ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 1999
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

В.М.ЛАГОДИНСКИЙ

ЦНИИ “Электрон”
научный сотрудник

1. ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В предыдущих работах автора [1,2] приведены соображения в пользу того, что основными свойствами дифференциальных уравнений конечного порядка, важными для приложений, являются локальность и возможность постановки самосопряженных краевых задач. С этой точки зрения естественным обобщением множества обыкновенных линейных дифференциальных уравнений конечного порядка (с вещественной независимой переменной) является множество уравнений вида:

$$\big(f(D_N)u\big)(x) + U(x)u(x) = V(x), \qquad \forall x \in P \subseteq \mathbb{R}, \tag{1}$$

где P — связное подмножество, U, $V\colon P \to \mathbb{C}$ — известные функции (функцию $U(x)$ будем называть потенциальной функцией), D_N — обыкновенный линейный дифференциальный оператор конечного порядка N:

$$\big(D_N u\big)(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n(x) u^{(n)}(x), \qquad \forall x \in P$$

(производные классические, а не обобщенные!), $c_n\colon P \to \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \ldots, N$, $f(D_N)$ — обозначение голоморфной функции локального оператора D_N с символом $f(z)$ [2].

В качестве символов используется множество S функций комплексной переменной $f\colon G_f \to \mathbb{C}$, причем $G_f = G_f^0 \cup G_f^1$, где $G_f^0 \subseteq \mathbb{C}$ — область голоморфности функции $f(z)$, а $G_f^1 \subset \mathbb{C}$ — конечное множество тех точек ветвления функции $f(z)$, в которых она определена. Символ $f(z) \in S$ может иметь и конечное число таких точек ветвления, в которых он не определен, но не может иметь ни устранимых особых точек, ни полюсов, ни существенно особых точек на $\mathbb{C}$. Все точки ветвления (если они есть) — конечного порядка и соединены разрезами с бесконечно удаленной точкой, причем пересечение продолжений этих разрезов за точки ветвления не пусто и точка $z = 0$ принадлежит этому пересечению. Тогда значение $f(z)$ в любой точке $z \in G_f$ можно определить с помощью однозначной процедуры — аналитического продолжения функции $f(\alpha z)$ как функции переменной α по вещественной оси от $\alpha = 0$ до $\alpha = 1$:

$$f(z) = \mathrm{Anc}_\alpha f(\alpha z) = \mathrm{Anc}_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

где Anc_α обозначает вышеописанное аналитическое продолжение, в работе [2] названное α-продолжением.

Очевидно, если символ $f(z)$ — полином, уравнение (1) — обыкновенное линейное дифференциальное уравнение конечного порядка. Наоборот, любое обыкновенное линейное дифференциальное уравнение конечного порядка может быть представлено в виде (1). Но если $f(z)$ — не полином, то оператор $f(D_N)$ определяется с помощью аналитического продолжения степенного ряда с членами, содержащими операторы дифференцирования сколь угодно высокого порядка, и уравнение (1) можно считать обыкновенным линейным дифференциальным уравнением бесконечного порядка.

Уравнения, имеющие формальный вид (1), рассматривались многими авторами, однако операторы $f(D_N)$ в них определялись либо как псевдодифференциальные [3–5] и, следовательно, нелокальные, либо только с помощью рядов по степеням оператора D_N [6–9] (без использования α-продолжения), что приводит в случае нецелых символов $f(z)$ к невозможности постановки краевых задач с такими наборами собственных функций, которые могли бы быть базисами какого-либо гильбертова пространства.

В работе [2] рассмотрены некоторые простейшие уравнения вида (1). В настоящей работе строится теория уравнений вида (1) для случая, когда и функция $U(x)$, и коэффициенты оператора D_N — постоянные.

Пользуясь определением голоморфной функции локального оператора в работе [2], любому символу $f \in S$, можно сопоставить локальный оператор $f(D_N)$, определенный на таких комплекснозначных функциях вещественной переменной, для каждой из которых существует непустое подмножество вещественной оси $\mathbb{R}$, на котором она $f(D_N)$-отображаема (см. [2]). По аналогии с обыкновенными дифференциальными операторами конечного порядка можно определить левый и правый операторы $f(D_N)$, области определения которых состоят из функций, $f(D_N)$-отображаемых, соответственно, слева и справа на непустом подмножестве $\mathbb{R}$.

Определение 1. *Комплекснозначная функция вещественной переменной называется $f(D_N)$-отображаемой на связном множестве $P \subseteq \mathbb{R}$, если, во-первых, она определена на P, во-вторых, $f(D_N)$-отображаема во всех внутренних точках P, и, в третьих, $f(D_N)$-отображаема слева (справа) в правой (левой) краевой точке множества P, принадлежащей этому множеству.*

Определение 2. *Решением уравнения* (1) *называется функция $u(x)$, $f(D_N)$-отображаемая на P, при подстановке которой в уравнение* (1) *оно превращается в верное тождество.*

Поскольку в этой работе коэффициенты оператора D_N считаются постоянными, бех ограничения общности можно положить $D_N = d/dx = \partial_x$.

Как показано в работе [2], если A — локальный оператор, функция $u(x)$ $f(A)$-отображаема на связном множестве P, а символ g определен на множестве $G_g \supseteq G_f$ и голоморфен на множестве $G_g^0 \supseteq G_f^0$, то $u(x)$ и $g(A)$-отображаема на P. Обозначим через $F(G, G^0, P)$ множество функций, $f(\partial_x)$-отображаемых на P, если символ $f(z) \in S$ определен на G и голоморфен на G_0.

