

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 4, 1999

Электронный журнал,  
рег. № П23275 от 07.03.97

<http://www.neva.ru/journal>  
e-mail: [diff@osipenko.stu.neva.ru](mailto:diff@osipenko.stu.neva.ru)

управление в нелинейных системах

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО РОБАСТНОМУ КВАЗИЛОГИЧЕСКОМУ УПРАВЛЕНИЮ ПРОСТЫМ РОБОТОМ

Т.В.Варядченко, А.А.Первозванский,

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29

С.-Петербургский государственный технический университет

Кафедра "Механика и процессы управления"

e-mail: [control1@citadel.stu.neva.ru](mailto:control1@citadel.stu.neva.ru)

### Аннотация.

Работа посвящена развитию проблемы управления нелинейными объектами при неполной информации о динамике системы, которая рассматривалась и в ранее предоставленных в электронный журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления" статьях авторов. Настоящая статья развивает алгоритмы квазилогического управления, разработанные в предыдущих работах. Найден способ, позволяющий для "тяжелых" систем бороться с нестабилизацией траектории. В качестве примера рассмотрена задача управления простыми роботами и численно исследована возможность настройки управляющего параметра метода локальной аппроксимации такая, что значение желаемого показателя качества совпадения траекторий при идеальных компенсационных управлениях и предлагаемых квазилогических управлениях может быть уменьшено при не слишком многоточечных сетках.

# 1 Робастное квазилогическое управление в задаче управления простым роботом

Пусть динамика управляемого объекта может быть адекватно описана уравнением:

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u; \quad x \in R^n, \quad (1)$$

однако матрицы функции  $f(x), g(x)$  не известны, а проектант располагает лишь информацией о величинах

$$f_s = f(x^s), \quad A_s = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^s}, \quad B_s = g(x^s), \quad s = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где  $x^{(s)}$  – некоторые заданные точки в фазовом пространстве.

Иначе говоря, известны линеаризованные описания объекта в окрестности некоторых режимов  $x = x^s$ .

Введем в рассмотрение линейные системы

$$\dot{x} = A_s \cdot (x - x^s) + f_s + B_s \cdot u, \quad s = 1, \dots, N, \quad (3)$$

В предположении стабилизируемости пар  $A_s, B_s$  можно построить обратные связи вида:

$$u = u_s(x) = -K_s \cdot x, \quad (4)$$

такие, что матрицы  $\bar{A}_s = A_s - B_s \cdot K_s$  являются гурвицевыми.

Тогда можно сконструировать логическое управление исходной системы (1) по схеме [4]:

$$u(x) = u_s(x), \quad \text{если } x \in X_s, \quad (5)$$

где произведено разбиение фазового пространства на области  $X_s$  такие, что каждая из них содержит соответствующую точку  $x^{(s)}$ .

Тем самым строится кусочно-линейное управление, заданное во всем пространстве, хотя сразу возникают проблемы доопределения поведения системы на границе областей  $X_s$ . Рассмотрим далее альтернативный вариант, который будем именовать квазилогическим управлением:

$$u(x) = \sum_s \mu_s(x) \cdot u_s(x), \quad (6)$$

где скалярные функции  $\mu_s(x)$  таковы, что

$$\sum_s \mu_s(x) = 1, \quad \mu_s(x) \geq 0 \quad \text{для всех } x.$$

Таким образом, квазилогическое управление строится как выпуклая комбинация исходных правил.

Если  $\mu_s(x)$  являются функциями-индикаторами областей  $X_s$ , то есть,

$$\mu_s(x) = 1, \text{ если } x \in X_s,$$

$$\mu_s(x) = 0, \text{ если } x \notin X_s,$$

то (6) сводится к логической схеме (5). Однако далее будем требовать, что  $\mu_s(x)$  являются гладкими (дифференцируемыми) функциями, что обеспечивает основное свойство квазилогического управления — отсутствие переключений. С использованием (6) замкнутая система описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot \sum_s \mu_s(x) \cdot u_s(x). \quad (7)$$

Условия, обеспечивающие устойчивость равновесия системы (7) приведены в [1].

Рассмотрим задачу управления простым роботом,двигающемся по радиусу  $r$  и поворачивающемся вокруг своей оси по углу  $\phi$ . Простейшие уравнения его динамики имеют вид

$$m\ddot{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial r} \dot{\phi}^2 = F_r \quad (8)$$

$$I(r)\ddot{\phi} + \frac{\partial I}{\partial r} \dot{r}\dot{\phi} = M_\phi \quad (9)$$

$$r(0) = r_0, \phi(0) = \phi_0, \dot{r}(0) = \dot{r}_0, \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0,$$

где  $I(r)$ -момент инерции,  $m$ -масса,  $F_r$  и  $M_\phi$  - соответственно управляющая сила и момент,  $r_0, \phi_0, \dot{r}_0, \dot{\phi}_0$  - начальные условия.

