет своими значениями только непустые множества и, в этом смысле, он подобен многозначным квазистратегиям [11-15]. Исследование такой возможности можно реализовать в форме анализа эффективных областей МО, реализуемых в итерационных процедурах.

Предложение 10.1. *Пусть* (Y, τ) — *хаусдорфово ТП,* $\mathbf{T} \in \Sigma_0$ *и* $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbf{T}} \cup \mathcal{K}^{\mathbf{T}}$. *Тогда*

$$((DOM)[\gamma_{\mathbf{T}}^k(\alpha)])_{k\in\mathcal{N}} \downarrow (DOM)[(\mathbf{T} - Na)[\alpha]]. \tag{10.1}$$

Схема доказательства. Из предложений 6.1 и 9.4 имеем сходимость

$$(\gamma_{\mathbf{T}}^k(\alpha))_{k\in\mathcal{N}} \Downarrow (\mathbf{T} - Na)[\alpha]. \tag{10.2}$$

Из (10.2) следует с очевидностью, что последовательность в левой части (10.1) монотонно "убывает"и, кроме того, пересечение всех множеств этой последовательности содержит эффективную область МО в правой части

(10.2). Стало быть, остается установить противоположное вложение; ограничимся обсуждением случая $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathbf{T}}$ (случай $\alpha \in \mathcal{K}^T$ устанавливается посредством еще более простой "секвенциальной"версии рассматриваемой схемы), фиксируя точку ω в пересечении всех множеств $(DOM)[\gamma_{\mathbf{T}}^k(\alpha)]$, $k \in \mathcal{N}$. Это означает, что $(\gamma_{\mathbf{T}}^k(\alpha)(\omega))_{k\in\mathcal{N}}$ есть последовательность в $\mathbb{K}\setminus\{\emptyset\}$ и, в частности, в $\mathbb{F}\setminus\{\emptyset\}$. Кроме того, $\gamma_T^k(\alpha)(\omega) \subset \alpha(\omega)$, $k \in \mathcal{N}$, а $\alpha(\omega) \in \mathbb{K}$. По свойству центрированных систем замкнутых множеств в компактном ТП (см.[24],[25]) имеем факт непустоты пересечения всех множеств $\gamma_{\mathbf{T}}^k(\alpha)(\omega)$, $k \in \mathcal{N}$, что означает (см.(10.2)): $\omega \in (DOM)[(\mathbf{T} - Na)[\alpha]].\square$

Следствие. *Если* (Y,τ) *— хаусдофово ТП и* $\alpha \in \mathbb{K}^\Omega \cup \mathcal{K}^\Omega$, *то*

$$((DOM)[\Gamma^k(\alpha)])_{k\in\mathcal{N}} \downarrow (DOM)[(na)[\alpha]]. \tag{10.3}$$

Для доказательства (10.3) достаточно учесть (2.17),(3.16) и предложение 10.1.

Предложение 10.2. *Пусть* (Y,τ) *— хаусдорфово ТП,* $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, $U \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\}$ *и*

$$(\forall \omega \in U:\ \alpha(\omega) \in \mathbb{K})\ \&\ (\forall \omega \in \Omega\setminus U:\ \alpha(\omega) \in \mathcal{K}). \tag{10.4}$$

Тогда справедливо (10.3).

Доказательство. Пусть $V \triangleq \Omega \setminus U$. Тогда $\alpha_U \triangleq (\alpha \mid U) \in \mathbb{K}^U$ и $\alpha_V \triangleq (\alpha \mid V) \in \mathcal{K}^V$. Используя предложение 10.1 в случаях $T = U$ и $T = V$, получаем сходимость последовательности $((DOM)[\gamma_U^k(\alpha_U)])_{k\in\mathcal{N}}$ к $(DOM)[(U - Na)[\alpha_U]]$ и сходимость последовательности $((DOM)[\gamma_V^k(\alpha_V)])_{k\in\mathcal{N}}$ к

$$(DOM)[(V - Na)[\alpha_V]]$$

(см.(10.1)). С другой стороны, из предложения 9.4 имеем

$$((U - Na)[\alpha_U] = \gamma_U^\infty(\alpha_U))\ \&\ ((V - Na)[\alpha_V] = \gamma_V^\infty(\alpha_V)).$$

При этом $(na)[\alpha] = (U - Na)[\alpha_U]\square(V - Na)[\alpha_V]$ (см. теорему 4.1). Как следствие,

$$(DOM)[(na)[\alpha]] = (DOM)[(U - Na)[\alpha_U]] \cup (DOM)[(V - Na)[\alpha_V]], \tag{10.5}$$

причем множества в правой части (10.5) дизъюнктны. Напомним, что (см. (7.6))

$$(\forall k \in \mathcal{N}_0:\ \Gamma_k(\alpha) = \gamma_U^k(\alpha_U)\square\gamma_V^k(\alpha_V))\ \&\ (\Gamma^\infty(\alpha) = \gamma_U^\infty(\alpha_U)\square\gamma_V^\infty(\alpha_V)). \tag{10.6}$$

Разумеется, $(DOM)[(na)[\alpha]]$ есть подмножество пересечения всех множеств последовательности в левой части (10.3); см. раздел 6. Осталось установить вложение

$$\bigcap_{k\in\mathcal{N}}(DOM)[\Gamma^k(\alpha)] \subset (DOM)[(na)[\alpha]]. \tag{10.7}$$

Пусть ω — точка множества в левой части (10.7), т.е. $\Gamma^k(\alpha)(\omega) \neq \emptyset,\ k \in \mathcal{N}$. Рассмотрим отдельно два возможных случая: 1)$\omega \in U$; 2)$\omega \in V$. Пусть имеет место случай

1). Тогда в силу (10.6) $\Gamma^k(\alpha)(\omega) = \gamma_U^k(\alpha_U)(\omega)$ при $k \in \mathcal{N}$. Следовательно, $\omega \in (DOM)[\gamma_U^k(\alpha_U)],\ k \in \mathcal{N}$. Тогда $\omega \in (DOM)[(U - Na)[\alpha_U]]$ (см. замечание в начале доказательства). Из (10.5) имеем свойство $\omega \in (DOM)[(na)[\alpha]]$.