В случае, когда символ $f(z)$ — неполиномиальная функция, $F(G, G^0, P)$ можно снабдить топологией и метрикой счетно нормированного пространства [2]:

$$\|u\|_n = \max_{k \le n} \sup_{x \in P} |u^{(n)}(x)|,$$

$$\rho(u_1 - u_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u_1 - u_2\|_n}{2^n(1 + \|u_1 - u_2\|_n)}.$$

Обозначим через $\Phi(G, G^0)$ множество символов, определенных на G и голоморфных на G^0, а через $A(\Phi)$ — множество голоморфных функций оператора ∂_x с этими символами. Очевидно, $\Phi(G, G^0)$ является коммутативной линейной алгеброй (самое важное здесь, что кольцом) с единицей. Для оператора ∂_x справедливы все утверждения, доказанные в работе [2] для любых локальных операторов, следовательно $F(G, G^0, P)$ инвариантно относительно действия любого оператора из $A(\Phi)$, если $f(\partial_x), g(\partial_x) \in A(\Phi)$, $h_1(\partial_x) = f(\partial_x) + g(\partial_x)$, $h_2(\partial_x) = f(\partial_x)g(\partial_x)$, то $h_1(\partial_x), h_2(\partial_x) \in A(\Phi)$, символы $h_1, h_2 \in \Phi(G, G^0)$, причем $h_1 = f + g$, $h_2 = fg$. Таким образом, $A(\Phi)$ также является коммутативной линейной алгеброй с единицей, причем алгебры $A(\Phi)$ и $\Phi(G, G^0)$ изоморфны друг другу, то есть преобразование $J\colon \Phi(G, G^0) \to A(\Phi)$, которое сопоставляет символу $f(z) \in \Phi(G, G^0)$ оператор $f(\partial_x) \in A(\Phi)$ с этим символом, является изоморфизмом коммутативных линейных алгебр с единицей (в алгебре $\Phi(G, G^0)$ единица — функция, тождественно равная единице, а в алгебре $A(\Phi)$ — единичный оператор).

В этом состоит существенное отличие неполиномиальных голоморфных функций от полиномиальных — полиномы степени меньшей N ($N < \infty$) не образуют линейной алгебры. Другое отличие — любой полином степени выше нулевой имеет нули, причем сумма их кратностей равна степени полинома. В соответствии с этим ни один локальный обыкновенный линейный дифференциальный оператор конечного порядка не имеет обратного оператора — любое обыкновенное линейное дифференциальное уравнение конечного порядка имеет нетривиальные решения. В то же время неполиномиальная голоморфная функция может иметь нули, но может и не иметь их, а если они есть, то их число может быть бесконечным (хотя обязательно счетным), но может быть и конечным. Парадоксальным образом эти *отличия* обеспечивают *сходство* между теорией тех уравнений, которым посвящена эта работа, и теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений конечного порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть функция $f(z) \in \Phi(G, G^0)$, $G^1 = G \backslash G^0$ — множество тех точек ветвления функции $f(z)$, в которых она определена, а O — множество ее нулей. Тогда $O = O^0 \cup O^1$, где $O^0 \subset G^0$, а $O^1 \subset G^1$. Если $z_1 \in G^1$ — точка ветвления конечного порядка n_1, то, как известно [10], в некоторой окрестности z_1 функция $f(z)$ может быть представлена в виде абсолютно сходящегося “обобщенного ряда Тейлора”:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_1)^{j/n_1}, \tag{2}$$

где $(z-z_1)^{j/n_1}$ обозначает голоморфную ветвь, выделенную разрезом, проведенным из точки z_1 по лучу, продолжение которого проходит через $z=0$.

Если при этом $z_1 \in O^1$, то существует такое значение $j = J_1 > 0$, что $c_j = 0$, $\forall j < J_1$, и $c_{J_1} \neq 0$. Тогда при $z \neq z_1$ (2) можно переписать в виде:

$$f(z) = (z-z_1)^{K_1}(z-z_1)^{-q_1/n_1}\sum_{j=J_1}^{\infty} c_j(z-z_1)^{(j-J_1/n_1} = (z-z_1)^{K_1} f_1(z), \qquad (3)$$

где $K_1 = [J_1/n_1] + 1$ (если $\beta \in \mathbb{R}$, то $[\beta]$ означает целую часть β), $q_1 = n_1 K_1 - J_1$, $f_1(z) \in \Phi(G, G^0)$, при $z = z_1$ в нуль не обращается, а в упомянутой окрестности за исключением точки $z = z_1$ может быть представлена в виде:

$$f_1(z) = (z-z_1)^{-q_1/n_1}\sum_{j=J_1}^{\infty} c_j(z-z_1)^{(j-J_1)/n_1}.$$

Представление же (3) справедливо всюду в G^0. Если $f_1(z)$ имеет нули из G^1 (они же являются нулями функции $f(z)$), то факторизацию можно продолжить аналогично. В результате получим, что если $f(z)$ имеет на G^1 ровно N_1 нулей: $O^1 = \{z_i\}_{i=1}^{N_1}$, то на $G \backslash O^1$ она может быть представлена в виде:

$$f(z) = f_{N_1}(z)\prod_{i=1}^{N_1}(z-z_i)^{K_i}, \qquad \forall z \in G^0, \qquad (4)$$

где $f_{N_1}(z) \in \Phi(G, G^0)$ и при $z \in G^1$ в нуль не обращается.

Если функция f_{N_1} имеет нули в G^0: $O^0 = \{z_i^0\}_{i=1}^{N_0}$, то и ее можно факторизовать:

$$f_{N_1}(z) = f_0(z)\prod_{i=1}^{N_0}(z-z_i^0)^{P_i}, \qquad \forall z \in G \backslash O^1, \qquad (5)$$

где P_i — кратность i-го нуля, а $f_0(z) \in \Phi(G, G^0)$ и не обращается в нуль нигде. Подставив (5) в (4) и учитывая, что $f(z) = 0$, $\forall z \in O^1$, окончательно получим:

$$f(z) = f_0(z)\prod_{i=1}^{N}(z-z_i)^{Q_i}. \qquad \forall z \in G, \qquad (6)$$

где $N = N_0 + N_1$, $Q_i = K_i$, $i = 1, 2, \ldots, N_0$; $Q_i = P_{i-N_0}$, $i = N_0+1, N_0+2, \ldots, N$.

В дальнейшем понадобится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Эффективной кратностью нуля* z_i *функции* $f(z) \in \Phi(G, G^0)$ *назовем показатель* Q_i *в сомножителе* $(z - z_i)^{Q_i}$ *из формулы* (6).

