ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2000
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Моделирование динамических систем

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МОДЕЛЕЙ КОНКУРЕНТНОГО ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ В РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ

А. В. Островский

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603600, Нижний Новгород, ГСП-20, просп. Гагарина, д. 23
Факультет вычислительной математики и кибернетики (ВМК)
e-mail: ost@tudm.unn.ac.ru

1. Введение. При исследовании процессов функционирования рыночной экономики одним из основных вопросов является механизм формирования цен на товары, услуги и труд. Существует несколько моделей, рассматривающих динамику ценообразования с различных позиций. Один из подходов к моделированию ценообразования базируется на предположении о том, что в процессе ценообразования превалирует стремление продавцов к максимизации своей прибыли, а покупатели стремятся минимизировать свои расходы. В работах [1, 2] построены модели такого типа, описывающие *чистую конкуренцию* [3], когда на рынке действует достаточно большое количество торговцев, предлагающих абсолютно однородный товар одинакового качества по различным ценам, что дает возможность описать состояние рынка с помощью непрерывного распределения продавцов по ценам, а также непрерывного распределения покупателей по максимально допустимым для них ценам; модели в этом случае имеют вид систем уравнений в частных производных.

В настоящей работе предлагается модель, описывающая динамику цен на рынке, когда N продавцов (обычно N не очень большое) торгуют "почти однородным"товаром, который у разных продавцов может быть разного качества, либо покупатели могут отдавать предпочтение тому или иному продавцу из-за местоположения торговой точки, и т.д.; такая ситуация называется *монополистической конкуренцией* [3]. Чистая конкуренция может рассматриваться как частный случай монополистической. Будем считать, что основным мотивом для ценообразования является стремление торговцев максимизировать свою прибыль, определяемую рыночной ценой, издержками и величиной спроса. Модель представляет собой систему N или $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений; ее исследование будет проводиться для различных функций спроса.

2. Модель. Пусть N торговцев предлагают на рынке "почти однородный товар", спрос на который зависит как от цен, так и от неценовых факторов (качество, местоположение торговой точки, способ хранения товара на складах и т.д.). Через p_i обозначим цену, по которой i-й продавец предлагает свой товар; тогда мы имеем вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_N)$. Будем считать, что спрос на товар характеризуется набором функций конкурентного спроса $C_i\,(p)$. Тогда прибыль i-го торговца от продажи товара равна $\Pi_i\,(p) = (p_i - c_i) \cdot C_i\,(p)$, где $c_i > 0$ – издержки на 1 единицу товара (величина предложения предполагается неограниченной и поэтому в явном виде не присутствует в модели). Будем считать, что каждый продавец стремится максимизировать свою прибыль и, исходя из этого, изменяет цену во времени. Вообще говоря, на принятие решения об изменении цены каждому торговцу требуется некоторое время; поэтому наряду с вектором цен p введем вектор цен $u = (u_1, \ldots, u_N)$, где каждая цена u_i следит за соответствующей ценой p_i с некоторой постоянной времени T_i (проще говоря, u_i – это "сегодняшняя"цена, а p_i – это "завтрашняя"цена), и в дальнейшем в функциях спроса и прибыли вместо p_i будем писать u_i (в случае ненулевых T_i). Величины p_i, u_i, c_i, $C_i\,(p)$ (или $C_i\,(u)$) и T_i неотрицательны по экономическому смыслу ($\forall\, i = \overline{1, N}$).

Относительно функций спроса $C_i\,(u)$ будем предполагать, что они удовлетворяют следующим условиям:

1°. $0 < C_i\,(u) \leq A_i = \mathrm{const}$ (положительность и ограниченность спроса).

2°. Сами функции $C_i\,(u)$ и их первые производные непрерывны по своим переменным, а вторые производные определены в каждой точке первого (положительного) гипероктанта пространства $\mathbf{R}^{2N}$ и кусочно-непрерывны по своим переменным.

3°. $\partial C_i/\partial u_i < 0$ $(\forall\, i = \overline{1,N})$ (*закон спроса* [4]: спрос на товар i-го торговца падает с ростом цены у этого i-го торговца), $\partial C_i/\partial u_k \geq 0$ $(\forall\, i,k = \overline{1,N},\ k \neq i)$ (естественно считать, что при повышении цены конкурентами спрос на товар i-го торговца не убывает, т.е. может произойти "перетекание"покупателей к i-му продавцу от других продавцов).

4°. $C_i\,(u) \to 0$ при $u_i \to \infty$.

5°. $\left|\frac{C_i}{\partial C_i/\partial u_i}\right| \leq M_i = \mathrm{const}$ (ограничение на характер убывания функций спроса: производная $\partial C_i/\partial u_i$ может стремиться к нулю, но не быстрее, чем сама функция $C_i\,(u)$).

Будем считать, что стратегия каждого i-го продавца состоит в изменении цены p_i пропорционально изменению прибыли (т.е. производной $\partial \Pi_i/\partial u_i$) с некоторым постоянным коэффициентом $k_i > 0$ с целью максимизации прибыли. Тогда с учетом времени, необходимого каждому торговцу для принятия очередного решения об изменении цены, а также неотрицательности цен получаем модель в виде системы $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \begin{cases} F_i = k_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial u_i}, & \text{если } p_i > 0 \text{ или } F_i > 0, \\ 0, & \text{если } p_i = 0 \text{ и } F_i \leq 0; \end{cases} \\ T_i \dot{u}_i + u_i &= p_i \\ & \quad (i = \overline{1,N}). \end{aligned} \tag{1}$$

После раскрытия $\partial \Pi_i/\partial u_i$ система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \begin{cases} F_i = k_i \left[C_i\,(u) + \right. \\ \quad \left. +(u_i - c_i)\frac{\partial C_i}{\partial u_i} \right], & \text{если } p_i > 0 \text{ или } F_i > 0, \\ 0, & \text{если } p_i = 0 \text{ и } F_i \leq 0; \end{cases} \\ T_i \dot{u}_i + u_i &= p_i \\ & \quad (i = \overline{1,N}). \end{aligned} \tag{2}$$

Фазовым пространством системы (2) является первый (положительный) гипероктант пространства $\mathbf{R}^{2N}$.