2) В данном случае $\omega \in V$ и, в силу (10.6), $\Gamma^k(\alpha)(\omega) = \gamma_V^k(\alpha_V)(\omega),\ k \in \mathcal{N}$. Это означает, что $\omega \in (DOM)[\gamma_V^k(\alpha_V)],\ k \in \mathcal{N}$; как следствие, $\omega \in (DOM)[(V - Na)[\alpha_V]]$. Снова используя (10.5), получаем: $\omega \in (DOM)[(na)[\alpha]]$. Вложение (10.7) установлено.$\square$

Следствие предложения 10.1 и предложение 10.2 в своей совокупности исчерпывающим образом характеризуют сходимость эффективных областей МО, реализуемых итерационной процедурой в условиях, когда априорное МО характеризуется компактностью, секвенциальной компактностью своих значений, либо комбинацией этих свойств, согласующейся с топологией $\mathbb{H}$ (4.1). Теперь очевидно следующее

Предложение 10.3. *Пусть (Y, τ) есть хаусдорфово ТП, $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ и выполняется одно из следующих трех условий: 1) $\alpha \in \mathbb{K}^\Omega$; 2)$\alpha \in \mathcal{K}^\Omega$; 3) существует множество $U \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\}$, удовлетворяющее (10.4). Тогда* $\forall \omega \in \Omega:$

$$((na)[\alpha](\omega) = \emptyset) \Longrightarrow (\exists n \in \mathcal{N}:\ \Gamma^n(\alpha)(\omega) = \emptyset).$$

Доказательство очевидно: поскольку каждое из условий 1)-3) гарантирует (см. следствие предложения 10.1 и предложение 10.2) справедливость (10.3), то для $\omega \in \Omega$ со свойством $(na)[\alpha](\omega) = \emptyset$ имеем $\omega \in \Omega \setminus (DOM)[(na)[\alpha]]$, а тогда $\omega \in \Omega \setminus (DOM)[\Gamma^n(\alpha)]$ при некотором $n \in \mathcal{N}$.

11. Некоторые свойства наследственных мультиселекторов компактнозначных мультифункций.

В настоящем разделе исследуются некоторые свойства, по смыслу являющиеся аналогами предложения 6.4. Здесь, однако, исследуются "несеквенциальные"варианты зависимости наибольшего наследственного МС априорной мультифункции при изменении последней. Сначала отметим совсем простое свойство: если (Y, τ) есть T_1-пространство, то $\forall A \in \mathfrak{X}\ \forall z \in Z$: $Z_0(z \mid A) \in \mathbb{F}$.

Если $T \in \Sigma_0$, $\Lambda \in \mathcal{Z}_T$ и $\mathbf{L}$ есть непустое подмножество $\mathbb{M}(\Omega, Z)$, то полагаем, что

$$\bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{L}}^{[T]} \Lambda(\mathcal{C}) \in \mathbb{M}(T, Z) \tag{11.1}$$

есть def отображение (3.6),(3.7) при условии, что $\mathbf{A} \overset{\triangle}{=} \{\Lambda(\mathcal{C}) : \ \mathcal{C} \in \mathbf{L}\}$; стало быть, значение отображения (11.1) в произвольной точке $\omega \in T$ есть пересечение всех множеств $\Lambda(\mathcal{C})(\omega)$, $\mathcal{C} \in \mathbf{L}$. Напомним, что (11.1) есть точная нижняя грань вышеупомянутого множества $\mathbf{A}$ в $\mathbb{M}(T, Z)$ с порядком (3.1). Условимся о соглашении: если в (11.1) $T = \Omega$, то в левой части (11.1) верхний индекс $[T]$ опускаем, действуя по аналогии с (3.8); разумеется, это соглашение касается случая $\Lambda \in \mathcal{Z}$.

Предложение 11.1. *Пусть* (Y, τ) *есть хаусдорфово ТП,* $\mathbf{T} \in \Sigma_0$, *а* $\mathbf{M}$ *есть непустое подмножество* $\mathbb{K}^{\mathbf{T}}$, *для которого*

$$\forall \alpha \in \mathbf{M}\ \forall \beta \in \mathbf{M}\ \exists \lambda \in \mathbf{M} : \ (\lambda \sqsubseteq \alpha)\ \&\ (\lambda \sqsubseteq \beta). \tag{11.2}$$

Тогда справедливо равенство

$$\gamma_{\mathbf{T}}(\bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{M}}^{[\mathbf{T}]} \mathcal{C}) = \bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{M}}^{[\mathbf{T}]} \gamma_{\mathbf{T}}(\mathcal{C}). \tag{11.3}$$

Доказательство. В силу (3.10) МО в левой части (11.3) есть миноранта $\{\gamma_{\mathbf{T}}(\mathcal{C}) : \ \mathcal{C} \in \mathbf{M}\}$ в $\mathbb{M}(\mathbf{T}, Z)$ с порядком, определяемым подобно (3.1). Осталось установить, что при $\omega \in \mathbf{T}$ имеет место вложение

$$(\bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{M}}^{[\mathbf{T}]} \gamma_{\mathbf{T}}(\mathcal{C}))(\omega) \subset \gamma_{\mathbf{T}}(\bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{M}}^{[\mathbf{T}]} \mathcal{C})(\omega). \tag{11.4}$$

Фиксируем $\omega \in \mathbf{T}$. Выберем произвольный элемент φ множества в левой части (11.4). Тогда $\forall \mathcal{C} \in \mathbf{M}: \ \varphi \in \gamma_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})(\omega)$. Разумеется,

$$\varphi \in \left(\bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{M}}^{[\mathbf{T}]} \mathcal{C} \right)(\omega). \tag{11.5}$$

Далее, $\varphi \in Z$ обладает свойством: $\varphi \in \tilde{\gamma}_{\mathbf{T}}[A](\mathcal{C})(\omega)$ при $A \in \mathcal{X}$ и $\mathcal{C} \in \mathbf{M}$. Пусть $A \in \mathcal{X}$ и $s \in (Ge)[\mathbf{T}; \omega \mid A]$. Тогда (см.(2.11)) $\forall \mathcal{C} \in \mathbf{M}: \ Z_0(\varphi \mid A) \cap \mathcal{C}(s) \neq \emptyset$. При этом $Z_0(\varphi \mid A) \in \mathbb{F}$ и $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$. Из предположений о свойствах $\mathbf{M}$ имеем, что

$$\forall \mathbf{Q} \in Fin(\mathbf{M}) \ \exists \mathcal{C} \in \mathbf{M}: \ \mathcal{C} \sqsubseteq \bigwedge_{Q \in \mathbf{Q}}^{[\mathbf{T}]} Q. \tag{11.6}$$

