ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2000
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

ФУНКЦИОНАЛ С ФИКСИРОВАННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Н.Кусюмов

Россия, 420111, Казань, ул. К. Маркса, д. 10,
Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева,
кафедра Аэрогидродинамики,
e-mail: kusyumov@agd.kai.ru

Аннотация.

Рассматривается функционал, вариация которого происходит вследствие действия непрерывной группы преобразований на переменные, входящие в лагранжиан, а пределы интегрирования функционала не варьируются. Определяются соотношения, которым должна удовлетворять группа преобразований, для того чтобы имела место инвариантность функционала к преобразованиям группы. Рассматривается связь условия инвариантности функционала с задачей определения законов сохранения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Вариационный подход к задаче построения законов сохранения систем дифференциальных уравнений является, по-видимому, наиболее известным и разработанным. Этот подход может быть применен для так называемых вариационных систем уравнений и основан на использовании теоремы Э.Нетер [1]. Если исходная система уравнений может быть получена как уравнения Эйлера-Лагранжа для некоторого функционала (”эйлерова”система) и функционал инвариантен по отношению к действию непрерывной группы преобразований, то теорема Нетер позволяет сразу выписать законы сохранения исходной системы уравнений.

Далеко не каждую систему уравнений можно представить как вариационную. Для произвольных систем уравнений также имеются методики, позволяющие строить законы сохранения [2]. Однако, использование этих методик в приводит в свою очередь к необходимости решать системы уравнений в частных производных для функций, которые называются характеристиками законов сохранения.

В настоящей работе мы также будем рассматривать системы уравнений, которые не являются вариационными. Некоторые из невариационных систем уравнений можно привести к виду при котором каждое из уравнений системы будет содержать вариационную часть, (полученную в результате действия оператора Эйлера на лагранжиан некоторого функционала) и аддитивно добавленное выражение. Системы уравнений такого класса мы будем ниже называть ”квазиэйлеровыми”.

Мы будем рассматривать определенный класс квазиэйлеровых систем, законы сохранения которых связаны с условием инвариантности некотрого функционала по отношению к действию непрерывной группы преобразований. При этом мы рассмотрим специальный принцип вариации функционала с фиксированными пределами интегрирования. Мы рассмотрим связь данного принципа вариации функционала с задачей определения законов сохранения обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Функция наблюдения и интегральная оценка ее отклонения

Рассмотрим функцию y, определяемую выражением

$$y = g(t, x, p_1), \tag{1}$$

где $t \in T \subset R$ – время; $x^j(t)$ – координаты m - мерного вектора, заданного на некотором подпространстве $M \subset R^m$; p_1^j – координаты в пространстве $J^1(\pi)$; $g(t, x, p_1)$ – некоторая гладкая функция. Пространство $J^1(\pi)$ определяется как пространство 1-струй локальных сечений расслоения $\pi : T \longrightarrow E = T \times M$. При этом в пространстве $J^1(\pi)$ задано распределение Картана C набором 1-форм Картана

$$\omega^j = dx^j - p_1^j dt. \tag{2}$$

Пусть также E является пространством представления некоторой однопараметрической группы непрерывных преобразований так, что

$$\bar{t} = \psi(t,\, x,\, a), \quad \bar{x}^j = \varphi(t,\, x,\, a), \tag{3}$$

где a – параметр преобразования, $\psi(t,\, x,\, a), \varphi(t,\, x,\, a)$ – гладкие функции.

Группе преобразований G соответствует векторное поле, заданное на пространстве расслоения E

$$X = \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{4}$$

где

$$\xi_t = \left.\frac{\partial \psi}{\partial a}\right|_{a=0}, \tag{5}$$

$$\xi^j = \left.\frac{\partial \varphi^j}{\partial a}\right|_{a=0}. \tag{6}$$

Определим также векторное поле Ли $\overline{X}$ как поднятие векторного поля X на $J^1(\pi)$ при условии сохранения распределения Картана [3].