3. О состояниях равновесия системы. Из условий 1° – 3° следует, что при $p_i = 0$ $C_i\,(p)$ – конечное положительное число и $\dot{p}_i > 0$. Следовательно, у системы (2) нет состояний равновесия, в которых хотя бы одна из цен p_i была равна нулю, и все состояния равновесия системы (2) находятся из системы уравнений:

$$p_i = c_i - \frac{C_i\,(p)}{\partial C_i/\partial p_i} \quad (i = \overline{1, N}). \tag{3}$$

Из уравнений (3) и условия 5° следует, что если в системе (2) существуют состояния равновесия, то все они лежат в замкнутом N-мерном параллелепипеде (гиперпараллелепипеде)

$$S_N = \left\{p: \ c_i \le p_i \le c_i + M_i, \ i = \overline{1, N}\right\}.$$

Система (3) – это система уравнений для отыскания неподвижной точки отображения, определяемого формулами:

$$\overline{p}_i = c_i - \frac{C_i\,(p)}{\partial C_i/\partial p_i} \quad (i = \overline{1, N}). \tag{3a}$$

Формулы (3a) в силу условия 5° задают точечное отображение замкнутого параллелепипеда S_N в себя. По теореме Брауэра у отображения (3a) существует по крайней мере одна неподвижная точка. Следовательно, система (2) всегда имеет хотя бы одно состояние равновесия.

Для системы (2) устанавливается следующее достаточное условие единственности состояния равновесия:

Утверждение 1. *Пусть для любых точек $p', p'' \in S_N$ существуют такие точки $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_N$, принадлежащие отрезку $(p',\ p'')$, что*

$$\begin{gathered}\left|\left[\left(\tfrac{\partial C_i}{\partial p_i}\right)^2 - C_i \tfrac{\partial^2 C_i}{\partial (p_i)^2}\right]\cdot\left(\tfrac{\partial C_i}{\partial p_i}\right)^{-2}\right|_{p=\theta_i} + \\ + \sum_{k\ne i}\left|\left[\tfrac{\partial C_k}{\partial p_i}\tfrac{\partial C_k}{\partial p_k} - C_k\tfrac{\partial^2 C_k}{\partial p_i \partial p_k}\right]\cdot\left(\tfrac{\partial C_k}{\partial p_k}\right)^{-2}\right|_{p=\theta_k} < 1 \\ (i = \overline{1, N})\end{gathered} \tag{4}$$

или

$$\begin{gathered}\left|\left(c_i - \tfrac{C_i}{\partial C_i/\partial p_i}\right)^{-1}\right|_{p=p'} \cdot \left|\left(c_i - \tfrac{C_i}{\partial C_i/\partial p_i}\right)^{-1}\right|_{p=p''} \times \\ \times \left|\left[\left(\tfrac{\partial C_i}{\partial p_i}\right)^2 - C_i \tfrac{\partial^2 C_i}{\partial (p_i)^2}\right]\cdot\left(\tfrac{\partial C_i}{\partial p_i}\right)^{-2}\right|_{p=\theta_i} + \\ + \sum_{k\ne i}\left|\left(c_k - \tfrac{C_k}{\partial C_k/\partial p_k}\right)^{-1}\right|_{p=p'} \cdot \left|\left(c_k - \tfrac{C_k}{\partial C_k/\partial p_k}\right)^{-1}\right|_{p=p''} \times \\ \times \left|\left[\tfrac{\partial C_k}{\partial p_i}\tfrac{\partial C_k}{\partial p_k} - C_k\tfrac{\partial^2 C_k}{\partial p_i \partial p_k}\right]\cdot\left(\tfrac{\partial C_k}{\partial p_k}\right)^{-2}\right|_{p=\theta_k} < 1 \\ (i = \overline{1, N}).\end{gathered} \tag{5}$$

Тогда в системе (2) *существует единственное состояние равновесия.*

Доказательство. Условие (4) является условием сжимаемости отображения (3а) в метрике

$$\rho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

и следует из формулы конечных приращений Лагранжа.

Возводя в каждом уравнении системы (3а) обе части в степень -1, получаем систему:

$$(\overline{p}_i)^{-1} = \left(c_i - \frac{C_i}{\partial C_i/\partial p_i}\right)^{-1} \quad (i = \overline{1,N}), \tag{6}$$

задающую отображение замкнутого N-мерного параллелепипеда

$$\widetilde{S}_N = \left\{p^{-1}:\ (c_i + M_i)^{-1} \le (p_i)^{-1} \le (c_i)^{-1},\ i = \overline{1,N}\right\}$$

(через p^{-1} здесь обозначен вектор $\left((p_1)^{-1}, \ldots (p_N)^{-1}\right)$) в себя. Условие (5) является условием сжимаемости отображения (6) в той же метрике $\rho_1(x,y)$ и также следует из формулы конечных приращений Лагранжа (заметим, что если отображение (3а) – несжимающее, то отображение (6) может оказаться сжимающим, и наоборот). Утверждение доказано.