Дело в том, что при оснащении $\mathbf{M}$ порядком, определяемым подобно (3.1) и индуцированным, стало быть, из $\mathbb{M}(\mathbf{T}, Z)$, мы получаем направленное множество [24,гл.2], чем и обеспечивается справедливость (11.6). Фиксируем $\tilde{\mathcal{M}} \in \mathbf{M}$, получая $\tilde{\mathcal{M}}(s) \in \mathbb{K}$. Через ϑ обозначаем топологию $\tilde{\mathcal{M}}(s)$, индуцированную [24,с.77] из (Z, θ). Тогда $(\tilde{\mathcal{M}}(s), \vartheta)$ — компакт [25,с.208]. Через $\mathbf{F}$ обозначим семейство всех замкнутых в ТП $(\tilde{\mathcal{M}}(s), \vartheta)$ подмножеств $\tilde{\mathcal{M}}(s)$. Тогда $\forall F \in \mathbb{F}: \ \tilde{\mathcal{M}}(s) \cap F \in \mathbf{F}$. Если $\mathbb{Q} \in Fin(\mathbf{M})$, то и $\tilde{\mathbb{Q}} \triangleq \mathbb{Q} \cup \{\tilde{\mathcal{M}}\} \in Fin(\mathbf{M})$; поэтому (см.(11.6)) существует $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} \in \mathbf{M}$ такое, что

$$\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} \sqsubseteq \bigwedge_{Q \in \tilde{\mathbb{Q}}}^{[\mathbf{T}]} Q;$$

при этом, разумеется, имеем вложение

$$\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}(s) \subset \tilde{\mathcal{M}}(s) \cap (\bigcap_{Q \in \mathbb{Q}} Q(s),$$

а тогда, как следствие, выполняется

$$Z_0(\varphi \mid A) \cap \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}(s) \subset \bigcap_{Q \in \mathbb{Q}} (\tilde{\mathcal{M}}(s) \cap Z_0(\varphi \mid A) \cap Q(s)) \tag{11.7}$$

и, следовательно, множество в правой части (11.7) непусто. Мы получили, что $\mathfrak{F} \triangleq \{\tilde{\mathcal{M}}(s) \cap Z_0(\varphi \mid A) \cap Q(s) : \ Q \in \mathbf{M}\}$ есть центрированная система множеств из $\mathbf{F}$. Поэтому пересечение всех множеств из $\mathfrak{F}$ непусто (см.[24],[25]). Пусть ψ есть элемент упомянутого пересечения всех множеств из $\mathfrak{F}$. Тогда $\psi \in Z_0(\varphi \mid A)$ и, кроме того, ψ есть элемент пересечения всех множеств $\mathcal{C}(s)$, $\mathcal{C} \in \mathbf{M}$. Это означает, что

$$\psi \in Z_0(\varphi \mid A) \cap \left(\bigwedge_{\mathcal{C}\in\mathbf{M}}^{[\mathbf{T}]} \mathcal{C} \right)(s).$$

Поскольку выбор A и s был произвольным, установлено (см.(2.13),(11.5)), что

$$\varphi \in \gamma_{\mathbf{T}} \left(\bigwedge_{\mathcal{C}\in\mathbf{M}}^{[\mathbf{T}]} \mathcal{C} \right)(\omega),$$

чем и завершается обоснование вложения (11.4).□

Следствие. *Пусть* (Y, τ) *— хаусдорфово ТП,* $\mathbf{T} \in \Sigma_0$, а $\mathbf{M}$ *есть непустое подмножество* $\mathfrak{N}[\mathbf{T}] \cap \mathbb{K}^{\mathbf{T}}$ *со свойством (11.2). Тогда*

$$\bigwedge_{\mathcal{C}\in\mathbf{M}}^{[\mathbf{T}]} \mathcal{C} \in \mathfrak{N}[\mathbf{T}]. \tag{11.8}$$

Доказательство очевидно: поскольку $\mathbf{M} \subset \mathfrak{N}[\mathbf{T}]$, то $\mathcal{C} = \gamma_T(\mathcal{C})$ при $\mathcal{C} \in \mathbf{M}$ (см.(2.19)); с учетом (11.3) получаем теперь, что отображение в левой части (11.8) есть неподвижная точка $\gamma_{\mathbf{T}}$ (само (11.8) следует теперь из (2.19)).□

В предложении 11.1 полезно выделить случай $\mathbf{T} = \Omega$: если (Y, τ) — хаусдорфово ТП, а $\mathbf{M}$ есть непустое подмножество $\mathbb{K}^{\Omega}$, удовлетворяющее (11.2), то

$$\Gamma\left(\bigwedge_{\mathcal{C}\in\mathbf{M}} \mathcal{C} \right) = \bigwedge_{\mathcal{C}\in\mathbf{M}} \Gamma(\mathcal{C});$$

если же $\mathbf{M}$ есть, кроме того, подмножество $\mathbb{N}$, то справедливо

$$\bigwedge_{\mathcal{C}\in\mathbf{M}} \mathcal{C} \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что в качестве Λ в (11.1) можно, в частности, использовать оператор, сопоставляющий МО $\alpha \in \mathbb{M}(T, Z)$ отображение $(T - Na)[\alpha]$ (3.14). Из (3.3),(3.14) следует, что данный оператор является монотонным: если $T \in \Sigma_0$, $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(T, Z)$ и $\mathcal{D} \in \mathbb{M}(T, Z)$, то

$$(\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{D}) \Longrightarrow ((T - Na)[\mathcal{C}] \sqsubseteq (T - Na)[\mathcal{D}]). \tag{11.9}$$

В связи с обоснованием (11.9) следует учитывать очевидную монотонность зависимости множества (3.2) при изменении априорного МО.