Итак, любой символ из $\Phi(G, G^0)$, имеющий нули, можно представить в виде произведения (7). Но поскольку кольца $A(\Phi)$ и $\Phi(G, G^0)$ изоморфны друг другу, для любого оператора из $A(\Phi)$ с таким символом справедливо аналогичное представление:

$$f(\partial_x) = f_0(\partial_x) \prod_{i=1}^{N} (\partial_x - z_i)^{Q_i}, \tag{7}$$

где оператор $f_0(\partial_x) \in A(\Phi)$ имеет символ, нигде не обращающийся в нуль. Таким образом, доказана

ЛЕММА 1. *Если символ* $f(z) \in \Phi(G, G^0)$ *имеет нули, то оператор* $f(\partial_x)$ *может быть представлен в виде* (7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Если символ* $f(z)$ *не имеет нулей, то остатком оператора* $f(\partial_x)$, *назовем сам этот оператор, а если* $f(z)$ *имеет нули, то остатком оператора* $f(\partial_x)$ *назовем оператор* $f_0(\partial_x)$ *в формуле (7).*

Остаток любого оператора $f(\partial_x) \in A(\Phi)$ обладает весьма важным свойством:

ЛЕММА 2. *Остаток любого оператора* $f(\partial_x) \in A(\Phi)$ *имеет обратный оператор* $g(\partial_x) = [f_0(\partial_x)]^{-1} \in A(\Phi)$ *с символом* $g(z) = [f_0(z)]^{-1}$, *не имеющем нулей на* $\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость леммы следует из изоморфизма колец с единицей $\Phi(G, G^0)$ и $A(\Phi)$. Лемма доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть $f(z) = \exp(az)$, где $a \in \mathbb{R}$. Это целая функция, не имеющая нулей, поэтому $f_0(\partial_x) = f(\partial_x)$. Если $u(x)$ на связном множестве $P \subseteq \mathbb{R}$ имеет абсолютно сходящийся ряд Тейлора с центром в любой точке $x \in P$, то

$$\big(f(\partial_x)u\big)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} u^{(n)}(x), \qquad \forall x \in P. \tag{8}$$

Если, сверх того, ряд Тейлора функции $u(x)$ сходится к ней самой, то для точек x таких, что $x + a \in P$, это эквивалентно равенству:

$$\big(f(\partial_x)u\big)(x) = u(x + a).$$

По лемме 2, оператор $f(\partial_x)$ имеет обратный с символом $g(z) = \exp(-az)$. Действительно, подействовав на (8) оператором $g(\partial_x) = \exp(-a\partial_x)$, получим:

$$\Big(g(\partial_x)\big(f(\partial_x)u\big)\Big)(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-a)^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}u^{(n+m)}(x)=u(x),\qquad \forall x\in P,$$

то есть оператор $g(\partial_x)f(\partial_x)$ — единичный. Если $u(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ равна сумме своего абсолютно сходящегося ряда Тейлора с центром в любой точке $x\in\mathbb{R}$, то операторы $\exp(a\partial_x)$ и $\exp(-a\partial_x)$ действуют на нее как операторы сдвига (первый на a, а второй на $-a$), но это локальные операторы — нелокальны сами такие функции $u(x)$, поскольку их значения и значения всех их производных в различных точках однозначно связаны.

2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ И ЗАДАЧА КОШИ

Рассмотрим однородное уравнение с нулевой потенциальной функцией:

$$\big(f(\partial_x)u\big)(x)=0,\qquad \forall x\in P\subseteq\mathbb{R},\tag{9}$$

где $f(\partial_x)\in A(\Phi)$, символ $f(z)\in\Phi(G,G^0)$, а P — связное подмножество.

Теорема 1. *Если символ $f(z)$ не имеет нулей, то уравнение (9) не имеет нетривиальных решений, в противоположном случае множество решений уравнения (9) совпадает с множеством решений обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения конечного порядка, равного сумме эффективных кратностей нулей символа $f(z)$:*

$$\prod_{i=1}^{N}(\partial_x-z_i)^{Q_i}u(x)=0,\qquad \forall x\in P,\tag{10}$$

где $\{z_i\}_{i=1}^{N}$ — множество нулей символа $f(z)$, Q_i — эффективная кратность нуля z_i.

Доказательство. Пусть символ $f(z)$ не имеет нулей, тогда оператор $f(\partial_x)$ совпадает со своим остатком и, по лемме 2, имеет обратный. Если $u(x)$ — решение уравнения (9), то (9) — верное тождество. Подействовав на него оператором $[f(\partial_x)]^{-1}$, получим $u(x)\equiv 0$. Пусть теперь $f(z)$ имеет нули. Если функция $u(x)$ является решением уравнения (9), то (9) — верное тождество. По лемме 1 оператор $f(\partial_x)$ может быть представлен в виде (7). По лемме 2 оператор $f_0(\partial_x)$ имеет обратный. Поэтому, подействовав на (10) оператором $[f_0(\partial_x)]^{-1}$, получим, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению (10). Наоборот, пусть $u(x)$ — решение уравнения (10), тогда (10) — верное тождество. Подействовав на него оператором $[f_0(\partial_x)$ и воспользовавшись формулой (7), получим, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению (9). Теорема доказана.

Определение 7. *Если множество нулей символа $f(z)$ не пусто, уравнением конечного порядка, соответствующим уравнению* (9), *называется уравнение* (10).

Очевидно, если $f(z)$ не имеет нулей, не существует уравнения конечного порядка, соответствующего уравнению (9) в смысле определения 7.

Определение 8. *Эффективным порядком уравнения* (9) *называется сумма эффективных кратностей всех его нулей.*

Очевидно, если $f(z)$ не имеет нулей, эффективный порядок уравнения (9) равен нулю.

Легко видеть, что уравнение $f(z) = 0$ играет здесь роль характеристического уравнения. В теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений конечного порядка в левой части характеристического уравнения находится полином, и в этом случае оно, по основной теореме алгебры, обязательно имеет хотя бы один корень. В теории же рассматриваемых здесь уравнений в левой части характеристического уравнения — не обязательно полином, и оно может не иметь корней. Кроме того, если $f(z)$ — полином, то сумма кратностей нулей функции $f(z)+C$ $(C \in \mathbb{C})$ не зависит от C, а если $f(z)$ — неполиномиальная функция, то сумма эффективных кратностей нулей может зависеть от C.