В случае $T_1 = \ldots = T_N = 0$ из системы (2) в силу условий 1°, 3° и 5°, которым удовлетворяют функции $C_i(p)$, получаем:

$$\begin{gathered}
\dot{p}_i\big|_{p_i < c_i} > k_i C_i(c_i) > 0, \\
\dot{p}_i\big|_{p_i > c_i + M_i} = \left\{-k_i \tfrac{\partial C_i}{\partial p_i} \cdot \left[-\tfrac{C_i(p)}{\partial C_i/\partial p_i} - (p_i - c_i)\right]\right\}\Big|_{p_i > c_i + M_i} \le \\
\le \left\{-k_i \tfrac{\partial C_i}{\partial p_i} \cdot [M_i - (p_i - c_i)]\right\}\Big|_{p_i > c_i + M_i} < 0 \\
(i = \overline{1,N}),
\end{gathered} \tag{7}$$

откуда следует, что с течением времени траектории системы входят в замкнутый параллелепипед S_N и остаются в нём (внутри либо на границе). Поэтому вопрос о глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия сводится к вопросу о сходимости траекторий системы (2) из любой точки параллелепипеда S_N к состоянию равновесия. В этом случае устанавливаются следующие достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия системы (2):

Утверждение 2. *Пусть:*

1. *Все* T_i $(i = \overline{1,N})$ *равны* 0.

2. *Вторые производные функций* $C_i(p)$ $(i=\overline{1,N})$ *непрерывны в некоторой замкнутой окрестности параллелепипеда* S_N, *т.е. в некотором замкнутом параллелепипеде*

$$\widehat{S}_N=\left\{p:\ c_i-\delta_i\le p_i\le c_i+M_i+\delta_i,\ i=\overline{1,N}\right\},$$

где $\delta_i>0$ $(i=\overline{1,N})$ – *достаточно малые числа.*

3. *В параллелепипеде* S_N *выполняются условия:*

$$\begin{gathered}2\tfrac{\partial C_i}{\partial p_i}+(p_i-c_i)\tfrac{\partial^2 C_i}{\partial (p_i)^2}<0\ (i=\overline{1,N});\\ \sum\limits_{k\neq i}\left|\tfrac{\partial C_k}{\partial p_i}+(p_k-c_k)\tfrac{\partial^2 C_k}{\partial p_i\partial p_k}\right|+\sum\limits_{k\neq i}\left|\tfrac{\partial C_i}{\partial p_k}+(p_i-c_i)\tfrac{\partial^2 C_i}{\partial p_i\partial p_k}\right|-\\ -2\cdot\left|2\tfrac{\partial C_i}{\partial p_i}+(p_i-c_i)\tfrac{\partial^2 C_i}{\partial (p_i)^2}\right|<0\quad (i,k=\overline{1,N}).\end{gathered}\tag{8}$$

Тогда состояние равновесия системы (2) *единственно и глобально асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим вектор правых частей системы (2) при $T_i=0$ $(i=\overline{1,N})$ через $P=(P_1,\ldots,P_N)$. Рассмотрим функцию $v(p)=P^TP$. Эта функция является неотрицательно определенной в $\widehat{S}_N$, а в случае изолированности всех состояний равновесия системы (2) – положительно определенной в окрестности каждого состояния равновесия. Ее полная производная по времени в силу системы (2) равна [5]

$$\dot v=\dot P^TP+P^T\dot P=(HP)^TP+P^THP=P^T\left(H+H^T\right)P,\tag{9}$$

где H – матрица Якоби системы (2).

Матрица Якоби системы (2) имеет вид $H=\|h_{ik}\|$, где

$$\begin{gathered}h_{ii}=2\tfrac{\partial C_i}{\partial p_i}+(p_i-c_i)\tfrac{\partial^2 C_i}{\partial (p_i)^2},\ h_{ik}=\tfrac{\partial C_i}{\partial p_k}+(p_i-c_i)\tfrac{\partial^2 C_i}{\partial p_i\partial p_k}\\ (i,k=\overline{1,N},\ k\neq i).\end{gathered}$$

Так как по условию вторые производные функций $C_i(p)$ $(i=\overline{1,N})$ непрерывны в параллелепипеде $\widehat{S}_N$, элементы матрицы H непрерывны в $\widehat{S}_N$. Поэтому левые части неравенств (8) также непрерывны в $\widehat{S}_N$, а следовательно, неравенства (8) выполняются в $\widehat{S}_N$ в силу теоремы о сохранении знака непрерывными функциями. Как уже отмечалось, все состояния равновесия системы (2) лежат в S_N (в том числе на границе S_N), поэтому все состояния равновесия лежат строго внутри параллелепипеда $\widehat{S}_N$.

Условие (8) является условием того, что в симметризованной матрице $H+H^T$ диагональные элементы отрицательны и главная диагональ доминирует во всём параллелепипеде $\widehat{S}_N$. Тогда по теореме Гершгорина [6] все собственные числа матрицы $H + H^T$ будут отрицательными во всём параллелепипеде $\widehat{S}_N$, а поскольку собственные числа матрицы являются непрерывными функциями элементов этой матрицы [6], то в силу непрерывности элементов матрицы H по переменным p_i $(i = \overline{1,N})$ в $\widehat{S}_N$ собственные числа матрицы $H + H^T$ непрерывны по переменным p_i $(i = \overline{1,N})$. Следовательно, матрица $H + H^T$ будет отрицательно определенной в $\widehat{S}_N$, и ее собственные значения по теореме Вейерштрасса ограничены сверху в $\widehat{S}_N$ некоторой отрицательной константой. Тогда по теореме Ляпунова в матричной формулировке [6,7] собственные числа матрицы H имеют отрицательные действительные части во всём параллелепипеде $\widehat{S}_N$. Отсюда следует, что: 1) все состояния равновесия системы (2) локально асимптотически устойчивы; 2) у системы (2) может быть только конечное число состояний равновесия (так как в силу системы уравнений (3) и условия 5° все состояния равновесия лежат в замкнутом ограниченном множестве – параллелепипеде S_N (а следовательно, внутри $\widehat{S}_N$)). Следовательно, каждое состояние равновесия является изолированным и обладает некоторой областью притяжения.