Построим компенсационное управление по моменту в виде [3]

$$M_\phi = I(r)v + \frac{\partial I}{\partial r} \dot{r}\dot{\phi} \quad (10)$$

$$v = -k_\phi(\phi - \phi^*) - k_{\dot{\phi}}(\dot{\phi} - \dot{\phi}^*) \quad (11),$$

где  $\phi^*(t)$  и  $\dot{\phi}^*(t)$  - желаемые траектории - цель управления.

Подставляя (10), (11) в (9), получим

$$\ddot{\phi} + k_\phi(\phi - \phi^*) + k_{\dot{\phi}}(\dot{\phi} - \dot{\phi}^*) = 0 \quad (12)$$

Полагая  $\phi^* = const$ , получим уравнение, определяющее траекторию  $\phi(t)$  при управлении (10),(11) при переходе к желаемому положению равновесия  $\phi^*$ .

$$\ddot{\phi} + k_{\dot{\phi}}\dot{\phi} + k_\phi\phi = k_\phi\phi^* \quad (12)$$

Аналогично построим компенсационное управление по силе в виде

$$F_r = -p_r(r - r^*) - p_{\dot{r}}(\dot{r} - \dot{r}^*) - \frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial r} \dot{\phi}^2 \quad (13)$$

где  $r^*(t)$  и  $\dot{r}^*(t)$  - желаемые траектории. Подставляя (13) в (8), получим

$$m\ddot{r} + p_r(r - r^*) + p_{\dot{r}}(\dot{r} - \dot{r}^*) = 0 \quad (14)$$

Полагая  $r^* = const$ , получим уравнение, определяющее траекторию  $r(t)$  при управлении (10), (11) при переходе к желаемому положению равновесия

$$\ddot{r} + \frac{p_{\dot{r}}}{m} \dot{r} + \frac{p_r}{m} r = \frac{p_r}{m} r^* \quad (15)$$

Скажем теперь, что уравнения (12), (15) определяют траекторию  $r(t)$ ,  $\phi(t)$  при "идеальном управлении" (10), (11), (13), и в противовес "идеальному" управлению определим робастное квазилогическое управление, выполняя (1)-(7) для системы (8)-(9).

Для определенности положим в (9)

$$I(r) = I_0 + kr^2 \quad (16)$$

Получим следующие формулы для робастного квазилогического управления простым роботом

$$F_r = \left( -p_r + \frac{\sum_s \rho_s k \epsilon^{s^2}}{\sum_s \rho_s} \right) r - p_{\dot{r}} \kappa - \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \epsilon^s}{\sum_s \rho_s} \epsilon$$

$$M_{\phi} = \frac{\sum_s \rho_s 2k(I_0 - kr^{s^2}) / (I_0 + kr^{s^2})}{\sum_s \rho_s} r - k_{\phi} \frac{\sum_s \rho_s (I_0 + kr^{s^2})}{\sum_s \rho_s} \phi +$$

$$+ \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \epsilon^s}{\sum_s \rho_s} \kappa + \left( -k_{\dot{\phi}} \frac{\sum_s \rho_s (I_0 + kr^{s^2})}{\sum_s \rho_s} + \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \kappa^s}{\sum_s \rho_s} \right) \epsilon$$

Контрольное моделирование системы с предлагаемым алгоритмом управления производилось путем интегрирования системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \kappa \\ \dot{\phi} &= \epsilon \\ \dot{\kappa} &= \frac{kr}{m} \epsilon^2 + \frac{1}{m} (-p_r r - p_{\dot{r}} \kappa) - \frac{1}{m} \frac{\sum_s \rho_s k \epsilon^{s^2}}{\sum_s \rho_s} r - \frac{1}{m} \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \epsilon^s}{\sum_s \rho_s} \epsilon \\ \dot{\epsilon} &= -\frac{2kr\kappa\epsilon}{I_0 + kr^2} + \frac{1}{I_0 + kr^2} \left\{ \frac{\sum_s \rho_s (I_0 + kr^{s^2})}{\sum_s \rho_s} (-k_{\phi} \phi - k_{\dot{\phi}} \epsilon) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sum_s \rho_s 2k(I_0 - kr^{s^2}) / (I_0 + kr^{s^2})}{\sum_s \rho_s} r + \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \epsilon^s}{\sum_s \rho_s} \kappa + \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \kappa^s}{\sum_s \rho_s} \epsilon \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

при заданных начальных условиях и функциях

$$\rho_s = \rho_s(u) = \exp \left\{ -\frac{\|u - u_s\|^2}{\delta^2} \right\},$$

$\delta$  – параметр локальности [2],  $r^s, \kappa^s, \epsilon^s$  – значения на заранее заданной сетке.

Заметим, что множитель

$$\frac{\sum_s \rho_s (I_0 + kr^{s2})}{\sum_s \rho_s},$$

в соотношении для управления  $M_\phi$  определяет оценку момента инерции  $I(r)$ .