Под действием преобразований временной координаты и вектора фазовых координат y примет вид

$$\overline{y} = g(\bar{t}, \overline{x}, \overline{p}_1).$$

Изменение y определим величиной

$$\delta y = \overline{y} - y. \tag{7}$$

Отметим здесь, что если мы будем рассматривать x как вектор фазовых координат динамической системы, то y можно рассматривать как функцию наблюдения динамической системы, а величина δy определяет отклонение функции наблюдения динамической системы. Теоретико-групповой подход к задачам чувствительности развивался в работах В.Г.Павлова и изложен, например, в работе [4]. В [4] считалось, что возмущения налагаются на вектор фазовых координат и на вектор параметров системы. Аналогичный подход использован также в работе [5], где возмущения накладывались на вектор фазовых координат системы и на временную коодинату (преобразования (3)).

Таким образом, мы можем рассматривать величину δy как чувствительность функции наблюдения y к изменениям (возмущениям) координат точки t, x, p_1 пространства J^1 под действием группы преобразований G.

Рассмотрим теперь величину

$$I[\delta y] = \int_{t_0}^{t_1} \delta y dt. \tag{8}$$

Величина $I[\delta y]$ определяет интеграл отклонения функции наблюдения y на некотором отрезке времени $[t_0, t_1]$. Мы будем говорить также, что величина $I[\delta y]$ определяет интегральную чувствительность функции наблюдения. В частности, если величина $\delta y \equiv 0$ на всем наблюдаемом отрезке времени (нечувствительность y к возмущениям), то $I[\delta y] = 0$.

3. Интегральная нечувствительность функции наблюдения

Определим условия при которых имеет место интегральная нечувствительность функции наблюдения к преобразованиям группы G, т.е. условия при которых

$$I[\delta y] = 0. \tag{9}$$

В данном случае мы считаем, что преобразования (3) не заданы и определяются исходя из условия (9). Следовательно, считаются произвольными функции ξ_t, ξ^j, определяющие векторное поле X на E и $\overline{X}$ на $J^1(\pi)$. При этом мы полагаем, что $\overline{X}$ является полем Ли, т.е. сохраняет распределение Картана.

С учетом (8), запишем условие (9) в виде

$$I[\delta y] = \int_{t_0}^{t_1} (\overline{y} - y)dt = \int_{t_0}^{t_1} (g(\overline{t}, \overline{x}, \overline{p}_1) - g(t, x, p_1))dt = 0. \tag{10}$$

Согласно [1], из (10) следует, что (9) имеет место при

$$g(\overline{t}, \overline{x}, \overline{p}) - g(t, x, p_1) = 0. \tag{11}$$

Равенство (11), очевидно, является условием инвариантности $g(t, x, p_1)$ относительно действия преобразований группы G. На языке теории непрерывных групп преобразований необходимое и достаточное условие инвариантности функции $g(t, x, p_1)$ записывается в виде [2]

$$\overline{X}\, g(t, x, p_1) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, условие интегральной нечувствительности функции наблюдения к преобразованиям группы G эквивалентно условию инвариантности (нечувствительности) функции $g(t, x, p_1)$ к преобразованиям этой группы.

4. Вариационная постановка задачи о интегральной нечувствительности

Выражение (10) можно записать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} g(\overline{t}, \overline{x}, \overline{p}_1)dt - \int_{t_0}^{t_1} g(t, x, p_1)dt = 0. \tag{13}$$

Мы можем ввести обозначение $\overline{g} = g(\overline{t}, \overline{x}, \overline{p}_1)$, и рассматривать функционал $I[g]$ вида

$$I[\,g\,] = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x, p_1)dt \tag{14}$$

Функционал $I[\,g\,]$ будем называть функционалом с фиксированными пределами интегрирования.

Левую часть выражения (13) можно трактовать как вариацию функционала $I[\,g\,]$ под действием группы G и рассматривать (12) как условие инвариантности функционала $I[\,g\,]$. Поэтому мы будем называть далее группу преобразований G группой вариационных симметрий функционала $I[\,g\,]$, если выполняется соотношение (13) (или условие (12)).