Из изолированности состояний равновесия следует, что функция v положительно определена в окрестности каждого состояния равновесия, а в силу (9) производная $\dot{v}$ отрицательно определена в окрестности каждого состояния равновесия системы (2). Следовательно, v является функцией Ляпунова.

Докажем, что одно из состояний равновесия асимптотически устойчиво при любых начальных условиях из $\widehat{S}_N$ (и тогда мы получим глобальную (т.е. при любых начальных условиях из $\mathbf{R}_+^N$) асимптотическую устойчивость, так как с течением времени траектории системы (2) при $T_i = 0$ $(i = \overline{1,N})$ входят во внутренность параллелепипеда $\widehat{S}_N$ и остаются там в силу (7)).

Предположим противное: пусть ни у одного состояния равновесия область притяжения не включает в себя всего параллелепипеда $\widehat{S}_N$. Тогда часть границы области притяжения каждого состояния равновесия лежит внутри $\widehat{S}_N$.

Далее можно провести рассуждения, аналогичные рассуждениям работы [8] для случая асимптотической устойчивости во всём пространстве $\mathbf{R}^N$.

Из [9] известно, что область притяжения асимптотически устойчивого состояния равновесия является открытым множеством, а траектория

$f(\widehat{p},t)$, начавшаяся в момент $t=0$ на границе области притяжения ($\widehat{p}$ – произвольная точка границы области притяжения), остается на этой границе при всех $t>0$. Так как выше отмечалось, что с течением времени траектории системы (2) входят в параллелепипед $\widehat{S}_N$ и остаются внутри него, можно считать, не уменьшая общности, что при $t=0$ траектория $f(\widehat{p},t)$ начинается в точке $\widehat{p}$, лежащей на той части границы области притяжения, которая лежит внутри $\widehat{S}_N$. Следовательно, при $t>0$ траектория $f(\widehat{p},t)$ проходит внутри $\widehat{S}_N$ в области, где выполняется условие

$$(P_1)^2+\ldots+(P_N)^2>l_1,$$

где $l_1>0$ – некоторая константа. Тогда вдоль траектории $f(\widehat{p},t)$ в силу (9) будем иметь:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{f(\widehat{p},t)}<-l_2,$$

где $l_2>0$ – некоторая другая константа.

Интегрируя последнее неравенство по t от 0 до $t>0$, получаем:

$$v(t)-v(0)<-l_2t,$$

что противоречит положительной определенности функции $v(p)$ при достаточно больших значениях t. Следовательно, наше предположение неверно и одно из состояний равновесия устойчиво при любых начальных условиях из параллелепипеда $\widehat{S}_N$. Как уже отмечалось выше, это влечет за собой глобальную асимптотическую устойчивость данного состояния равновесия, а отсюда следует единственность состояния равновесия системы (2). Утверждение доказано.

4. Оптимальность состояний равновесия системы (2) с точки зрения игрового подхода. Систему (2) можно рассматривать как игру N торговцев, в которой функциями выигрыша являются их прибыли. В теории игр важную роль играет понятие устойчивости вектора стратегий (в данном случае – цен) по Нэшу. Поскольку в данной модели каждая цена p_i $(i=\overline{1,N})$ может принимать любое значение на неотрицательной полупрямой, то имеет смысл ввести понятия *локальной* и *глобальной* устойчивости по Нэшу, а также *устойчивости по Нэшу на некотором множестве.*

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что вектор цен $\overline{u}=(\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_N)$ *локально устойчив по Нэшу*, если для каждого i от 1 до N функция $\Pi_i(u)$ достигает локального максимума при $u_i=\overline{u}_i$ при условии $u_k=\overline{u}_k$ $(k=\overline{1,N}$, $k\neq i)$. Если для каждого i от 1 до N этот максимум является глобальным (т.е. максимумом по всем u_i от 0 до $+\infty$), то будем называть вектор $\overline{u}$ *глобально устойчивым по Нэшу.* Если же точка $\overline{u}$ принадлежит некоторому множеству S и для каждого i от 1 до N при $u_i = \overline{u}_i$ достигается максимум функции $\Pi_i\,(u)$ на множестве S при условии $u_k = \overline{u}_k$ ($k = \overline{1,N}$, $k \neq i$), то будем называть вектор $\overline{u}$ *устойчивым по Нэшу на множестве* S.

Состояния равновесия системы (2) являются стационарными точками функций $\Pi_i\,(u)$ ($i = \overline{1,N}$) (если говорить об этих функциях как о функциях одной переменной – любой координаты u_k, когда значения остальных координат вектора u фиксированы) и могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми по Нэшу. Например, если при $N = 2$ функции конкурентного спроса взять в виде

$$C_i\,(u) = A_i \exp\left[-\alpha_i u_i - \beta_{i,3-i}(u_i - u_{3-i})^3\right] \quad (i = 1,2), \tag{10}$$

то при $c_1 + (\alpha_1)^{-1} = c_2 + (\alpha_2)^{-1}$ в системе (2) существует состояние равновесия

$$p_1^* = p_2^* = u_1^* = u_2^* = c_1 + (\alpha_1)^{-1} = c_2 + (\alpha_2)^{-1}, \tag{11}$$