Так же, как в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений конечного порядка, можно определить пространство решений уравнений вида (9) (если эффективный порядок равен нулю, то оно нуль-мерно), а в случае, когда эффективный порядок отличен от нуля — фундаментальную систему решений и общее решение. Таким образом, теорема 1 имеет

Следствие. *Если множество нулей символа $f(z)$ не пусто, то общим решением уравнения* (9) *является общее решение соответствующего ему уравнения конечного порядка, в противоположном случае уравнение* (9) *не имеет общего решения.*

Итак, задача о нахождении решений уравнения (9) сводится к простой задаче о нахождении решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения конечного порядка. Интересно то, что число линейно независимых решений уравнения (9) оказывается конечным, в противоречии (казалось бы) с известной теоремой. На самом деле противоречия здесь нет, поскольку эта теорема справедлива лишь для уравнений, разрешимых относительно старшей производной, а в уравнении (9) старшей производной просто нет. Конечно, можно было бы считать порядок уравнения (9) конечным, а именно равным порядку уравнения (10). Однако уравнение (9) здесь рассматривается лишь как простейшая разновидность уравнений вида (1), и в дальнейшем специфика уравнений бесконечного порядка проявится, хотя и будет выявляться их глубокая аналогия с уравнениями конечного порядка. Кроме того, если считать, что уравнение (9) имеет конечный порядок, то оказывается, что этот порядок может измениться от замены в (9) $f(\partial_x)$ на $f(\partial_x) + C$, где $C \in \mathbb{C}$.

Пример 2. Пусть $f(z) = \sqrt{1 - z^2} - \lambda$, в окрестности нуля $f(z)$ голоморфна, $f(0) = 1 - \lambda$ (выбираем "положительную" ветвь квадратного корня), точки ветвления $z = \pm 1$, разрезы — два участка вещественной оси $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда уравнение (9) имеет вид:

$$\left(\sqrt{1 - \partial_x^2} - \lambda\right) u(x) = 0, \qquad \forall x \in P. \tag{11}$$

Пусть сначала $\lambda \in (-\infty, 0)$. Тогда, как легко видеть, символ $f(z)$ не имеет нулей, поэтому единственное решение уравнения (11) — тривиальное: $u(x) \equiv 0$, $\forall x \in P$. Эффективный порядок уравнения (11) в этом случае равен нулю. Пусть теперь $\lambda \notin (-\infty, 0)$, для простоты возьмем $\lambda \in [0, \infty)$. Тогда $f(z)$ имеет нули $z_\pm = \pm|\sqrt{1 - \lambda^2}|$. Уравнение (11) можно переписать в виде:

$$(\partial_x^2 - \varkappa)(\sqrt{1 - \partial_x^2} + \lambda)^{-1} u(x) = 0, \qquad \forall x \in P,$$

где $\varkappa = 1 - \lambda^2$.

Поскольку символ оператора $(\sqrt{1 - z^2} + \lambda)^{-1}$ в нуль не обращается, уравнение конечного порядка, соответствующее уравнению (11), имеет вид:

$$(\partial_x^2 - \varkappa) u(x) = 0, \qquad \forall x \in P. \tag{12}$$

Теперь общее решение уравнения (11) можно найти элементарно — им, по следствию из теоремы 1, является общее решение уравнения (12):

$$u(x) = A \exp(\sqrt{\varkappa} x) + B \exp(-\sqrt{\varkappa} x), \qquad \forall x \in P, \qquad A,\, B \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Заметим, что возможность столь простого решения уравнения (11) и его универсальность (для любых связных $P \subseteq \mathbb{R}$ и любых $\lambda \notin (-\infty, 0)$) —

следствие принятого здесь определения операторов $f(\partial_x)$. Обычно [4,5] оператор $\sqrt{1-\partial_x^2}$ определяют как псевдодифференциальный в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Но тогда, прежде всего, необходимо, чтобы $P = \mathbb{R}$. Однако не существует функции вида (13) с $|A|^2 + |B|^2 > 0$, принадлежащей $L^2(\mathbb{R})$. Для того, чтобы решения были, вводят оснащенное гильбертово пространство [11]. Если же использовать определение с помощью ряда по степеням оператора ∂_x [6] без α-продолжения, то решение (13) можно найти при любых связных P, но только для $\lambda < 1$.

Необходимо обратить внимание на то, что уравнение (12) *имеет общее решение* (13) *и в том случае, когда* $\lambda \in (-\infty, 0)$, *но из этого не следует, что и уравнение* (11) *имеет тогда это общее решение. В этом случае символ оператора в левой части уравнения* (11) *не имеет нулей, и уравнение* (12) *не является уравнением конечного порядка, соответствующим уравнению* (11). *Последнее в этом случае имеет только тривиальное решение и, следовательно, общего решения не имеет.*

Уравнение (12) известно в релятивистской квантовой теории [12] как стационарное одномерное уравнение Клейна-Гордона (для свободной частицы единичной массы), где λ — энергия частицы. Существование нетривиальных решений при отрицательных значениях энергии свободной частицы — хорошо известная трудность этой теории. Если же в ее основу положить уравнение (11), которое соответствует релятивистской зависимости энергии ε от импульса p

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 + p^2},$$

то эта трудность не возникнет, поскольку при отрицательных значениях энергии λ переход от уравнения (11) к уравнению (12) запрещен. Уравнение (11) естественно называть стационарным однородным релятивистским уравнением Шредингера (для свободной частицы единичной массы).

Рассмотрим теперь вопрос о том, как может быть задана для уравнения (9) задача Коши. Прежде всего очевидно, что если символ $f(z)$ не имеет нулей, то имеет решение только одна задача Коши, именно та, которая определяется начальным условием $u(a) = 0$ при любом $a \in P$. Ее решение единственно: $u(x) \equiv 0$. Далее, если множество нулей символа $f(z)$ не пусто, то задача Коши для уравнения (9) может быть задана совершенно так же, как для соответствующего уравнения конечного порядка. И в этом случае единственность решения задачи Коши, как известно, гарантирована. Но используя голоморфные функции оператора дифференцирования можно поставить и другие начальные условия.