Заметим также, что робастное квазилогическое управление представляет по существу специально подобранный ПД-регулятор.

## 2 Численные результаты

На следующих трех рисунках приведены зависимости от времени для радиуса  $r$ , радиальной скорости  $\dot{r} = \kappa$ , угловой скорости  $\dot{\phi} = \epsilon$  и угла  $\phi$  при указанном значении параметра  $k$ , определяющего зависимость от радиуса момента инерции  $I(r) = I_0 + kr^2$ . Одно решение соответствует "идеальному" управлению и легко узнаваемо, второе – робастному квазилогическому управлению. Все прочие условия, кроме значения  $k$  одинаковы, именно, начальные условия:  $r(0) = 1, \dot{r}(0) = 0, \dot{\phi}(0) = 0, \phi(0) = 1; I_0 = 1, m = 1, k_\phi = 1, k_{\dot{\phi}} = 2.5, p_r = 1, p_{\dot{r}} = 2.5$ . Желаемое положение равновесия  $r^* = 0, \phi^* = 0$  – нулевое. Норма в  $\rho_s(u)$  определялась по компонентам, соответствующим оцениваемой функции. Интервал интегрирования 26 сек., шаг интегрирования 0.1 сек. Число точек сетки  $10 \times 10 \times 10 \times 10^1$ , параметр локальности  $\delta = 0.05$ . При значении параметра  $k = 0.1$  кривые, соответствующие квазилогическому и "идеальному" управлению совпадают. При более "далеких" от желаемого положения равновесия начальных условиях рассогласование кривых, соответствующих квазилогическому и "идеальному" управлению, увеличивается (усугубляется), и расходимость траекторий наблюдается при меньших значениях параметра  $k$ .

<sup>1</sup>Сетка случайная, по равномерному закону с захватом "идеальной" траектории.