являющееся локально устойчивым по Нэшу, поскольку в этой точке $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial (u_i)^2} < 0$ ($\forall\, i = \overline{1,N}$). При малых α_i и еще более малых $\beta_{i,3-i}$ ($i = 1,2$) вторые производные

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial (u_i)^2} = A_i \exp\left(-\alpha_i u_i\right) \exp\left[\beta_{i,3-i} \cdot (u_i - u_{3-i})^3\right] \times \\
\times \left\{\left[1 - \alpha_i \cdot (u_i - c_i) - 3\beta_{i,3-i} \cdot (u_i - c_i) \cdot (u_i - u_{3-i})^2\right] \times \right. \\
\times \left[-\alpha_i - 3\beta_{i,3-i} \cdot (u_i - u_{3-i})^2\right] - \\
\left. -\alpha_i - 6\beta_{i,3-i} \cdot (u_i - u_{3-i}) \cdot (u_i - c_i) - 3\beta_{i,3-i} \cdot (u_i - u_{3-i})^2\right\} \\
(i = 1,2)
\end{gathered} \tag{12}$$

отрицательны на множестве $\{u:\ u_1 \leq L_1,\ u_2 \leq L_2\}$ (L_1 и L_2 – некоторые константы), поэтому имеет место устойчивость точки (11) по Нэшу на этом множестве. Однако при данных функциях конкурентного спроса может существовать еще одно локально асимптотически устойчивое при $T_1 = T_2 = 0$ состояние равновесия, которое, как показывают численные расчеты, может быть как устойчивым, так и неустойчивым по Нэшу, поскольку от значений параметров β_{ik} зависят не только координаты этого состояния равновесия, но и знаки вторых производных $\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial (u_1)^2}$ и $\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial (u_2)^2}$ в нём. Например, если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$, $c_1 = c_2 = 1$ и $\beta_{21} = 0.1$, то при $\beta_{12} = 0.5$ такое состояние равновесия локально устойчиво по Нэшу (обе вторые производные (12) отрицательны в этой точке), а при $\beta_{12} = 0.12$ оно не является устойчивым по Нэшу даже в локальном смысле (так как в этой точке $\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial (u_1)^2} > 0$, т.е. прибыль 1-го продавца достигает не локального максимума, а локального минимума).

Вообще говоря, состояния равновесия системы (2) не являются и оптимальными по Парето. Например, если при $N = 2$ функции спроса взять в виде (10), то при $c_1 + (\alpha_1)^{-1} = c_2 + (\alpha_2)^{-1}$ состояние равновесия (11) парето-оптимально (это следует из утверждения 3, см. ниже), а другие состояния равновесия (в случае их существования) не являются оптимальными по Парето, так как у каждого из продавцов величина прибыли в этих точках меньше, чем в точке (11) (это показывают численные расчеты при многих значениях параметров). Таким образом, у торговцев имеются основания для вступления в определенные отношения сговора, чтобы достичь парето-оптимального вектора цен или максимизировать суммарную прибыль в целях получения каждым продавцом бóльшей прибыли.

5. Примеры эволюции динамики системы (2) с различными функциями конкурентного спроса и учетом инерционностей. Здесь мы приведем результаты исследования системы (2) с учетом инерционностей, когда функции $C_i(u)$ выбираются в виде:

$$C_i(u) = A_i \exp\left[-\alpha_i u_i - \sum_{k \neq i} f_{ik}(u_i, u_k)\right] \ (A_i > 0,\ \alpha_i > 0) \\ (i, k = \overline{1, N}), \tag{13}$$

где функции $f_{ik}(u_i, u_k)$ (функции, моделирующие попарную конкуренцию продавцов и "перетекание"спроса от i-го продавца к k-му и обратно) ограничены, имеют кусочно-непрерывные вторые производные и удовлетворяют условиям, вытекающим из условия 3° для функций $C_i(u)$:

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial u_i} \geq 0,\ \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_k} \leq 0 \quad (\forall\, i, k = \overline{1, N},\ k \neq i). \tag{14}$$

В случае $f_{ik}(u_i, u_k) = \beta_{ik}(u_i/u_k)^r$ $(r > 0)$ значение каждой функции $C_i(p)$ всегда меньше значения соответствующей величины A_i (параметр A_i имеет здесь смысл максимального спроса (точнее – верхней грани спроса) на товар, предлагаемый i-м торговцем, α_i – коэффициент убывания спроса на товар i-го торговца при росте цены u_i и (гипотетическом) отсутствии конкуренции, а $\beta_{ik} \geq 0$ – параметр конкурентного влияния ("давления") k-го торговца на i-го). При таких функциях спроса, как показывают численные расчеты при многих значениях параметров, при $N = 2$ в системе (2) существует единственное состояние равновесия, которое является глобально асимптотически устойчивым при любых постоянных времени T_1 и T_2 и в зависимости от их значений может быть узлом или фокусом.

Бо́льший интерес вызывает динамика системы с функциями попарной конкуренции вида

$$f_{ik}(u_i, u_k) = f_{ik}(u_i - u_k), \qquad (15)$$

при которых функции $C_i(u)$ могут принимать значения, превосходящие A_i. Мы будем рассматривать случай, когда функции спроса (13)-(15) обладают дополнительными свойствами "симметрии": каждая функция $f_{ik}(u_i - u_k)$ при замене индексов i и k другими индексами r и s ($\forall\, i, k, r, s = \overline{1, N}$, $k \neq i$, $s \neq r$) переходит в соответствующую функцию $f_{rs}(u_r - u_s)$, например:

$$f_{ik}(u_i - u_k) = \beta_{ik} \cdot (u_i - u_k) \quad (\beta_{ik} > 0) \quad (\forall\, i, k = \overline{1, N},\ k \neq i).$$