Пусть уравнение (9) обладает фундаментальной совокупностью решений $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N}$ и, следовательно, общее решение

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(x), \qquad \forall x \in P. \tag{14}$$

Очевидно, для однозначного определения всех произвольных постоянных необходимо задать N начальных условий. Выберем N голоморфных функций оператора дифференцирования: $h_m(\partial_x)$, $m = 1, 2, \ldots, N$ и зададим результат действия каждой из них на функцию (14) в точке $x_0 \in P$:

$$\big(h_m(\partial_x)u\big)(x_0) = \sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_{mn}(x_0) = \gamma_m, \qquad m = 1, 2, \ldots, N, \tag{15}$$

где $\varphi_{mn}(x_0) = \big(h_m(\partial_x)\varphi_n\big)(x_0)$, $m, n = 1, \ 2, \ \ldots, N$. Матрица $\Phi_h(x_0)$ с элементами $\varphi_{mn}(x_0)$ играет роль фундаментальной матрицы уравнения (9) (по отношению к набору $\{h_m(\partial_x)\}$), а ее определитель — роль вронскиана (по отношению к тому же набору): $W_h(x_0) = \det \Phi_h(x_0)$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Если эффективный порядок N уравнения* (9) *больше нуля, то для того, чтобы задача Коши* (9), (15) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $W_h(x_0) \neq 0$.*

Для уравнения (9) все такие задачи Коши равноправны, в частности, любую из них можно использовать для продолжения решения, если оно задано лишь на части P.

Рассмотрим неоднородное уравнение:

$$\big(f(\partial_x)u\big)(x) = V(x), \qquad \forall x \in P \subseteq \mathbb{R}. \tag{16}$$

Теорема 3. *Для того, чтобы уравнение* (16) *имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы функция $V(x)$ была $f(\partial_x)$-отображаемой на P.*

Доказательство. По определению 1 решение $u(x)$ $f(\partial_x)$-отображаемо на P; в работе [2] показано, что множество функций, $f(A)$-отображаемых на P, инвариантно относительно действия оператора $f(A)$. Поэтому, если $u(x)$ — решение уравнения (16), то $V(x)$ $f(\partial_x)$-отображаема на P. Теорема доказана.

Легко решить уравнение (16), если символ $f(z)$ не имеет нулей.

Теорема 4. *Если символ $f(z)$ не имеет нулей, а функция $V(x)$ $f(\partial_x)$-отображаема на P, то уравнение* (16) *имеет единственное решение:*

$$u(x) = \big(g(\partial_x)V\big)(x), \qquad \forall x \in P, \tag{17}$$

где $g(\partial_x) = [f(\partial_x)]^{-1}$.

Доказательство. Если символ $f(z)$ не имеет нулей, то оператор $f(\partial_x)$ имеет обратный $g(\partial_x) = [f(\partial_x)]^{-1}$, определенный на любой $f(\partial_x)$-отображаемой на P функции, значит, и на $V(x)$. Подействовав им на обе части уравнения (16), получим (17). Теорема доказана.

Если же символ $f(z)$ имеет нули, решение уравнения (16) сводится к решению обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения конечного порядка точно так же, как в случае однородного уравнения (теорема 1). Следовательно, справедлива

Теорема 5. *Если символ $f(z)$ имеет нули, то множество решений уравнения* (16) *совпадает с множеством решений обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения конечного порядка, равного сумме эффективных кратностей нулей символа $f(z)$:*

$$\prod_{i=1}^{N}(\partial_x - z_i)^{p_i}u(x) = W(x), \qquad \forall x \in P, \tag{18}$$

где $\{z_i\}_{i=1}^{N}$ — множество нулей символа $f(z)$, p_i — эффективная кратность нуля z_i, $W(x) = [f_0(\partial_x)]^{-1}$, $f_0(\partial - x)$ — остаток оператора $f(\partial_x)$.

С помощью теорем 4 и 5 легко доказывается

Теорема 6. *Пусть функция $V(x)$ $f(\partial_x)$-отображаема на P. Тогда, если символ $f(z)$ не имеет нулей, уравнение* (16) *имеет единственное частное решение и не имеет общего решения, в противоположном случае оно имеет общее решение, которое равно сумме общего решения однородного уравнения* (9) *и любого частного решения уравнения* (16).

Из теоремы 5 следует также, что для построения частного решения уравнения (16) применим метод вариации произвольной постоянной. В случае, когда в правой части — сумма квазиполиномов:

$$V(x) = \sum_{m=1}^{M}\exp(\varkappa_m x)\sum_{n=0}^{N_m}C_{mn}x^n, \qquad \{\varkappa_m\}, \{C_{mn}\} \subset \mathbb{C}, \forall x \in P,$$

применим и метод неопределенных коэффициентов, поскольку он применим для уравнений конечного порядка и справедлива

Лемма 3. *Если символ $f(z) \in \Phi(G, G^0)$, то подмножество квазиполиномов степени k множества $F(G, G^0, P)$ инвариантно относительно действия любого оператора из $A(\Phi)$.*

Доказательство. Если символ $f(z) \in \Phi(G, G^0)$, $\exp(\varkappa x) \in F(G, G^0, P)$ и $g(\partial_x) \in A(\Phi)$, то функция $u(x) = x^k \exp(\varkappa x)$ $g(\partial_x)$-отображаема на P и

$$\big(g(\partial_x)u\big)(x) = g(\partial_x)\partial_\varkappa^k \exp(\varkappa x) = \partial_\varkappa^k[g(\varkappa)\exp(\varkappa x)].$$

Таким образом, результат действия оператора $g(\partial_x)$ на $u(x)$ есть квазиполином степени k. Ввиду линейности этого оператора и линейной замкнутости подмножества квазиполиномов степени k отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Теорема 7. *Если в уравнении* (16) $V(x) = x^k \exp(\varkappa x)$, *то одним из частных решений уравнения* (16) *является функция* $u(x) = P_N(x)\exp(\varkappa x)$, *где* $P_N(x)$ *— полином N-ой степени,* $N = k + Q_\varkappa$, $Q_\varkappa$ *— эффективная кратность нуля* $z = \varkappa$ *функции* $f(z)$.