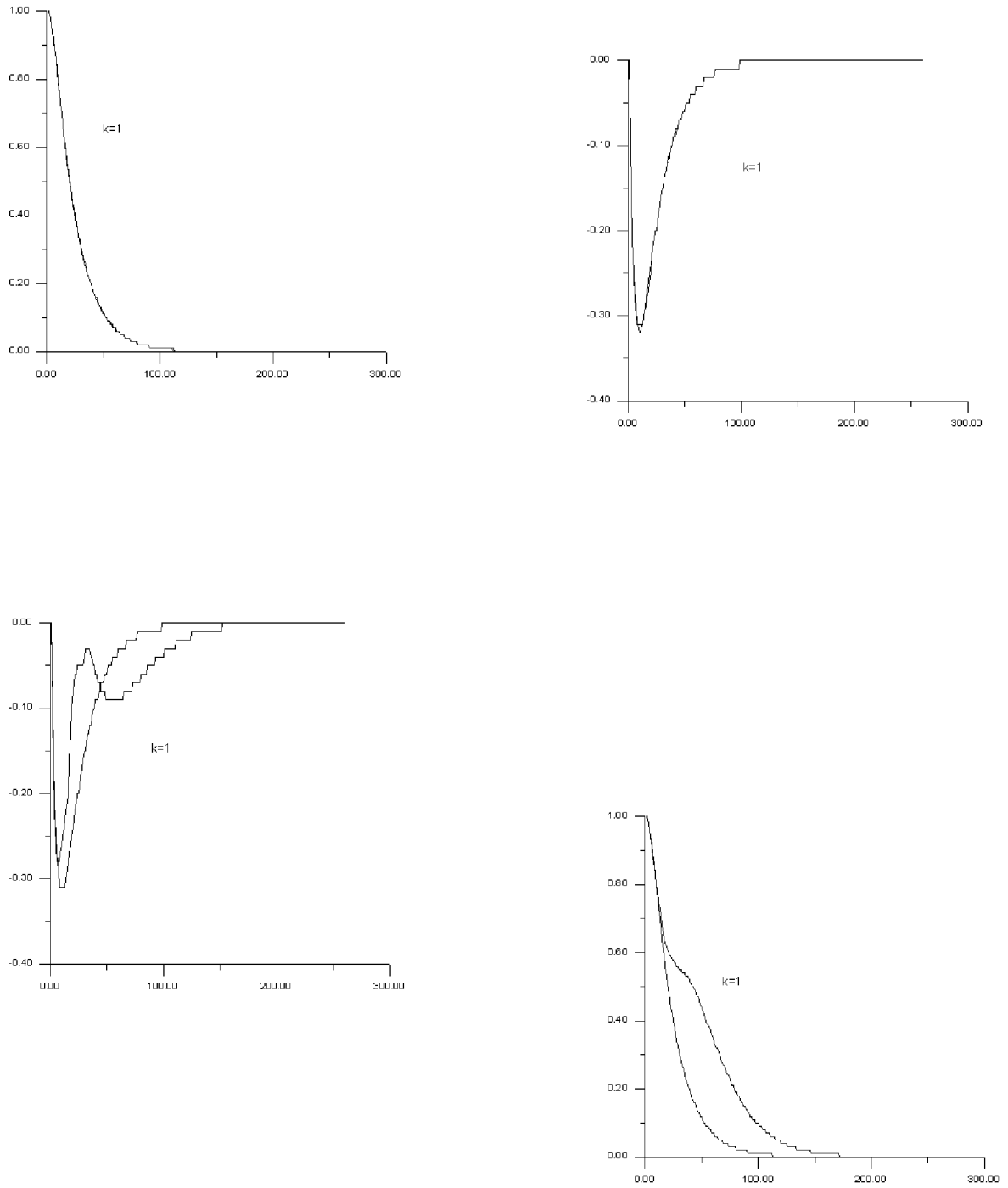


Рис.1

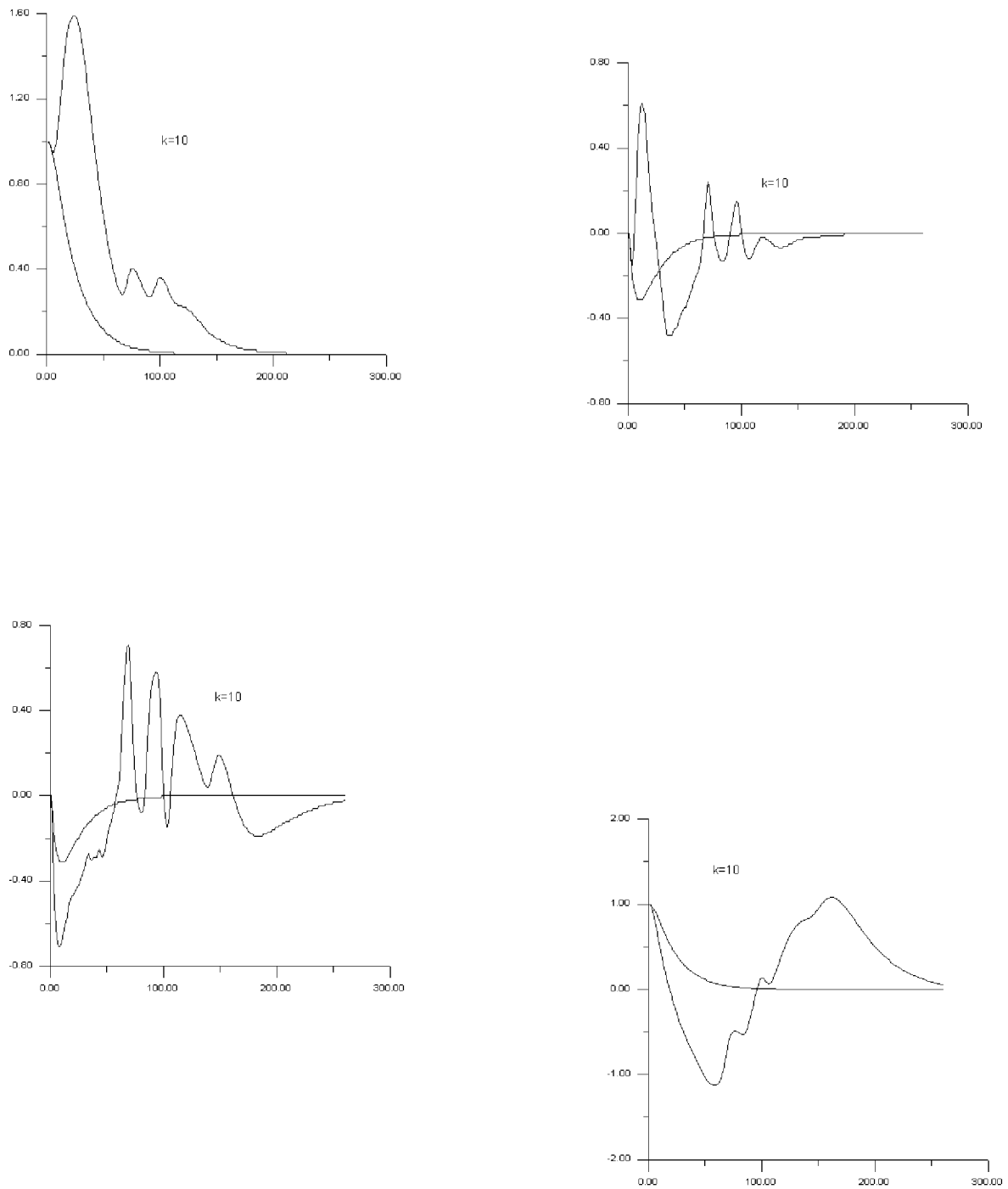


Рис.2

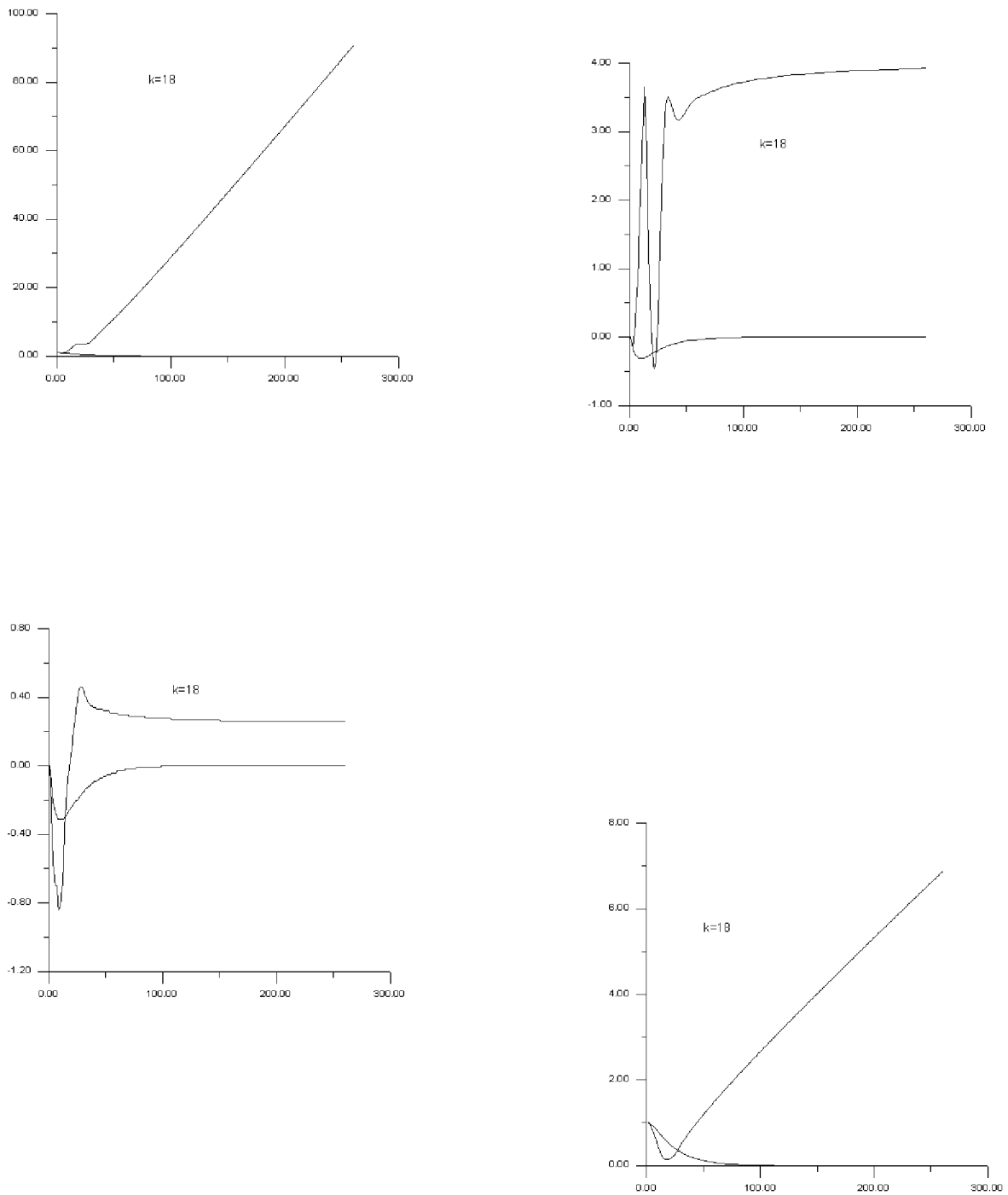


Рис.3



### 3 Коррекция робастного квазилогического управления

Численные эксперименты показали возможность коррекции нестабилизации при робастном квазилогическом управлении путем введения поправки  $x^*$  в регулятор (4), представляющей собой убывающую функцию времени, формируемую линейным осциллятором при соответствующих начальных условиях и понимаемой как "желаемая траектория".

$$u = u_s(x) = -K_s \cdot (x - x^*). \quad (18)$$

Вектор  $x^*$  содержит все компоненты фазового пространства. Для рассматриваемого объекта управление с коррекцией имеет вид:

$$F_r = \left( -p_r + \frac{\sum_s \rho_s k \epsilon^{s2}}{\sum_s \rho_s} \right) (r - r^*) - p_{\dot{r}} (\kappa - \kappa^*) - \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \epsilon^s}{\sum_s \rho_s} (\epsilon - \epsilon^*)$$

$$M_\phi = \frac{\sum_s \rho_s 2k(I_0 - kr^{s2}) / (I_0 + kr^{s2})}{\sum_s \rho_s} (r - r^*) - k_\phi \frac{\sum_s \rho_s (I_0 + kr^{s2})}{\sum_s \rho_s} (\phi - \phi^*) +$$

$$+ \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \epsilon^s}{\sum_s \rho_s} (\kappa - \kappa^*) + \left( -k_{\dot{\phi}} \frac{\sum_s \rho_s (I_0 + kr^{s2})}{\sum_s \rho_s} + \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \kappa^s}{\sum_s \rho_s} \right) (\epsilon - \epsilon^*)$$