Рассмотрим случай $N = 2$ (на рынке действуют 2 продавца-конкурента) с функциями конкурентного спроса (13)-(15), обладающими свойствами "симметрии". Через D_{ik} обозначим величины $\partial f_{ik}/\partial u_i$ при $u_i = u_k$ ($i, k = \overline{1, 2}$, $k \neq i$). Тогда можно установить следующее свойство системы (2):

У т в е р ж д е н и е 3. *Пусть при $N = 2$ параметры c_i и α_i удовлетворяют соотношению:*

$$c_1 + (\alpha_1 + D_{12})^{-1} = c_2 + (\alpha_2 + D_{21})^{-1} = K$$

(в частности, $c_1 = c_2$ и $\alpha_1 = \alpha_2$). Пусть функции f_{ik} вида (13)-(15), *обладающие свойствами "симметрии", являются нечетными, а их вторые производные непрерывны в точке*

$$p_1 = p_2 = u_1 = u_2 = K. \qquad (16)$$

Тогда в системе (2) *с функциями конкурентного спроса* (13)-(15) *существует "симметричное"состояние равновесия $(p^*,\ u^*)$, координаты которого определяются равенствами* (16), *причем это состояние равновесия является:*

а) *локально асимптотически устойчивым при любых положительных значениях параметров T_i ($i = 1, 2$) и параметров, входящих в функции f_{ik} ($i, k = \overline{1, N}$, $k \neq i$);*

b) *при $D_{ik} = 0$ ($i, k = 1, 2$; $k \neq i$) – парето-оптимальным и локально устойчивым по Нэшу вектором цен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что точка (16) является состоянием равновесия системы (2), проверяется непосредственной подстановкой точки (16) в правые части системы (2).

Докажем свойство a). Для этого вычислим миноры Гурвица с учетом того обстоятельства, что для функций f_{ik} вида (15)

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial u_i} = \frac{df_{ik}}{d(u_i - u_k)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_k} = -\frac{df_{ik}}{d(u_i - u_k)},$$

а у нечетной функции одной переменной первая производная является четной, а вторая – нечетной функцией (и, следовательно, при $u_i = u_k$ функция f_{ik} и ее вторые производные равны нулю).

Если ввести обозначения

$$B_{i,3-i} = \exp\left[-\alpha_i \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i + D_{i,3-i}} + c_i\right)\right] \cdot (\alpha_i + D_{i,3-i}) \quad (i = 1, 2),$$

то характеристический полином системы в окрестности состояния равновесия (16) равен

$$\begin{gathered} \lambda^4 + \left(\tfrac{1}{T_1} + \tfrac{1}{T_2}\right)\lambda^3 + \left(\tfrac{A_1 B_{12}}{T_1} + \tfrac{A_2 B_{21}}{T_2} + \tfrac{1}{T_1 T_2}\right)\lambda^2 + \\ + \left(\tfrac{A_1 B_{12}}{T_1 T_2} + \tfrac{A_2 B_{21}}{T_1 T_2}\right)\lambda + \tfrac{A_1 A_2 B_{12} B_{21}}{T_1 T_2}. \end{gathered} \tag{17}$$

В силу условий (14) имеем $D_{i,3-i} \geq 0$ $(i = 1, 2)$, поэтому $B_{i,3-i} > 0$ $(i = 1, 2)$, и все коэффициенты полинома (17) положительны. Вычисление миноров Гурвица Δ_l $(l = \overline{1, 3})$ дает:

$$\begin{gathered} \Delta_1 = \tfrac{1}{T_1} + \tfrac{1}{T_2} > 0; \\ \Delta_2 = \tfrac{A_1 B_{12}}{(T_1)^2} + \tfrac{A_2 B_{21}}{(T_2)^2} + \tfrac{1}{T_1 T_2} \cdot \left(\tfrac{1}{T_1} + \tfrac{1}{T_2}\right) > 0; \\ \Delta_3 = \tfrac{1}{T_1 T_2} \cdot \left(\tfrac{A_1 B_{12}}{T_1} - \tfrac{A_2 B_{21}}{T_2}\right)^2 + \tfrac{1}{(T_1)^2 (T_2)^2} \cdot \left(\tfrac{1}{T_1} + \tfrac{1}{T_2}\right) \cdot (A_1 B_{12} + A_2 B_{21}) > 0. \end{gathered}$$

Следовательно, состояние равновесия (16) локально асимптотически устойчиво по критерию Рауса – Гурвица при любых значениях T_1, T_2 и параметров, входящих в функции f_{12} и f_{21}.

Докажем свойство b) при $D_{ik} = 0$ $(i, k = 1, 2,\ k \neq i)$. В этом случае координаты состояния равновесия (16) определяются равенствами (11).

Сравним прибыли торговцев в точке (11) с прибылями в произвольной фиксированной точке $(\tilde{p},\ \tilde{u})$ (полагая, конечно, что во всех этих точках $p_1 = u_1$ и $p_2 = u_2$). Здесь могут быть 2 варианта: $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$ и $\tilde{u}_1 \neq \tilde{u}_2$.

В точке u^* достигается единственный условный максимум обеих функций прибыли $\Pi_1(u)$ и $\Pi_2(u)$ при условии $u_1 = u_2$. Поэтому в случае $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$ сразу получаем $\Pi_i(u^*) > \Pi_i(\tilde{u})$ при $\tilde{u} \neq u^*$ $(i = 1, 2)$.