Сделаем здесь следующее замечание. В работах по вариационному исчислению (например, [2]) обычно используется отличное от (14) обозначение функционала, т.е.

$$I[\,x\,] = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x, p_1)dt.$$

При этом считается, что пределы интегрирования t_0 и t_1 преобразуются по закону преобразования независимой переменной t (функционал с варьируемой областью интегрирования). Поэтому определение инвариантности функционала $I[\,x\,]$ отличается от соответствующего определения (13) инвариантности функционала $I[\,g\,]$. Для функционала $I[\,x\,]$ определение инвариантности имеет вид

$$\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} g(\bar{t}, \bar{x}, \bar{p}_1)d\bar{t} - \int_{t_0}^{t_1} g(t, x, p_1)dt = 0.$$

В следствие этого, для функционала $I[\,x\,]$ условие инвариантности также будет отличаться от условия инвариантности функционала $I[\,g\,]$ (выражение (12)). Эти различия в условиях инвариантности функционалов $I[\,g\,]$ и $I[\,x\,]$ в свою очередь приводят к необходимости "корректировки"алгоритмов решения задач, основанных на использовании принципа инвариантности функционалов. В частности, это касается задачи отыскания законов сохранения систем дифференциальных уравнений.

5. Симметрии функционала $I[\,g\,]$ и законы сохранения

Рассмотрим связь вариационных симметрий функционала $I[\,g\,]$ с задачей отыскания законов сохранения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В соответствии с тем, что лагранжиан функционала $I[\,g\,]$ содержит производные только первого порядка мы ограничимся рассмотрением систем уравнений второго порядка, которые будем записывать в виде

$$F^j(t, x, p_1, p_2) = 0. \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{15}$$

Здесь F^j – гладкие функции, p_2^j – координаты пространства 2-струй $J^2(\pi)$ локальных сечений расслоения π. При этом распределение Картана C в пространстве $J^2(\pi)$ задается набором 1-форм Картана (2) и 1-формами

$$\Omega^j = dp_1^j - p_2^j dt. \tag{16}$$

Напомним, что законом сохранения для системы уравнений (15) называется выражение [2]

$$\theta^j F^j(t,x,p_1,p_2) = \frac{d}{dt} P(t,x,p_1). \tag{17}$$

Здесь $P(t,x,p_1)$ – некоторая гладкая функция (компонента закона сохранения). Функции $\theta^j(t,x,p_1)$, удовлетворяющие (17), называются характеристиками закона сохранения.

Предположим, что система уравнений (15) является эйлеровой, то есть, функции $F^j(t,x,p_1,p_2)$ могут быть представлены в виде

$$F^j(t,x,p_1,p_2) = E_j(g), \tag{18}$$

где $g(t,x,p_1)$ рассматривается как лагранжиан некоторого функционала. Оператор Эйлера E_j с номером j задается формулой [2]

$$E_j = \sum_{J=0}^{1} (-D)_J \frac{\partial}{\partial p_J^j} \tag{19}$$

Здесь $(-D)_0 = 1$; $(-D)_1 = -D_t$, где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + p_1^j \frac{\partial}{\partial x^j} + p_2^j \frac{\partial}{\partial p_1^j} + \ldots$$

Кроме того, мы полагаем в (19) $p_0^j = x^j$.

Для определения законов сохранения эйлеровой системы рассматривают функционал $I[\,x\,]$. Условие инвариантности функционала $I[\,x\,]$ имеет вид [2]

$$\overline{X}\, g + g\, D_t(\xi_t) = 0. \tag{20}$$

Если система уравнений (15) является эйлеровой, т.е. удовлетворяет (18), то в этом случае ее законы сохранения определяются с помощью теоремы Нетер [2]. Согласно этой теореме, если функционал $I[\,x\,]$ имеет группу вариационных симметрий, удовлетворяющую (20), то существует функция $P(t,x,p_1)$, такая, что

$$\frac{d}{dt} P(t,x,p_1) = Q^j E^j(g). \tag{21}$$

Здесь функции Q^j – характеристики векторного поля X, определяемые выражением

$$Q^j = \xi^j - \xi_t p_1^j.$$

Функция $P(t, x, p_1)$, согласно [2], имеет вид,

$$P = -(A + \xi_t g),$$

где

$$A = Q^j \frac{\partial g}{\partial p_1^j}. \tag{22}$$

Таким образом, теорема Нетер позволяет сразу выписать компоненты законов сохранения, если исходная система является эйлеровой и известны вариационные симметрии соттветствующего лагранжиана.