Доказательство. Подействовав на обе части уравнения (16) оператором $g(\partial_x)$, обратным остатку оператора $f(\partial_x)$, получим неоднородное уравнение конечного порядка с квазиполиномом k-ой степени в правой части (по лемме 3). Утверждение леммы теперь следует из теории дифференциальных уравнений конечного порядка. Лемма доказана.

Таким образом, и в случае бесконечного порядка совпадение $\varkappa$ с одним из нулей символа приводит к резонансу.

Пример 3. Пусть $f(\partial_x)$ — тот же оператор, что и в примере 2. Рассмотрим уравнение:

$$\left(\sqrt{1-\partial_x^2} - \lambda\right) u(x) = x\exp(\varkappa x), \qquad \forall x \in P, \tag{19}$$

где $P \subseteq \mathbb{R}$ — связное подмножество, $\varkappa \in \mathbb{C}$.

Если $\lambda \in (-\infty, 0)$, то оператор в левой части нулей не имеет, поэтому тогда при любом $\varkappa \in \mathbb{C}$ уравнение (19) имеет единственное решение

$$u(x) = \frac{x[1-\varkappa^2 - \lambda\sqrt{1-\varkappa^2}] - \varkappa}{\sqrt{1-\varkappa^2}(\sqrt{1-\varkappa^2}-\lambda)^2}\exp(\varkappa x), \qquad \forall x \in P.$$

Если же $\lambda \in (-\infty, 0)$, то оператор в левой части имеет нули $k_{1,2} = \pm k = \pm\sqrt{1-\lambda^2}$. Тогда если $\varkappa \neq \pm k$, то общее решение уравнения (19) имеет вид:

$$u(x) = A\exp(kx) + B\exp(-kx) + \frac{x(\sqrt{1-\varkappa^2}-\lambda)+\varkappa}{(\sqrt{1-\varkappa^2}-\lambda)^2}\exp(\varkappa x), \qquad \forall x \in P,$$

а если $\varkappa = \pm k$, то

$$u(x) = A\exp(kx) + B\exp(-kx) - x\frac{x\varkappa(1-\varkappa^2)-2}{2\varkappa^2\sqrt{1-\varkappa^2}}\exp(\varkappa x), \qquad \forall x \in P.$$

3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Очевидно, любая краевая задача для уравнения (9) имеет только тривиальные решения в том случае, если символ $f(z)$ не имеет нулей. Если же эти нули есть, то можно написать соответствующее уравнение конечного порядка и поставить для него те же краевые условия. Если эти условия содержат только значения производных решения конечного порядка, то полученная краевая задача решается известными методами, а ее решение и есть решение исходной задачи. Интересно, однако, рассмотреть задачи, аналогичные тем, которые возникают в результате разделения переменных в краевых задачах для дифференциальных уравнений в частных производных; при этом получаются обыкновенные дифференциальные уравнения со спектральным параметром и требуется определить, при каких его значениях краевая задача имеет нетривиальные решения. Теорию таких задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с самосопряженным дифференциальным выражением в левой части часто называют теорией Штурма-Лиувилля [13]. Стремясь к аналогии с этой теорией, будем считать, что в (1) $U(x) \equiv -\lambda$, $V(x) \equiv 0$:

$$\big(f(\partial_x)u\big)(x) - \lambda u(x) = 0, \qquad \forall x \in P \subseteq \mathbb{R}, \tag{20}$$

$f(\partial_x)$ — оператор с симметричным символом $f(z) = f(-z)$, определенным всюду вне вещественной оси и на некотором ее связном подмножестве, причем символ $f(z) - \lambda$ при любом $\lambda \neq f(0)$ из области значений функции $f(z)$ имеет точно два нуля $z = \pm z_0(\lambda)$, равных по модулю и различающихся знаком, эффективная кратность каждого из которых равна единице, а при $\lambda = f(0)$ — один корень $z = 0$ с эффективной кратностью, равной двум, то есть при всех z_1, z_2 из области определения G функции $f(z)$ возможно представление:

$$f(z_1) - f(z_2) = [z_1^2 - z_2^2]g(z_1, z_2), \qquad \forall z_1, z_2 \in G, \tag{21}$$

где $g(z_1, z_2)$ ограничена при $z_1 - z_2 \to 0$. Кроме того, будем полагать, что все производные символа $f(z)$ в нуле вещественны. Обозначим множество таких символов через T. Легко видеть, что все $f(z) \in T$ принимают вещественные значения при всех вещественных и чисто мнимых $z \in G$. Очевидно, при всех λ из области значений функции $f(z)$ уравнению (20) соответствует уравнение второго порядка:

$$u''(x) - \varkappa u(x) = 0, \qquad \forall x \in P, \tag{22}$$

где $\varkappa$ — квадрат корня уравнения $f(z) = \lambda$. Таким образом, спектральные параметры у уравнений (20) и (22) — разные. Из теоремы 1 следует, что справедлива

Теорема 8. *Краевая задача, определяемая уравнением* (20) *и некоторыми краевыми условиями, имеет нетривиальные решения в том и только том случае, если, во-первых, уравнение* $f(z) - \lambda = 0$ *имеет корни, во-вторых, краевая задача, определяемая уравнением* (22) *с* $\varkappa = z_0^2(\lambda)$ *и теми же краевыми условиями, имеет нетривиальные решения, причем при выполнении этих условий решения этих задач совпадают.*

Следствие. *Если краевая задача, определяемая уравнением* (22) *и некоторыми краевыми условиями, является самосопряженной, и квадратный корень из любого ее спектрального значения принадлежит области определения символа* $f(z)$, *то краевой задаче, определяемой уравнением* (20) *и теми же краевыми условиями, можно сопоставить самосопряженный оператор* B, *являющийся функцией в смысле И. фон Неймана [14] самосопряженного оператора* A, *соответствующего предыдущей краевой задаче:* $B = f(\sqrt{A})$.