Контрольное моделирование системы с предлагаемым алгоритмом управления производилось путем интегрирования системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \kappa \\ \dot{\phi} &= \epsilon \\ \dot{\kappa} &= \frac{kr}{m} \epsilon^2 + \frac{1}{m} (-p_r (r - r^*) - p_{\dot{r}} (\kappa - \kappa^*)) - \frac{1}{m} \frac{\sum_s \rho_s k \epsilon^{s2}}{\sum_s \rho_s} (r - r^*) - \frac{1}{m} \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \epsilon^s}{\sum_s \rho_s} (\epsilon - \epsilon^*) \\ \dot{\epsilon} &= -\frac{2kr\kappa\epsilon}{I_0 + kr^2} + \frac{1}{I_0 + kr^2} \left\{ \frac{\sum_s \rho_s (I_0 + kr^{s2})}{\sum_s \rho_s} (-k_\phi (\phi - \phi^*) - k_{\dot{\phi}} (\epsilon - \epsilon^*)) \right. \\ &+ \left. \frac{\sum_s \rho_s 2k(I_0 - kr^{s2}) / (I_0 + kr^{s2})}{\sum_s \rho_s} (r - r^*) + \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \epsilon^s}{\sum_s \rho_s} (\kappa - \kappa^*) + \frac{\sum_s \rho_s 2kr^s \kappa^s}{\sum_s \rho_s} (\epsilon - \epsilon^*) \right\} \\ \dot{r}^* &= \kappa^* \\ \dot{\phi}^* &= \epsilon^* \\ \dot{\kappa}^* &= -a_r r^* - a_{\dot{r}} \kappa^* \\ \dot{\epsilon}^* &= -b_\phi \phi^* - b_{\dot{\phi}} \epsilon^* \end{aligned} \quad (19)$$

в которой коэффициенты  $a_r, a_{\dot{r}}, b_\phi, b_{\dot{\phi}}$  подбирались так, чтобы устранить расходимость траекторий при простом квазилогическом управлении. Интуитивно ясно, что "желаемая траектория" должна быть более медленной, чем та, на которую настроен квазилогический регулятор, именно "идеальная" траектория. Начальные условия  $r(0) = r^*(0), \dot{r}(0) = \dot{r}^*(0), \phi(0) =$

$\phi^*(0), \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}^*(0)$  и функции

$$\rho_s = \rho_s(u) = \exp \left\{ -\frac{\|u - u_s\|^2}{\delta^2} \right\},$$

$\delta$  – параметр локальности [3],  $r^s, \kappa^s, \epsilon^s$  – значения на заранее заданной сетке. Если  $r(0) = \phi(0), \dot{r}(0) = \dot{\phi}(0)$  и  $m = 1$ , интегрируется система только 6-го порядка. На следующих двух рисунках приведены зависимости от времени для радиуса  $r$ , радиальной скорости  $\dot{r} = \kappa$ , угловой скорости  $\dot{\phi} = \epsilon$  и угла  $\phi$  при значении параметра  $k = 18$ , при котором наблюдалась расходимость траектории при робастном квазилогическом управлении. Все условия те же, что в произведенных и описанных выше экспериментах. Время интегрирования увеличено и равно 60 сек. Шаг интегрирования 0.2сек. На первом рисунке ”желаемая траектория” примерно вдвое медленнее ”идеальной”, на которую был ранее настроен регулятор ( $a_r = 2.5, a_{\dot{r}} = 0.2$ , начальные условия  $r(0) = r^*(0) = 1 = \phi(0) = \phi^*(0), \dot{r} = \dot{r}^* = \dot{\phi} = \dot{\phi}^* = 0$ ),  $I_0 = 1, m = 1, k_\phi = 1, k_{\dot{\phi}} = 2.5, p_r = 1, p_{\dot{r}} = 2.5$  Одна кривая показывает ”желаемую траекторию”, вторая кривая - траекторию с коррекцией. Как видно совпадение кривых хорошее. На втором рисунке в качестве желаемой взята ”идеальная траектория”,  $a_r = 2.5, a_{\dot{r}} = 1$ , а регулятор настроен на больший коэффициент усиления  $I_0 = 1, m = 1, k_\phi = 5, k_{\dot{\phi}} = 12.5, p_r = 5, p_{\dot{r}} = 12.5$ . Таким образом, для ”тяжелых систем” проектировщик должен ввести ”желаемую траекторию” и увеличить коэффициенты регулятора в несколько раз по сравнению с соответствующими ”желаемой траектории”. Если настроить регулятор точно на ”желаемую траекторию”, наблюдается расходимость. При более далеких от желаемого положения равновесия начальных условиях, именно  $r(0) = r^*(0) = 2, \dot{r}(0) = \dot{r}^*(0) = 0, \phi(0) = \phi^*(0) = 2, \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}^*(0) = 0$ , также удается получить сходимость траекторий при  $k = 18$ , чего не наблюдалось при квазилогическом управлении без коррекции. Следует однако заметить, что совпадение с ”желаемой” траекторией при более далеких начальных условиях хуже.