В случае же $\tilde{u}_1 \neq \tilde{u}_2$ для того продавца, который предлагает товар по более высокой цене (обозначим этого продавца номером k), имеет место неравенство

$$\exp\left[-f_{k,3-k}(\tilde{u}_k - \tilde{u}_{3-k})\right] < 1$$

(в силу свойств функций f_{ik}, в том числе их нечетности по условию), поэтому с учетом результата доказательства случая $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$ имеем

$$\Pi_k\left(\tilde{u}\right) < \Pi_k\left(u\right)\big|_{u_1=u_2} \le \Pi_k\left(u^*\right)$$

(так как при $u_1 = u_2$ значения функций f_{12} и f_{21} равны нулю в силу нечетности этих функций). Отсюда получаем, что $(p^*,\, u^*)$ – парето-оптимальный вектор цен.

Подставляя при $D_{12} = 0$ и $D_{21} = 0$ координаты точки (11) в выражения для вторых производных

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial^2\Pi_i}{\partial(u_i)^2} = A_i \exp\left[-\alpha_i u_i - f_{i,3-i}\left(u_i - u_{3-i}\right)\right] \times \\ \times\left\{-\alpha_i - \tfrac{\partial f_{i,3-i}}{\partial u_i} - \left(u_i - c_i\right)\cdot \tfrac{\partial^2 f_{i,3-i}}{\partial(u_i)^2} + \right. \\ \left. + \left[1 - \alpha_i\cdot\left(u_i - c_i\right) - \left(u_i - c_i\right)\cdot\tfrac{\partial f_{i,3-i}}{\partial u_i}\right]\cdot\left(-\alpha_i - \tfrac{\partial f_{i,3-i}}{\partial u_i}\right)\right\} \\ (i = 1, 2)\end{gathered}$$

и учитывая, что функции f_{12} и f_{21} – нечетные, получаем:

$$\left.\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial(u_i)^2}\right|_{u=u*} = A_i \exp\left(-\alpha_i K\right)\cdot\left(-\alpha_i\right) < 0 \quad (i = 1, 2).$$

Следовательно, вектор цен (11) является локально устойчивым по Нэшу. Утверждение доказано полностью.

З а м е ч а н и е. При условии $c_1 + (\alpha_1)^{-1} = c_2 + (\alpha_2)^{-1}$ точка (11) всегда парето-оптимальна и локально устойчива по Нэшу в силу утверждения 3, но состоянием равновесия системы (2) эта точка является только при $D_{12} = 0$ и $D_{21} = 0$.

Теперь изложим результаты качественно-численного исследования динамики системы (2) с некоторыми функциями спроса вида (13)-(15), обладающими свойствами "симметрии". При этом будем говорить, что имеет место *линейное "перетекание"спроса*, если $f_{ik}\left(u_i, u_k\right) = u_i - u_k$ (т.е. в случае линейности функций f_{ik} по своим переменным), и *нелинейное "перетекание"спроса* в противном случае. Интегрирование системы (2) проводилось при $N = 2$ методом Мерсона с автоматическим выбором шага и погрешностью $\varepsilon = 10^{-11}$ на каждом шаге.

1. Пусть $f_{ik}(u_i, u_k) = \beta_{ik} \cdot (u_i - u_k)$ $(i, k = \overline{1, N},\ k \neq i)$ (линейное "перетекание"спроса); точнее:

$$f_{ik}(u_i, u_k) = \begin{cases} \beta_{ik} \cdot (u_i - u_k) & \text{при } |u_i - u_k| \leq \xi = \text{const}; \\ \beta_{ik} \cdot [2\xi \operatorname{sgn}(u_i - u_k) - \\ \qquad -\xi^2 (u_i - u_k)^{-1}] & \text{при } |u_i - u_k| > \xi \end{cases}$$

$$(i, k = \overline{1, N},\ k \neq i)$$

(каждая функция f_{ik} доопределена по непрерывности вместе с первыми производными из условия 1° ограниченности спроса; ξ – одна и та же константа для всех i и k от 1 до N, $k \neq i$). В этом случае, как показывают численные расчеты при многих значениях параметров, система (2) имеет единственное состояние равновесия (p^*, u^*), координаты которого в случае $|u_i^* - u_k^*| \leq \xi$ $(i, k = \overline{1, N},\ k \neq i)$ вычисляются аналитически по формуле:

$$p_i^* = u_i^* = c_i + \left(\alpha_i + \sum_{k \neq i} \beta_{ik}\right)^{-1} \quad (i, k = \overline{1, N}). \tag{18}$$

Это состояние равновесия, как показывает численное исследование, при $N = 2$ глобально асимптотически устойчиво при любых значениях постоянных времени T_1 и T_2 (при $c_1 + (\alpha_1 + \beta_{12})^{-1} = c_2 + (\alpha_2 + \beta_{21})^{-1}$ локальная асимптотическая устойчивость состояния равновесия (18) следует из утверждения 3) и в зависимости от их значений может быть узлом или фокусом. При произвольном N и $T_1 = \ldots = T_N = 0$ локальная асимптотическая устойчивость состояния равновесия (18) в случае $|p_i^* - p_k^*| < \xi$ $(i, k = \overline{1, N},\ k \neq i)$ устанавливается аналитически непосредственно из вида системы (2), которая в окрестности состояния равновесия (18) принимает вид:

$$\dot{p}_i = k_i A_i \exp(\cdot) \cdot \left[1 + (p_i - c_i) \cdot (-\alpha_i - \sum_{k \neq i} \beta_{ik})\right]$$
$$(i, k = \overline{1, N});$$

в этой системе в каждом i-м уравнении квадратная скобка является монотонно убывающей линейной функцией только от p_i, а знак $\dot{p}_i$ совпадает со знаком этой квадратной скобки.