Теорема 11.1. *Пусть:* (Y, τ) *есть хаусдорфово ТП;* $\mathbf{T} \in \Sigma_0$; $\mathbf{K}$ *есть непустое подмножество* $\mathbb{K}^{\mathbf{T}}$ *такое, что* $\forall \alpha \in \mathbf{K}\ \forall \beta \in \mathbf{K}\ \exists \lambda \in \mathbf{K} :\ (\lambda \sqsubseteq \alpha)\ \&\ (\lambda \sqsubseteq \beta)$. *Тогда*

$$(\mathbf{T} - Na)[\bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{K}}^{[\mathbf{T}]} \mathcal{C}] = \bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{K}}^{[\mathbf{T}]} (T - Na)[\mathcal{C}].$$

Доказательство. Рассмотрим непустое множество $\mathbf{M} \stackrel{\triangle}{=} \{(\mathbf{T} - Na)[\mathcal{C}] : \mathcal{C} \in \mathbf{K}\}$. Легко видеть, что $\mathbf{M}$ обладает свойством (11.2); в этой части следует учесть (11.9) и предположение относительно $\mathbf{K}$. При этом $\mathbf{M} \subset \mathfrak{N}[\mathbf{T}] \cap \mathbb{K}^{\mathbf{T}}$ согласно (3.3),(3.14) и предложению 9.4, а потому верно (11.8). Иными словами (см. определение (11.1)), имеет место

$$\mathcal{U} \stackrel{\triangle}{=} \bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{K}}^{[\mathbf{T}]} (\mathbf{T} - Na)[\mathcal{C}] \in \mathfrak{N}[\mathbf{T}].$$

Из (3.3),(3.14) имеем с очевидностью

$$\mathcal{U} \sqsubseteq \bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{K}}^{[\mathbf{T}]} \mathcal{C}.$$

Поэтому имеем с очевидностью свойство

$$\mathcal{U} \in \mathfrak{N}_0[\mathbf{T}; \bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{K}}^{[\mathbf{T}]} \mathcal{C}]. \tag{11.10}$$

Разумеется, из (3.15) и (11.10) вытекает, что

$$\mathcal{U} \sqsubseteq (\mathbf{T} - Na)[\bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{K}}^{[\mathbf{T}]} \mathcal{C}]. \tag{11.11}$$

С другой стороны, из (11.9) легко следует, что $\forall \alpha \in \mathbf{K}$:

$$(\mathbf{T} - Na)[\bigwedge_{\mathcal{C} \in \mathbf{K}}^{[\mathbf{T}]} \mathcal{C}] \sqsubseteq (\mathbf{T} - Na)[\alpha].$$

Как следствие (см. определение $\mathcal{U}$) имеем в виде $\mathcal{U}$ мажоранту отображения в правой части (11.11), т.е. (11.11) на самом деле является равенством, чем и завершается доказательство.$\square$

Следствие. *Пусть* (Y, τ) *есть хаусдорфово ТП,* $\mathbf{K}$ *есть непустое подмножество* $\mathbb{K}^\Omega$ *такое, что* $\forall \alpha \in \mathbf{K}\ \forall \beta \in \mathbf{K}\ \exists \lambda \in \mathbf{K}:\ (\lambda \sqsubseteq \alpha)\ \&\ (\lambda \sqsubseteq \beta)$. *Тогда*

$$(na)\left[\bigwedge_{\mathcal{C}\in\mathbf{K}} \mathcal{C}\right] = \bigwedge_{\mathcal{C}\in\mathbf{K}} (na)[\mathcal{C}].$$

Мы получили новое важное свойство оператора (6.15). Следствия предложений 6.4 и теоремы 11.1 позволяет осуществлять, на пространстве решений основной задачи о наследственных МС, монотонные предельные переходы.

В заключении раздела совсем кратко коснемся применений конструкций настоящего раздела к исследованию упомянутой задачи в рассматриваемых условиях топологического оснащения Y.

Полагаем до конца настоящего раздела, что (Y, τ) есть хаусдорфово ТП. Тогда по аналогии с предложением 9.1 имеем $\forall T \in \Sigma_0\ \forall A \in \mathfrak{X}:$

$$(\forall \mathcal{C} \in \mathbb{K}^T:\ \tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{C}) \in \mathbb{K}^T)\ \&\ (\forall \mathcal{D} \in \mathcal{K}^T:\ \tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{D}) \in \mathcal{K}^T). \tag{11.12}$$

В частности, $\forall A \in \mathfrak{X}:\ (\forall \mathcal{C} \in \mathbb{K}^\Omega:\ \Gamma_A(\mathcal{C}) \in \mathbb{K}^\Omega)\ \&\ (\forall \mathcal{D} \in \mathcal{K}^\Omega:\ \Gamma_A(\mathcal{D}) \in \mathcal{K}^\Omega)$. Из (5.8),(11.12) имеем с очевидностью $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \alpha \in \mathbb{M}(T, Z)\ \forall A \in \mathfrak{X}:$

$$(\mathbb{K}^T \in \mathfrak{M}(T, \alpha, A))\ \&\ (\mathcal{K}^T \in \mathfrak{M}(T, \alpha, A)). \tag{11.13}$$

Как следствие, из (11.13) получается, что $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\ \forall A \in \mathfrak{X}:$

$$(\mathbb{K}^\Omega \in \mathfrak{M}[\alpha; A])\ \&\ (\mathcal{K}^\Omega \in \mathfrak{M}[\alpha; A]). \tag{11.14}$$

Свойства (11.13),(11.14) позволяют построить полезные конкретизации (5.9) и (5.10) соответственно (см. также прочие заключительные положения раздела 5). Так, из (5.9) и (11.13) вытекает, что $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \alpha \in \mathbb{M}(T, Z)\ \forall A \in \mathfrak{X}:$

$$\begin{gathered}(\mathbb{K}^T \cap (f.p. - \alpha)[A \mid T] = \{\tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{H}):\ \mathcal{H} \in \mathbb{K}^T \cap \mathbf{S}_T(\alpha)\})\ \& \\ \&\ (\mathcal{K}^T \cap (f.p. - \alpha)[A \mid T] = \{\tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{H}):\ \mathcal{H} \in \mathcal{K}^T \cap \mathbf{S}_T(\alpha)\}).\end{gathered} \tag{11.15}$$

В частности, (11.15) можно использовать при $\alpha \in \mathbb{K}^T$ и при $\alpha \in \mathcal{K}^T$. Данное представление (11.15) удобно применять в (5.2). Действительно, из (5.2) и (11.15) имеем $\forall T \in \Sigma_0\ \forall \alpha \in \mathbb{M}(T, Z):$

$$\begin{gathered}(\mathfrak{N}_0[T; \alpha] \cap \mathbb{K}^T = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \{\tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{H}):\ \mathcal{H} \in \mathbb{K}^T \cap \mathbf{S}_T(\alpha)\})\ \& \\ \&\ (\mathfrak{N}_0[T; \alpha] \cap \mathcal{K}^T = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \{\tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{H}):\ \mathcal{H} \in \mathcal{K}^T \cap \mathbf{S}_T(\alpha)\}).\end{gathered} \tag{11.16}$$