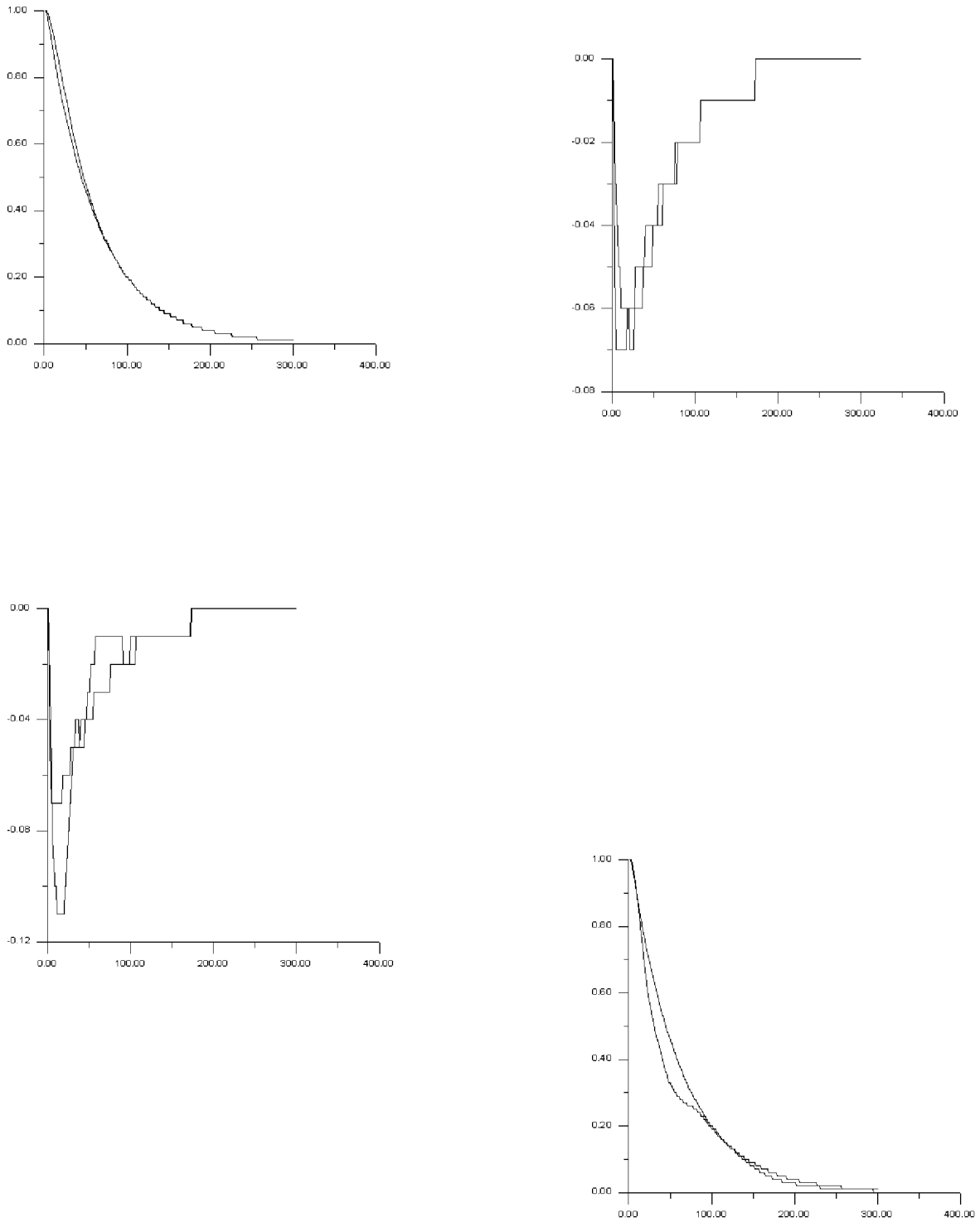


Рис.4

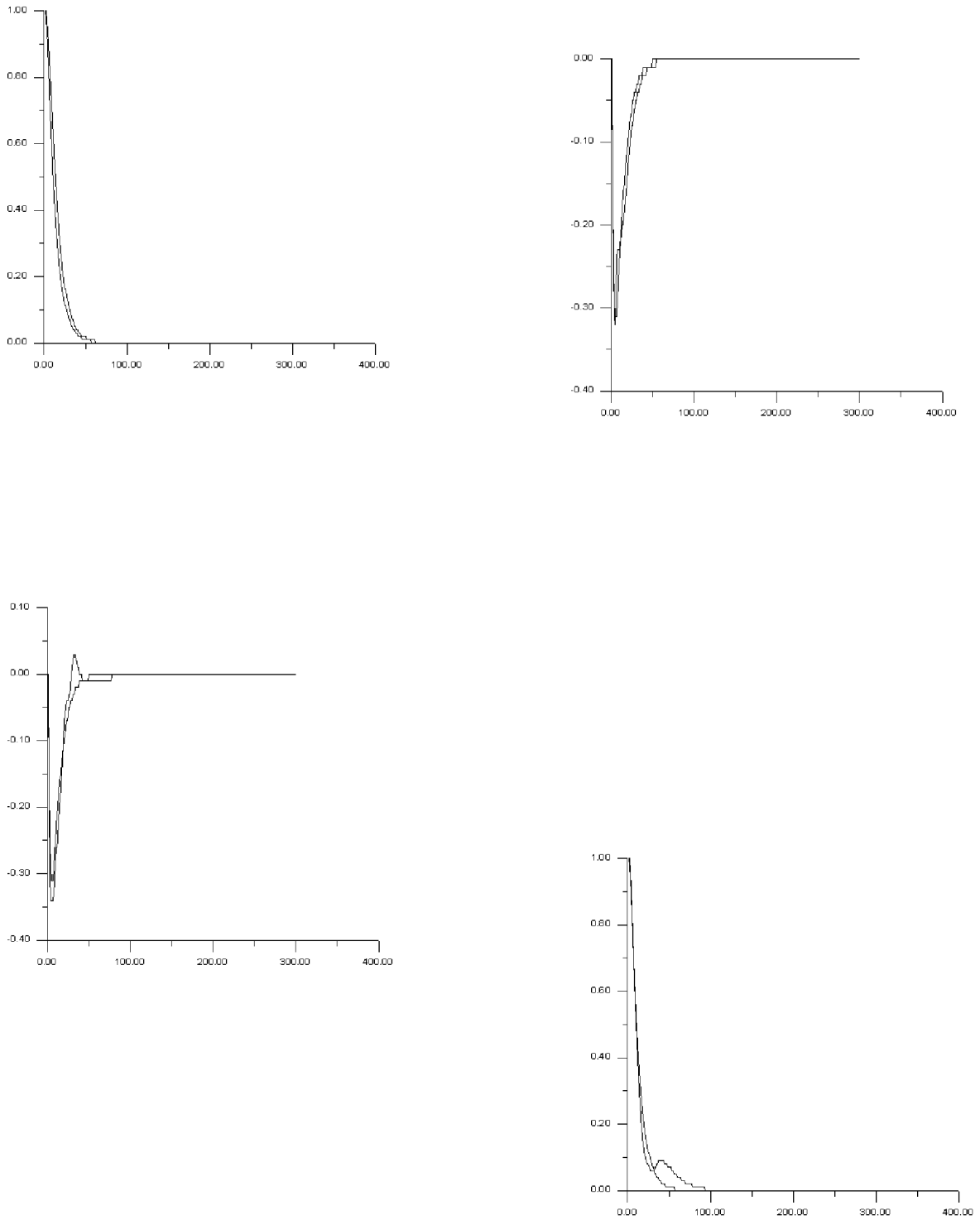


Рис.5

## 4 Выводы

Квазилогическое управление обеспечивает сходимость к положению равновесия и малое отличие переходного процесса от процесса при "идеальном" управлении для не "тяжелых" систем и при адекватно начальным условиям выбранных сетках. Число точек сетки может быть небольшим.<sup>2</sup> Для "тяжелых" систем ( $k \geq 18$ ) нет сходимости. Введение коррекции позволяет получить сходимость и для "тяжелых" систем. Доказательство устойчивости замкнутой системы с управлением с коррекцией пока не найдено.

## 5 Литература

1. *Первозванский А. А.* Робастное квазилогическое управление нелинейными объектами // 1999, Теория и системы управления, принято к печати.

2. *Катковник В. Я.* Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации. М.: Наука, 1985.

3. *Первозванский А. А.* Курс теории управления. М.: Наука, 1986.

4. Tanaka K., Takayuki L., Wang H.O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control quadratic stabilizability,  $H^\infty$ -control theory and linear matrix inequalities // IEEE Tr. Fuzzy Syst. V.4, N1, p.1-13.

---

<sup>2</sup>Значение параметра  $\delta$  должно обеспечивать значение  $\rho_s(u) \neq 0 > \rho^* > 0$ .