Пусть теперь функции $F^j(t, x, p_1, p_2)$ могут быть представлены в виде суммы двух слагаемых

$$F^j(t, x, p_1, p_2) = E_j(g) + F_n^j(t, x, p_1, p_2). \tag{23}$$

Будем говорить, что функции $F_n^j(t, x, p_1, p_2)$ определяют "не эйлерову"часть системы уравнений (15). Отметим, что одну и ту же систему уравнений (15) можно различным образом представить в виде записи (23). Поэтому систему уравнений (15) с функциями F^j вида (23) мы будем называть "квазиэйлеровой"для лагранжиана g. Определим ниже вид функций $F_n^j(t, x, p_1, p_2)$ для которых законы сохранения можно определить используя условие инвариантности (12) функционала $I[\,g\,]$.

Теорема. *Пусть система уравнений (15) является квазиэйлеровой для лагранжиана g, т.е. функции F^j имеют вид (23). Тогда, если векторное поле $\overline{X}$ является инфинитезимальной симметрией функционала $I[\,g\,]$, и функции $F_n^j(t, x, p_1, p_2)$ удовлетворяют условию*

$$Q^j F_n^j(t, x, p_1, p_2) = \xi_t D_t(g), \tag{24}$$

то характеристики Q^j векторного поля $\overline{X}$ являются характеристиками закона сохранения системы уравнений (15).

Доказательство этой теоремы возникает из того факта, что, согласно [2],

$$\overline{X} g = Q^j E_j(g) + D_t(A) + \xi_t D_t(g),$$

где $A(t, x, p_1)$ определяется выражением (22). С учетом (23),(24) отсюда имеем

$$Q^j F^j = D_t(-A) \tag{25}$$

и теорема доказана.

6. Законы сохранения для $m = 1$

Если размерность системы $m = 1$, то выражение (24) принимает более простой вид. Неэйлерова часть уравнения (15) в этом случае полностью определяется лагранжианом $g(t, u, p_1)$ (который мы пока возьмем в общем виде). Из выражения (24) имеем

$$F_n = \frac{\xi_t D_t(g)}{Q},$$

где Q – характеристика векторного поля, определяющего группу вариационных симметрий функционала $I[\,g\,]$. С учетом данного выражения для функции F_n и выражения (23) мы можем записать исходное (квазиэйлерово) уравнение (15) в виде

$$QE(g) + \xi_t D_t(g) = Q\frac{\partial g}{\partial u} - QD_t\left(\frac{\partial g}{\partial p_1}\right) + \xi_t D_t(g) = 0, \tag{26}$$

где E – оператор Эйлера.

С другой стороны, пользуясь выражением (25), мы также можем записать исходное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(-Q\frac{\partial q}{\partial p_1}\right) = 0. \tag{27}$$

Сравнивая между собой выражения (26) и (27), получим

$$Q\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial p_1}D_t(Q) + \xi_t D_t(g) = 0. \tag{28}$$

Пусть характеристика векторного поля X имеет вид $Q = \xi_u - \xi_t p_1$. После подстановки Q и преобразований, (28) примет вид выражения

$$Xg + (D_t(\xi_u) - p_1 D_t(\xi_t))\,\frac{\partial g}{\partial p_1} = 0 \tag{29}$$

(аналогичное выражение получается также из условия инвариантности (12) функционала $I[\,g\,]$).