Наиболее полезные случаи (11.16) определяются условиями $\alpha \in \mathbb{K}^T$ и $\alpha \in \mathcal{K}^T$ соответственно. Если $T \in \Sigma_0$ и $\alpha \in \mathbb{K}^T$, то (см. (3.14), предложение 9.4) $(T - Na)[\mathcal{C}] \in \mathfrak{N}_0[T;\alpha] \cap \mathbb{K}^T$ и, более того, $\forall \beta \in \mathfrak{N}_0[T;\alpha] \cap \mathbb{K}^T: \ \beta \sqsubseteq (T - Na)[\alpha]$. Следовательно, если, при $T \in \Sigma_0$ и $\alpha \in \mathbb{K}^T$, удается для $\mathcal{D} \in \mathbb{M}(T, Z)$ подобрать при каждом $A \in \mathcal{X}$ МО $\mathcal{H}_A \in \mathbb{K}^T \cap \mathbf{S}_T(\alpha)$ так, что при этом $\mathcal{D} = \tilde{\gamma}_T[A](\mathcal{H}_A)$, то $\mathcal{D} \in \mathfrak{N}_0[T;\alpha] \cap \mathbb{K}^T$ и, стало быть, $\mathcal{D}$ можно рассматривать в качестве претендента "на роль"$(T - Na)[\mathcal{C}]$; на множестве всех таких претендентов следует выбрать наибольший элемент. Аналогичная картина складывается и при $\alpha \in \mathcal{K}^T$. Полезно отметить конкретизацию (11.16), отвечающую случаю $T = \Omega$. Именно, $\forall \alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z):$

$$\begin{gathered}(\mathbb{N}_0[\alpha] \cap \mathbb{K}^\Omega = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \{\Gamma_A(\mathcal{H}):\ \mathcal{H} \in \mathbb{K}^\Omega \cap \mathbf{S}[\alpha]\}) \ \& \\ \& \ (\mathbb{N}_0[\alpha] \cap \mathcal{K}^\Omega = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \{\Gamma_A(\mathcal{H}):\ \mathcal{H} \in \mathcal{K}^\Omega \cap \mathbf{S}[\alpha]\}).\end{gathered} \tag{11.17}$$

Полезно отметить, наряду с (11.17), и очевидную комбинацию положений (11.16) для определения наибольшего наследственного МС мультифункции, заданной на Ω. В этой связи см. следующее

Замечание 11.1. *Пусть* $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ *и* $U \in \mathbb{H}_0 \setminus \{\Omega\}$ *таковы, что*

$$(\forall \omega \in U:\ \mathcal{C}(\omega) \in \mathbb{K}) \ \& \ (\forall \omega \in \Omega \setminus U:\ \mathcal{C}(\omega) \in \mathcal{K}).$$

Воспользуемся первым утверждением в (11.16) при $T = U$, *а вторым — при* $T = \Omega \setminus U$. *Пусть:* $(U_1 \stackrel{\triangle}{=} U) \ \& \ (U_2 \stackrel{\triangle}{=} \Omega \setminus U)$. *Тогда* $U_1 \in \mathbb{H}_0$, $U_2 \in \mathbb{H}_0$ *(см. раздел 4),* $\alpha_1 \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{C} \mid U_1) \in \mathbb{K}^{U_1}$ *и* $\alpha_2 \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{C} \mid U_2) \in \mathcal{K}^{U_2}$. *Тогда (см. теорему 4.1) имеем*

$$(na)[\mathcal{C}] = (U_1 - Na)[\alpha_1] \square (U_2 - Na)[\alpha_2]. \tag{11.18}$$

Для определения МО (11.18) теперь следует привлечь первое утверждение в (11.16) при $T = U_1$ *и* $\alpha = \alpha_1$, *а также второе утверждение (11.16) при* $T = U_2$ *и* $\alpha = \alpha_2$. *Эти конструкции формально не требуют построения последовательности итераций, но связаны с определением (посредством (2.11)) своеобразных претендентов "на роль"*$(U_1 - Na)[\alpha_1]$ *(см. рассуждение после (11.16)) и аналогичных претендентов "на роль"*$(U_2 - Na)[\alpha_2]$. *В принципе для конструкций типа (11.18) можно использовать, при построении одних фрагментов* $(na)[\mathcal{C}]$, *итерационные методы, а для построения других — конструкции типа (11.16).*

12. Метод итераций и некоторые вопросы структуры эффективных областей наследственных мультиселекторов.

В пределах настоящего раздела полагаем выполненным условие 8.1 и используем факторизацию Ω на основе (8.2). Кроме того, здесь существенно используется предложение 10.1 в случае, когда $\mathbf{T} \in \mathcal{G}$ (см.(8.1)).

Предложение 12.1. *Пусть* $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, $G \in \mathcal{G}$ *и* $(\mathcal{C} \mid G) \in \mathbb{K}^G \cup \mathcal{K}^G$. *Тогда эквивалентны следующие четыре утверждения:*

1) $(DOM)[(na)[\mathcal{C}]] \cap G = \emptyset$;

2)$G \setminus (DOM)[(na)[\mathcal{C}]] \neq \emptyset$;

3)$\exists k \in \mathcal{N}: \ (DOM)[\Gamma^k(\mathcal{C})] \cap G = \emptyset$;

4)$\exists k \in \mathcal{N}_0: \ G \setminus (DOM)[\Gamma^k(\mathcal{C})] \neq \emptyset$.

Доказательство. Из (8.5) вытекает импликация 4) $\Longrightarrow$ 3). С другой стороны, поскольку $G \in \mathcal{G}$, то (см.(8.1)) $G \neq \emptyset$ и 3) $\Longrightarrow$ 4). Стало быть, у нас 3) $\Longleftrightarrow$ 4). Из (8.7) имеем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). Снова используя свойства клеток (см.(8.1)), имеем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть истинно 2). Выберем произвольно $\omega \in G \setminus (DOM)[(na)[\mathcal{C}]]$. Тогда $(na)[\mathcal{C}](\omega) = \emptyset$. Поэтому $(G - Na)[(\mathcal{C} \mid G)](\omega) = \emptyset$ в силу предложения 4.2; мы учли здесь, что $G \in \mathbb{H}_0$ (см.(8.1)). Вместе с тем из предложения 10.1 имеем сходимость

$$((DOM)[\gamma_G^k((\mathcal{C} \mid G))])_{k\in\mathcal{N}} \downarrow (DOM)[(G - Na)[(\mathcal{C} \mid G)]],$$

откуда следует $\omega \notin (DOM)[\gamma_G^k((\mathcal{C} \mid G))]$ при некотором $k \in \mathcal{N}$, т.е. $\gamma_G^k((\mathcal{C} \mid G))(\omega) = \emptyset$. С учетом следствия 1 предложения 7.1 получаем равенство $\Gamma^k(\mathcal{C})(\omega) = \emptyset$. Стало быть, $\omega \in G \setminus (DOM)[\Gamma^k(\mathcal{C})]$. Мы получили справедливость 4), а, стало быть, и справедливость 3). Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) установлена, чем и завершается доказательство в целом.