Доказательство. Если краевая задача, определяемая уравнением (22) и данными краевыми условиями, самосопряженная, то она имеет нетривиальные решения для некоторого множества $\sigma = \{\varkappa\} \subset \mathbb{R}$, которые, по теореме 8, являются и решениями краевой задачи, определяемой уравнением (20) и теми же краевыми условиями для соответствующего множества $\sigma' = \{\lambda = f(\sqrt{\varkappa})\}$, причем любое нетривиальное решение задачи для уравнения (22) с $\varkappa_0 \in \sigma$ (уравнения (21) с $\lambda_0 = f(\sqrt{\varkappa_0}) \in \sigma'$) ортогонально любому нетривиальному решению для любого $\varkappa \in \{\varkappa \in \sigma : \varkappa < \varkappa_0\}$ ($\lambda = f(\sqrt{\varkappa}) \in \{\lambda \in \sigma' : \lambda < \lambda_0\}$. Поэтому существует семейство проекционных операторов $E_\varkappa$, называемое разложением единицы, с помощью которого этим краевым задачам сопоставляются самосопряженные операторы:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \varkappa \, dE_\varkappa, \qquad B = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{\varkappa})\, dE_\varkappa,$$

что соответствует определению И. фон Неймана функции самосопряженного оператора $B = f(\sqrt{A})$ [14]. Следствие доказано.

Итак, мы пришли к функциям самосопряженных операторов в смысле И. фон Неймана. Закономерен вопрос: зачем же нужно было вводить понятие голоморфной функции локального оператора дифференцирования? Ответ на этот вопрос даст

Пример 4. Рассмотрим снова уравнение (11) и соответствующее ему уравнение конечного порядка (12) с $\varkappa = 1 - \lambda^2$. Пусть в нем $P = [0, \pi]$. Поставим к нему следующие краевые условия:

$$u(0) = u(\pi) = 0. \tag{23}$$

В квантовой механике с этими условиями ставится задача о частице в прямоугольной потенциальной яме бесконечной глубины.

При $\lambda > 0$ краевая задача (11), (23) имеет тот же набор собственных функций, что и краевая задача (12), (23):

$$\varphi_n(x) = \sin nx, \qquad \forall x \in [0, \pi], \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{24}$$

Соответствующий набор собственных значений задачи (11), (23):

$$\lambda_n = \sqrt{1 + n^2}, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Заметим, что задача (12), (23) имеет нетривиальные решения и при $\lambda_n = -\sqrt{1 + n^2}$, $n = 1, 2, \dots$, набор ее собственных чисел составляют числа $\lambda_n^2 - 1$, $n = 1, 2, \dots$, и он тоже полуограничен.

Ортогональность и полнота системы функций (24) не вызывают сомнений, поэтому краевой задаче (11), (23) можно сопоставить самосопряженный линейный оператор H_1 с областью определения $D(H_1)$, состоящей из функций $u \in L^2[0, \pi]$, удовлетворяющих условиям (23) и условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + n^2)|\hat{u}_n|^2 < \infty,$$

где

$$\hat{u}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x)\varphi_n(x)\, dx, \qquad n = 1, 2 \dots ,$$

который действует на функцию из $D(H_1)$ по правилу:

$$(H_1 u)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + n^2}\, \hat{u}_n \varphi_n(x), \qquad \forall x \in [0, \pi], \qquad \forall u \in D(H_1).$$

Оператор H_1 имеет чисто точечный спектр с невырожденными значениями. Легко видеть, что этот оператор можно рассматривать как функцию в смысле И. фон Неймана (с символом $f(\sqrt{z})$) самосопряженного оператора, соответствующего краевой задаче (12), (23), но *нельзя* считать функцией в смысле И. фон Неймана самосопряженного оператора $i\partial_x$, поскольку последний предполагает краевые условия вида [14]

$$u(0) = u(\pi)\exp(i\vartheta), \tag{25}$$

где $\vartheta \in \mathbb{C}$, а не условия (23).

Можно поставить для уравнений (11) и (12) и периодические условия:

$$u(0) = u(\pi), \qquad u'(0) = u'(\pi). \tag{26}$$

Такие условия используются в квантовой теории твердого тела.

Очевидно, решениями краевых задач (11), (26) и (12), (26) являются функции:

$$\varphi_n(x) = \sin(nx/2), \quad \psi_n(x) = \cos(nx/2), \quad \forall x \in [0,\pi], \quad n = 1, 2, \dots .$$

Ортогональность и полнота этой системы функций также хорошо известны. Каждое собственное значению задачи (11), (26) $\lambda_n = \sqrt{1+n^2/4}$ двукратно вырождено — ему соответствуют две линейно независимых собственных функции. Краевой задаче (11), (26) можно сопоставить самосопряженный оператор H_2 с областью определения $D(H_2)$, состоящей из функций $u \in L^2[0,\pi]$, удовлетворяющих условиям (26) и условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+n^2/4)[|\hat{u}_n|^2 + |\hat{v}_n|^2] < \infty,$$

где

$$\hat{u}_n = \int_0^\pi u(x)\varphi_n(x)\,dx, \qquad \hat{v}_n = \int_0^\pi u(x)\psi(x)\,dx,$$

который действует на функцию из $D(H_2)$ по правилу:

$$(H_2u)(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+n^2/4}\,[\hat{u}_n\varphi_n(x) + \hat{v}_n\psi_n(x)], \qquad \forall x \in [0,\pi], \quad \forall u \in D(H_2).$$

Оператор H_2 имеет чисто точечный спектр, каждое значение которого двукратно вырождено. Этот оператор *можно* рассматривать как функцию

$f(-i \cdot i\partial_x)$ в смысле И. фон Неймана самосопряженного варианта оператора $i\partial_x$, определенного при краевых условиях (25) с $\vartheta = 0$, только в другом базисе, поскольку любую собственную функцию оператора H_2 можно представить в виде линейной комбинации двух собственных функций оператора $i\partial_x$ и наоборот. Теперь понятно, почему в теории твердого тела обычно используют условия (25), а не условия (23), казалось бы, более естественные — условиям (25) удовлетворяют функции вида $\exp(ipx)$ (для некоторого набора значений p), которые удобны для описания рассеяния частиц.