Выражение (29) может служить для определения координат векторного поля X при заданном лагранжиане $g(t, u, p_1)$. Рассмотрим, лагранжиан линейный по p_1, т.е. $g(t, u, p_1) = a(t, u)p_1 + b(t, u)$, где $a(t, u), b(t, u)$ – некоторые гладкие функции. Квазиэйлерово уравнение для данного лагранжиана, в соответствии с (23), имеет эйлерову часть

$$E(Q) = \frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial t},$$

и не эйлерову часть

$$\xi_t D_t(g) = \frac{\xi_t}{\xi_u - \xi_t p_1}\left(p_1\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial t} + {p_1}^2\frac{\partial a}{\partial u} + p_1\frac{\partial b}{\partial u} + ap_2\right).$$

Подстановкой в (26) исходное уравнение можно записать в виде

$$\xi_u\left(\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial t}\right) + \xi_t\left(2\frac{\partial a}{\partial t}p_1 + \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial u}(p_1)^2 + ap_2\right) = 0. \qquad (30)$$

Здесь координаты векторного поля ξ_t, ξ_u должны удовлетворять условию (29). После подстановки в (29) имеем

$$p_1\xi_t\frac{\partial a}{\partial t} + p_1\xi_u\frac{\partial a}{\partial u} + \xi_t\frac{\partial b}{\partial t} + \xi_u\frac{\partial b}{\partial u} + a\frac{\partial \xi_u}{\partial t} + ap_1\frac{\partial \xi_u}{\partial u} - p_1 a\frac{\partial \xi_t}{\partial t} - p_1^2 a\frac{\partial \xi_t}{\partial u} = 0.$$

Расщепляя это выражение по степеням p_1, получим систему соотношений

$$\xi_t\frac{\partial b}{\partial t} + \xi_u\frac{\partial b}{\partial u} + a\frac{\partial \xi_u}{\partial t} = 0; \quad \xi_t\frac{\partial a}{\partial t} + \xi_u\frac{\partial a}{\partial u} + a\frac{\partial \xi_u}{\partial u} - a\frac{\partial \xi_t}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \xi_t}{\partial u} = 0. \qquad (31)$$

Функция $b(t,u)$ входит только в первое соотношение (31). Поэтому координаты ξ_t, ξ_u векторного поля X определяются из второго и третьего соотношений (31). Первое соотношение, входящее в (31) используется для определения $b(t,u)$.

С учетом второго соотношения, входящего в (31), уравнение (30) приводится к виду

$$-\frac{\partial(a\xi_u)}{\partial t} + \xi_t\left(2\frac{\partial a}{\partial t}\frac{du}{dt} + \frac{\partial a}{\partial u}(\frac{du}{dt})^2 + a\frac{d^2u}{dt^2}\right) = 0. \qquad (32)$$

Если координаты ξ_t, ξ_u векторного поля X удовлетворяют (31), то тогда закон сохранения уравнения (32), в соответствии с (27), определяется выражением

$$\frac{d}{dt}\left(a\xi_t\frac{du}{dt} - a\xi_u\right) = 0. \qquad (33)$$

Выясним теперь какой вид законов сохранения получится для уравнения (32) исходя из теоремы Нетер. Для этого уравнение (32) запишем в виде

$$p_2 - H = 0, \qquad (34)$$

где

$$H = \frac{1}{a\xi_t}\frac{\partial(a\xi_u)}{\partial t} - \frac{2}{a}\frac{\partial a}{\partial t}p_1 - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial u}(p_1)^2.$$

Согласно [2], любое уравнение вида (34) можно записать как уравнение Эйлера-Лагранжа, умножив его на некоторую функцию ϕ, которая должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + p_1 \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial (\phi H)}{\partial p_1} = 0. \tag{35}$$

Определим какой вид должны иметь функция $\phi(t, u, p_1)$ и лагранжиан g^* для того, чтобы имел место закон сохранения (33). Мы сделаем это не решая уравнение (35), а из других соображений.