Полезно отметить одно следствие. Из предложения 12.1 и (8.9) вытекает свойство: если $(na)[\mathcal{C}](\omega) = \emptyset$ для некоторого элемента $\omega \in G$ (а в этом случае решение основной задачи вырождается на клетке G), то непременно найдется номер $k \in \mathcal{N}$ такой, что $\Gamma^k(\mathcal{C})(\omega) = \emptyset$ при любом значении $\omega \in G$; иными словами, факт вырождения решения основной задачи "надежно"фиксируется уже после исполнения конечного числа итераций, если только сужение априорной мультифункции на множество G либо компактнозначно, либо имеет (на G) только секвенциально компактные значения.

13. Квазистратегии в задаче управления с неполной информацией.

Вернемся к задаче управления раздела 1. Итак, полагаем заданными системы (1.1), (1.2), удовлетворяющие стандартным условиям, упомянутым при обсуждении уравнений (1.1), (1.2) (см. также [1], [2, с. 37,38], [3, с. 52]). Напомним, в частности, предположения о выпуклости компактов P и Q. Полагаем, что игрок-союзник формирует управление в системе (1.1) или, что то же самое,— движение $\mathbf{y} = y(\cdot) \in \mathbf{Y}_0$ этой системы с заданным и известным ему начальным условием. В отношении начального условия для системы (1.2) ему известно только то, что $z(t_0) \in Z^0$, где Z^0 есть непустое компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, игрок-союзник не получает с течением времени достоверной информации о реализации движения системы (1.2). Ему становится известной только искаженная непрерывно действующей помехой траектория, причем интенсивность помехи в каждый момент $t \in \mathbf{I}_0$ ограничена заданной погрешностью "прибора"$\delta \in [0, \infty[$ (случай $\delta = 0$ не исключается, но и не содержит ничего нового в сравнении с примером раздела 1). Полагаем для простоты, что эта интенсивность оценивается используемой в разделе 1 эвклидовой нормой рассогласования векторов состояния системы (1.2) и наблюдения; при обозначении данной нормы используем символ $\| \cdot \|$. Достоверно известно, что в условиях реализации сигнала $\hat{z}(\cdot) = (\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^n, t_0 \leq t \leq \vartheta_0)$ истинная траектория $z(\cdot)$ системы (1.1) удовлетворяет вышеупомянутому требованию принадлежности начального состояния множеству Z^0 и условию: $\| z(t) - \hat{z}(t) \| \leq \delta$ при всех $t \in \mathbf{I}_0$. Допустим к рассмотрению в качестве возможных реализаций аддитивной помехи всевозможные непрерывные функции из $\mathbf{I}_0$ в замкнутый эвклидов шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат и радиусом δ. Полагаем, что сигнал, поступающий игроку-союзнику есть всякий раз сумма истинной траектории системы (1.2) и δ-ограниченной непрерывной реализации аддитивной помехи. Разумеется, сигнал есть элемент множества $C_n(\mathbf{I}_0)$. Отображение α из $C_n(\mathbf{I}_0)$ в $\mathbf{Y}_0$ именуем сейчас псевдостратегией, ориентируясь на [10]. Если же α удовлетворяет аналогу (1.3) при условии замены (в (1.3)) траекторий системы (1.2) сигналами, то можно говорить об α, как о квазистратегии. Впрочем, множество $C_n(\mathbf{I}_0)$ разумно "сократить", имея в виду, что возможные сигналы получаются только в виде искаженных, "не более, чем на δ", траекторий системы (1.2). Итак, введем пучок $\mathbf{Z}^0$ всех траекторий системы (1.2), порожденных каждая некоторым управлением $V \in \mathcal{V}$ из какой-либо позиции (t_0, z_0), $z_0 \in Z^0$.

Легко видеть, что $\mathbf{Z}^0$ — компакт в $C_n(\mathbf{I}_0)$, оснащенном метрикой равномерной сходимости. Тогда "вместо"$C_n(\mathbf{I}_0)$ логично рассматривать множество $\mathbf{B}^0$ всех вектор-функций $\hat{z}(\cdot) = (\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^n,\ t_0 \leq t \leq \vartheta_0) \in C_n(\mathbf{I}_0)$ таких, что

$$\exists \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^0 \quad \forall t \in \mathbf{I}_0 : \qquad \| \hat{z}(t) - \mathbf{z}(t) \| \leq \delta.$$

Конкретный выбор $\hat{z}(\cdot) \in \mathbf{B}^0$ может быть реализован "игроком-противником"посредством назначения $z_0 \in Z^0$, $V = v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и δ-ограниченной непрерывной реализации помехи в канале наблюдения. Теперь с каждой вектор-функцией $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{B}^0$ уместно связать множество $\Lambda[\hat{\mathbf{z}}]$ всех возможных траекторий $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^0$, для каждой из которых $\| \hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t) \| \leq \delta$ при всех $t \in \mathbf{I}_0$; легко видеть, что $\Lambda[\hat{\mathbf{z}}]$ есть непустой компакт в $\mathbf{C}_n(\mathbf{I}_0)$ с метрикой равномерной сходимости. Элементы $\Lambda[\hat{\mathbf{z}}]$ называем движениями сопутствующими сигналу $\hat{\mathbf{z}}$. Введем теперь многозначную "псевдостратегию"α^0, ориентируясь на рецепты раздела 1 (см., в частности, (1.5)) по осуществлению встречи движений систем (1.1) и (1.2). Итак, полагаем здесь $\forall \hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{B}^0$:

$$\alpha^0(\hat{\mathbf{z}}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_0 \mid \forall \mathbf{z} \in \Lambda[\hat{\mathbf{z}}] \quad \exists t \in \mathbf{I}_0 : \quad \| \mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t) \| \leq \varepsilon\}. \tag{13.1}$$