Пусть теперь в (11) и (12) $P = \mathbb{R}$. Известно [15], что в этом случае краевой задаче для уравнения (12) можно сопоставить самосопряженный оператор, если она задается без краевых условий, лишь требованием ограниченности решения на $\mathbb{R}$. В квантовой механике это задача о свободном движении частицы.

При всех $\lambda \in [1, \infty)$ каждое из уравнений (11) и (12) имеет фундаментальную систему, состоящую из двух решений

$$\varphi(\lambda, x) = \exp(ikx), \qquad \psi(\lambda, x) = \exp(-ikx), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

где $k = \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Самосопряженный оператор H_3, соответствующий данной краевой задаче для уравнения (11), имеет область определения $D(H_3)$, состоящую из функций $u \in L^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию:

$$\int_1^\infty \lambda^2 [|\hat{u}_1(\lambda)|^2 + |\hat{u}_2(\lambda)|^2] \, d\lambda < \infty,$$

где

$$\hat{u}_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty u(x)\psi(\lambda, x)\, dx, \qquad \hat{u}_2(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty u(x)\varphi(\lambda, x)\, dx, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

а его действие на любую функцию из $D(H_3)$ определяется формулой:

$$(H_3 u)(x) = \int_1^\infty \lambda[\hat{u}_1(\lambda)\varphi(\lambda, x) + \hat{u}_2(\lambda)\psi(\lambda, x)]\, dx, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in D(H_3).$$

После замены переменной интегрирования $\lambda = \sqrt{1 + p^2}$ эта формула принимает вид:

$$(H_3 u)(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty \sqrt{1 + p^2}\, \hat{u}(p) \exp(ipx)\, dp, \, \forall x \in \mathbb{R}, \, \forall u \in D(H_3),$$

где

$$\hat{u}(p) = [\hat{u}_1(\sqrt{1 + p^2})\vartheta(p) + \hat{u}_2(\sqrt{1 + p^2})\vartheta(-p)] \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \qquad \forall p \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно видеть, что оператор H_3 есть не что иное, как псевдодифференциальный оператор с символом $\sqrt{1+p^2}$. Он является функцией в смысле И. фон Неймана не только псевдодифференциального оператора с символом $1+p^2$, но и псевдодифференциального оператора с символом p (самосопряженного варианта оператора $-i\partial_x$ в $L^2(\mathbb{R})$). Оператор H_3 имеет чисто непрерывный спектр $\lambda \geqslant 1$, каждое значение которого двукратно вырожденно.

Случай $P = [0,\infty) = \mathbb{R}_+$ более сложен и будет рассмотрен в одной из последующих публикаций. Здесь отметим только, что функция оператора дифференцирования в $L^2(\mathbb{R}_+)$ не может быть определена по правилу И. фон Неймана по той причине, что оператор $i\partial_x$ не может быть определен в $L^2(\mathbb{R}_+)$ как самосопряженный.

Теперь понятно, в чем преимущество голоморфных функций локальных операторов перед функциями операторов в смысле И. фон Неймана. С помощью определения одной голоморфной функции оператора дифференцирования можно построить много разных операторов в разных гильбертовых пространствах. Некоторые из этих операторов могут быть определены по правилу И. фон Неймана, другие — нет. Это связано, по-видимому, с тем, что это правило не учитывает специфики дифференциальных операторов. Оно относится к *абстрактной* спектральной теории, в то время как предлагаемый здесь подход продолжает спектральную теорию дифференциальных операторов, которая начала интенсивно развиваться уже после фактического завершения абстрактной спектральной теории (см. Предисловие к книге [13]).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из вышеизложенного видно, что определение голоморфной функции оператора дифференцирования позволяет построить теорию некоторого класса обыкновенных линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами по аналогии с теорией уравнений конечного порядка, хотя обнаруживаются и существенные отличия, придающие такому обобщению нетривиальный характер. Выявляется также и прикладное значение теории дифференциальных уравнений бесконечного порядка, как основы математического формализма нового варианта релятивистской квантовой механики, свободного от некоторых трудностей ее общепринятого варианта, основанного на уравнениях Клейна-Гордона и Дирака. В последующих публикациях предполагается рассмотреть уравнения вида (1) с переменной потенциальной функцией $U(x)$.

Список литературы

[1] V. M. Lagodincky. International Congress on Computer Systems and Applied Mathematics CSAM'93 St. Petersburg 1993. Abstracts.

[2] В. М. Лагодинский. Дифференциальные уравнения и процессы управления. http:\\www.neva.ru\journal 1999 v 2.

[3] T. Aoki, M. Kashiwara and T. Kawai. Adv. Math. **62**, 1986, p. 155.

[4] W. Lucha, H. Rupprecht and F. F. Schöberl. Phys. Rev. D. **45**, 1992, p. 1233.

[5] L. Durand and A. Gara. J. Math. Phys. **31**, 1990, p. 2237.

[6] Ю. Ф. Коробейник. Мат. сб. т. 71, 1966, с. 535.

[7] Ю. Ф. Коробейник. Мат. сб. т. 80, 1969, с. 52.

[8] Ю. Ф. Коробейник. Мат. сб. т. 64, 1964, с. 106.

[9] В. В. Напалков. УМН. т. 29, 1974, с. 217.

[10] Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М., Наука, 1976.

[11] И. М. Гельфанд и А. Г. Костюченко. ДАН СССР. **103**, с.349.

[12] Дж. Д. Бьеркен и С. Д. Дрелл. Релятивистская квантовая теория. Т. 1. Релятивистская квантовая механика. М., Наука, 1978.

[13] Б. М. Левитан и И. С. Саргсян. Введение в спектральную теорию. М., Наука, 1970.

[14] И. фон Нейман. Математические основы квантовой механики. М., Наука, 1964.

[15] Р. Рихтмайер. Принципы современной математической физики. Т. 1. М., Мир, 1982.