Пусть $Q^* = \xi_u^* - \xi_t^* p_1$ – характеристика векторного поля X^* определяющего инфинитезимальную вариационную симметрию функционала с лагранжианом g^*. Тогда из (21) и (33) следует, что

$$\phi = \frac{a\xi_t}{Q^*}. \tag{36}$$

С другой стороны, применяя оператор Эйлера к лагранжиану g^*, имеем

$$E(g^*) = \frac{\partial g^*}{\partial u} - \frac{\partial^2 g^*}{\partial x \partial p_1} - p_1 \frac{\partial^2 g^*}{\partial u \partial p_1} - p_2 \frac{\partial^2 g^*}{\partial p_1^2} = \phi(p_2 - H),$$

откуда, с учетом (36)

$$\frac{\partial^2 g^*}{\partial p_1^2} = -\frac{a\xi_t}{Q^*}. \tag{37}$$

Мы будем рассматривать векторное поле X^* для которого $\xi_t^* \equiv 0$, поскольку для других векторных полей лагранжиан g^* имеет вид логарифмической функции и имеются сложности в обеспечении условия (20) инвариантности лагранжиана. При $\xi_t^* \equiv 0$ лагранжиан g^* имеет вид квадратичного по p_1 полинома

$$g^* = -\frac{a\xi_t}{2\xi_u^*} {p_1}^2 + b^* p_1 + c*,$$

где $b^*(t, u), c^*(t, u)$ – некоторые функции. Применяя оператор Эйлера к этому лагранжиану имеем уравнение

$$\frac{a\xi_t}{\xi_u^*} p_2 + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a\xi_t}{2\xi_u^*}\right) {p_1}^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a\xi_t}{\xi_u^*}\right) p_1 + \frac{\partial c^*}{\partial u} - \frac{\partial b^*}{\partial t} = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (32) получаем, что

$$\xi_u^* = \frac{\xi_t}{ka}, \quad \frac{\partial c^*}{\partial u} - \frac{\partial b^*}{\partial t} = -\frac{k_1 a}{\xi_t} \frac{\partial (a\xi_u)}{\partial t}, \tag{38}$$

где $k_1 = \text{const}$. Кроме того, должны выполняться соотношения, которые получаются из условия (20) для векторного поля X^* и лагранжиана g^*

$$\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial \xi_u^*}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial b^*}{\partial u} + k_1 a^2 \frac{\partial \xi_u^*}{\partial t} - b^* \frac{\partial \xi_u^*}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial c^*}{\partial u} - b^* \frac{\partial \xi_u^*}{\partial t} = 0. \qquad (39)$$

Подставим в (39) выражение для ξ_u^* из (38). В результате подстановки имеем, что условие (38) может быть выполнено только при $\xi_t = -k_1 a$ и, следовательно, $\xi_u^* = -1$. Кроме того, с учетом (31), функции a и ξ_u будут зависеть только от переменной t, а с учетом (40), $b^* = -a\xi_u + k_2$, где $k_2 = \text{const}$. Отсюда можно сделать вывод, что закон сохранения вида (33) системы (32) может быть получен из теоремы Нетер для лагранжиана

$$g^* = -\frac{k_1 a^2}{2} {p_1}^2 - (a\xi_u + k_2)p_1 + c^*(t),$$

но при ограничениях на вид функции a.

7. Заключение

Таким образом, использование вариации функционала с фиксированными пределами интегрирования также позволяет в явном виде выписать законы сохранения для некоторых квазиэйлеровых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, как и теорема Э.Нетер для эйлеровых систем. В случае, когда размерность системы $m = 1$, не эйлерова часть уравнения полностью определяется лагранжианом для эйлеровой части. Если же $m > 1$, то выражение (24) определяет условие только на одну из m функций, определяющих не эйлерову часть системы. Остальные $m - 1$ функции могут быть выбраны произвольно.

В заключение автор выражает благодарность профессору К.Г.Гараеву и профессору В.Г.Павлову за замечания по работе.

Список литературы

[1] Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. 228 с.

[2] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям - М.: Мир, 1989. 689 с.

[3] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под. ред. Виноградова А.М. и Красильщика И.С. – М.: Изд - во "Факториал", 1997. 464 с.

[4] Борецкий И.Ф., Павлов В.Г. Теоретико-групповая интерпретация чувствительности гладких динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 1980. – N 2. С. 5 – 10.

[5] Кусюмов А.Н. Характеристические симметрии гладкой динамической системы и анализ отклонения вектора наблюдения при возмущении временной координаты// Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. – 1998. – N 4. С. 1 – 5.