Напомним, что (в разделе 1) $\varepsilon \in [0, \infty[$. Посредством (13.1) определена по сути дела целевая установка игрока-союзника. Отображение β, переводящее $\mathbf{B}^0$ в семейство $\mathcal{P}(\mathbf{Y}_0)$ всех подмножеств $\mathbf{Y}_0$ называем, как обычно, неупреждающим (в смысле, подобном (1.3)), если $\forall \hat{\mathbf{z}}_1 \in \mathbf{B}^0$ $\forall \hat{\mathbf{z}}_2 \in \mathbf{B}^0$ $\forall t \in \mathbf{I}_0$:

$$((\hat{\mathbf{z}}_1 \mid [t_0, t]) = (\hat{\mathbf{z}}_2 \mid [t_0, t])) \implies$$

$$\implies (\{(\mathbf{y} \mid [t_0, t]) :\ \mathbf{y} \in \beta(\hat{\mathbf{z}}_1)\} = \{(\mathbf{y} \mid [t_0, t]) :\ \mathbf{y} \in \beta(\hat{\mathbf{z}}_2)\}). \tag{13.2}$$

Нас будут интересовать неупреждающие в смысле (13.2) отображения β со свойством: $\beta(\hat{\mathbf{z}}) \subset \alpha^0(\hat{\mathbf{z}})$ при всех $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{B}^0$. Данная задача является версией рассмотренной ранее (см. раздел 2) абстрактной постановки (заметим, что приведенная в этом разделе конкретная задача может быть существенно обобщена без нарушения этого полезного свойства). Укажем конкретный вариант такого сведения, придерживаясь символики раздела 2 (см., например, (2.6)).

Итак, полагаем здесь, что: $X \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{I}_0$; $Y \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}^n$; $\Upsilon \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}^n$; $\mathcal{X}$ есть def семейство всех отрезков $[t_0, t]$, $t \in \mathbf{I}_0$; $\Omega \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{B}^0$; $Z \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{Y}_0$. Разумеется, посредством (13.1) определено целевое отображение $\alpha^0 \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$; оно, как легко проверить, компактнозначно в смысле топологии, порожденной метрикой равномерной сходимости. Можно его, разумеется, интерпретировать и как отображение с секвенциально компактными значениями; заметим, что α^0 в этом случае имеет секвенциально компактные значения и в смысле топологии поточечной сходимости пространства $\mathbf{Y}_0$, рассматриваемого как подпространство пространства всех отображений из X в Y. Кроме того, α^0 компактнозначно в смысле последнего топологического оснащения множества $\mathbf{Y}_0$. Мы получаем, стало быть, версию общей конструкции, "идеальную"с точки зрения сходимости вышеупомянутых итерационных процедур и следствий, получаемых с их помощью. В числе последних уместно отметить утверждение о том, что факт неразрешимости задачи о построении неупреждающего мультиселектора α^0, все значения которого — непустые множества, можно в данном случае проверять в пределах "клеток"разбиения $\Omega = \mathbf{B}^0$, связанного с обсуждаемым ранее базовым отношением эквивалентности, посредством конечных (локальных) итерационных процедур. В этой связи отметим, что семейство $\mathcal{X}$ есть в данном случае базис фильтра X.

В связи с исходной содержательной задачей управления в условиях неполной информации, для которой решение в классе многозначных квазистратегий, определяемых в терминах (13.2), имеет, по-видимому, оценочный характер (т.к. здесь рассматриваются идеализированные способы управления), отметим, что данная весьма актуальная тематика рассматривалась во многих работах. Отметим в этой связи только монографии [1,26,27]; в частности, см. соотношения двойственности задач управления и наблюдения [26, ч. III], конструкции позиционного управления [1], процедуры апостериорного наблюдения [27]. Распространение на этот круг задач формализации с использованием квазистратегий представляется естественным; оно аналогично подходу, ранее применяемому в задачах теории дифференциальных игр (см. [6–15] и др.).

14. Неупреждающие мультиселекторы в обобщенной динамической системе.

В настоящем заключительном разделе мы совсем кратко наметим одну из реализаций общей постановки задачи определения наследственных мультиселекторов. Речь идет о довольно распространенной ситуации, когда априори задано некоторое "объемлющее"наследственное МО, для селекторов которого определяется некоторая "целевая установка". Иными словами, для одних селекторов требуемая цель достигается, для других — нет. Таким образом, объективно реализуется "целевой"мультиселектор наследственного МО. Последнее соответствует по сути дела некоторой "системе"(примеры такого рода уже обсуждались). Поскольку относительно "системы"предполагалась истинной наследственность многозначных реакций (а упомянутая наследственность имеет, как правило, смысл физической осуществимости или неупреждаемости), мы по существу имеем в виде "объемлющего"МО обобщенную динамическую систему, на "траекториях"которой фиксируется достижение (либо недостижение) цели. Однако, после того как среди этих "траекторий"будут рассматриваться только такие, для которых цель достигается, свойство наследственности уже в очень простых примерах утрачивается (см.[3,гл.IV],[16]). Вместе с тем, "целевая установка"задачи в классе таких "траекторий"сохраняется в наиболее полном варианте: мы оставили все, что соответствует цели. В этих "новых"условиях мы имеем МО, учитывающее "целевую установку", но не обладающее, вообще говоря, наследственностью. Следовательно, возникает необходимость организации процедур, доставляющих наследственные МС (в частности, селекторы в обычном смысле, т.е. однозначные). Одна из таких процедур — метод итераций, рассматриваемый в настоящей работе. Уточним постановку данной задачи, принимая следующее соглашение. Если $\mathcal{U} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ и $\mathcal{V} \in \mathbb{M}(\Omega, Z))$, то через $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ обозначаем далее второе отображение в (3.8) при условии, что $\mathbf{A} \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U}; \mathcal{V}\}$; ясно, что $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ имеет значениями множества $\mathcal{U}(\omega) \cap \mathcal{V}(\omega),\ \omega \in \Omega$.

Фиксируем отображение $\mathcal{U}_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $(DOM)[\mathcal{U}_0] = \Omega$. Будем рассматривать $\mathcal{U}_0$ в качестве своеобразной "системы", реагирующей на неопределенную априори реализацию $\omega \in \Omega$. Пусть, кроме того, задано множество $V_0 \in \mathbb{Z}$, а $\mathcal{V}_0 \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ таково, что $\forall \omega \in \Omega :\ \ \mathcal{V}_0(\omega) \overset{\triangle}{=} V_0$. Иными словами, V_0 — "целевое"множество в пространстве "траекторий"из множества Z. Рассмотрим

$$\mathcal{C} \overset{\triangle}{=} \mathcal{U}_0 \wedge \mathcal{V}_0 \in \mathbb{M}(\Omega, Z) \tag{14.1}$$

в качестве априорного МО. Легко видеть, что $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{U}_0(\omega) \cap V_0$ при $\omega \in \Omega$. Заметим, что вариант (14.1) по существу уже обсуждался в предыдущем разделе. Как уже отмечалось, отображение (14.1) уже в простейших примерах может не обладать наследственностью (см.[16]). Можно, однако, заметить, что зачастую исполнение уже одной Г-итерации над МО (14.1) восстанавливает наследственность, доставляя тем самым наибольший наследственный МС отображения (14.1); см. в этой связи примеры в [16],[30]. Заметим, что в нашем случае $\mathcal{V}_0 \in \mathbb{N}:\ \mathcal{V}_0$ наследственно как всякое постоянное МО. Стало быть, в (14.1) мы имеем случай, подобный обсуждаемому в предложении 11.1 и его следствиях. К этому следует добавить (см. разделы 1,13), что условия компактнозначности $\mathcal{U}_0,\ \mathcal{V}_0$ во многих естественных вариантах общей постановки выполняются. Таким образом, в конструкциях раздела 11 существенны условия типа (11.2). Операция поточечно исполняемого пересечения МО, вообще говоря, разрушает свойство наследственности. Ситуация типа (14.1) возникает в типичных случаях задач теории дифференциальных игр (отметим, в частности, хорошо известный пример задачи "мальчик и крокодил"с фиксированным временем окончания). В связи с конструкциями типа (14.1) см. обсуждение в [30], включая рассмотрение примеров.

Заключение. В статье рассмотрена "прямая"версия процедуры, являющейся абстрактным аналогом МПИ [11-15],[22] (в ряду других исследований по МПИ отметим [31-33]; см. также более поздние исследования в [34] и в некоторых других работах). В отличие от этих работ здесь, как и в [16],[17],[29],[30], осуществляется по сути дела итерация самих управляющих процедур (по крайней мере, такой вывод справедлив в отношении традиционных задач конфликтного управления, где речь идет о переводе (разрешающих) псевдостратегий в квазистратегии). Такой взгляд доставляет новые возможности данного аналога МПИ, что проявляется, в частности, в осуществлении параллельной процедуры: исходный итерационный процесс может быть реализован здесь посредством склейки системы независимых "локальных"итерационных процессов. Упомянутое "распараллеливание"при весьма естественных и необременительных условиях приводит к использованию характерного фактор-пространства неопределенных воздействий (помех в задачах конфликтного управления).

Список литературы

[1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука,1974. – 456 с.

[2] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985. — 518 с.

[3] Субботин А.И.,Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления.— М.: Наука,1981.— 287 с.

[4] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.— М.: Наука,1977.— 624с.

[5] Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та,1975. — 229 с.

[6] Krasovskii N.N., Chentsov A.G. On the design of differential games,I // Probl. Control and Inform. Theory. — 1977. — V.6, N. 5-6. — p. 381-395.

[7] Krasovskii N.N., Chentsov A.G. On the design of differential games,II // Probl. Control and Inform. Theory. — 1979. — V.9, N 1. — p. 3-11.

[8] Roxin E. Axiomatic approach in differential games// J. Optimiz. Theory and Appl. — 1969. — V.3, N3. — p. 153-163.

[9] Varaiya P., Lin J. Existence of saddle points in differential games// SIAM J. Control. — 1969. — V.7, N1. — p.141-157.

[10] Elliott R.J., Kalton N.J. The existence of value in differential games //Memoirs of the Amer. Math. Soc. — 1972. — N126. — 67p.

[11] Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения // Доклады АН СССР. — 1976. — Т.226, N 1. — С.73–76.

[12] Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения с информационной памятью // Доклады АН СССР. — 1976. — Т.227, N 2. — С.306–308.

[13] Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Математический сборник. — 1976. — Т.99, N 3. — С.394–420.

[14] Ченцов А.Г. Об игровой задаче наведения к заданному моменту времени // Известия АН СССР, Серия математическая. — 1978. — Т.42, N 2. — С.455–467.

[15] Ченцов А.Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения // Рукопись деп. в ВИНИТИ. — 1979. — N1933 - 79 Деп. — 102 с.

[16] Ченцов А.Г. Итерационная реализация неупреждающих многозначных отображений // Доклады Академии Наук. — 1997. — Т.357, N 5. — С.595–598.

[17] Ченцов А.Г. К вопросу о параллельной версии абстрактного аналога метода программных итераций // Доклады Академии Наук. — 1998. —- Т.362 , N 5 — С.602–605.

[18] Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969. — 309с.

[19] Данфорд Н.,Шварц Дж.Т. Линейные операторы.Общая теория.— М.:Изд-во иностр.лит-ры, 1962.— 895 с.

[20] Chentsov A.G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. - New York, London, and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. — 244 p.

[21] Chentsov A.G. Asymptotic attainability. — Dordrecht - Boston - London: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 322 p.

[22] Ченцов А.Г. О структуре одной игровой задачи сближения. // Доклады АН СССР.— 1975. — Т.224, N6. — С. 1272-1275.

[23] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир,1970. — 416 с.

[24] Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981. — 433 с.

[25] Энгелькинг Р. Общая топология.— М.: Мир,1986.— 751с.

[26] Красовский Н.Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475с.

[27] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 392 с.

[28] Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1968. — 272 с.

[29] Ченцов А.Г. Метод программных итераций в классе конечно-аддитивных управлений-мер // Дифференциальные уравнения. — 1997. — N11. — С.1528-1536.

[30] Ченцов А.Г. Неупреждающие селекторы многозначных отображений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 1998. — N2 — С.126-189.

[31] Чистяков С.В. К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. — 1977. — Т.41. — N5. — С.825-832.

[32] Дятлов В.П., Ченцов А.Г. Монотонные итерации множеств и их приложения к игровым задачам управления // Кибернетика. — 1987. — N 2. — С.92-99.

[33] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Итерационная процедура для построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби // Доклады Академии Наук. — 1996. — Т.348, N6. — С.736-739.

[34] Saint-Pierre P. Approximation of the Viability Kernel // Appl. Math. Optim. — 1992. — 29. — P.187-209.