2. Пусть $f_{ik}(u_i, u_k) = \beta_{ik} \cdot \operatorname{th}(u_i - u_k)$ $(i, k = \overline{1, N},\ k \neq i)$ (слабое нелинейное "перетекание"спроса). В этом случае при $N = 2$ и $c_1 + (\alpha_1 + \beta_{12})^{-1} = c_2 + (\alpha_2 + \beta_{21})^{-1}$ в системе (2) существует состояние равновесия (16). При увеличении разности постоянных времени в системе может возникнуть полуустойчивое периодическое движение конечной амплитуды, расщепляю-

щееся после бифуркации на устойчивый предельный цикл (жесткое возникновение автоколебаний) и седловой цикл, который при дальнейшем увеличении $|T_1 - T_2|$ неограниченно сближается с состоянием равновесия (16), но никогда с ним не сольется, так как состояние равновесия (16) всегда локально асимптотически устойчиво в силу утверждения 3. Такая ситуация может возникнуть не только в четырехмерной, но и в трехмерной системе, когда одна из двух постоянных времени T_1 или T_2 равна 0 (т.е. когда один из продавцов принимает решение об изменении цены мгновенно), если постепенно увеличивать значение другой постоянной времени.

Таким образом, даже в случае чистой конкуренции при некотором достаточно слабом "перетекании"спроса в данной модели возможно резкое возникновение колебаний цены с большой амплитудой, но есть малая вероятность все-таки стабилизировать цену путем выбора подходящих начальных условий (это говорит о том, что во избежание нежелательных колебаний цены продавцам, если они принимают решения достаточно долго, необходимо договариваться между собой о ценах).

3. Пусть $f_{ik}(u_i, u_k) = \beta_{ik} \cdot (u_i - u_k)^3$ $(i, k = \overline{1, N},\ k \neq i)$ (сильное нелинейное "перетекание"спроса); точнее:

$$f_{ik}(u_i, u_k) = \begin{cases} \beta_{ik} \cdot (u_i - u_k)^3 & \text{при } |u_i - u_k| \leq \xi = \text{const}; \\ \beta_{ik} \cdot \big[2\xi^3 \operatorname{sgn}(u_i - u_k) - & \\ \qquad -3\xi^4 (u_i - u_k)^{-1}\big] & \text{при } |u_i - u_k| > \xi \end{cases} \tag{19}$$

$$(i, k = \overline{1, N},\ k \neq i)$$

(как и при линейном "перетекании", каждая функция f_{ik} доопределена по непрерывности вместе с первыми производными из условия 1° ограниченности спроса, а ξ – одна и та же константа для всех i и k от 1 до N, $k \neq i$). В этом случае при $N = 2$ и $c_1 + (\alpha_1)^{-1} = c_2 + (\alpha_2)^{-1}$ в системе (2) существует "симметричное"состояние равновесия (11) (обозначим его через O_1), являющееся по утверждению 3 локально асимптотически устойчивым, а также парето-оптимальным и локально устойчивым по Нэшу вектором цен. Однако при $\beta_{12} \neq \beta_{21}$ (монополистическая конкуренция) в системе возможно возникновение еще двух состояний равновесия (из полуустойчивого равновесия); одно из них (обозначим его O_2) при постепенном увеличении β_{12} бифурцирует из устойчивого $O^{4,0}$ в седловое $O^{2,2}$ и затем вновь в устойчивое $O^{4,0}$, другое равновесие (обозначим его O_3) всегда остается седлом $O^{3,1}$. Вообще же координата $p_1 = u_1$ состояния равновесия системы (2) с данными функциями спроса при не очень малом ξ ищется из уравнения

$$\begin{gathered} G(p_1) = 1 - \alpha_2\left[p_1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{3\beta_{12}(p_1-c_1)} - \tfrac{\alpha_1}{3\beta_{12}}} - c_2\right] - \\ -3\beta_{21}\left[p_1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{3\beta_{12}(p_1-c_1)} - \tfrac{\alpha_1}{3\beta_{12}}} - c_2\right]\left[\tfrac{1}{3\beta_{12}(p_1-c_1)} - \tfrac{\alpha_1}{3\beta_{12}}\right] = 0; \end{gathered} \tag{20}$$

это уравнение может иметь (в зависимости от β_{12} и β_{21}) либо один корень, либо два корня, один из которых – двукратный (точка касания графика функции $G(p_1)$ с осью p_1), либо три различных корня. Тогда координата $p_2 = u_2$ состояния равновесия связана с координатой $p_1 = u_1$ явным однозначным соотношением

$$p_2 = p_1 \pm \sqrt{\frac{1}{3\beta_{12}(p_1-c_1)} - \frac{\alpha_1}{3\beta_{12}}}$$

(знак в операции "$\pm$"выбирается таким же, каким он брался при нахождении конкретного корня уравнения (20)). Таким образом, при данных функциях конкурентного спроса в системе может быть как моностационарность, так и мультистационарность (мультистабильность).

Исследование фазового портрета системы проводилось при следующих значениях параметров: $k_1A_1 = k_2A_2 = 10$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$, $c_1 = c_2 = 1$; $T_1 = 10$, $T_2 = 5$ (значения постоянных времени, сильно удаленные от нуля и поэтому качественно отражающие ситуацию, когда продавцы обдумывают свои стратегии достаточно долго, причем на принятие решения разным продавцам требуется разное время); $\beta_{21} = 0.1$. Значение параметра β_{12} варьировалось.

При постепенном увеличении параметра β_{12} (этот параметр имеет смысл конкурентного "давления"2-го торговца на 1-го, выражающегося в резкости изменения спроса на товар 1-го торговца при разнице цен у 1-го и 2-го торговцев) в системе происходит каскад бифуркаций удвоения периода, и при $\beta_{12} = (\beta_{12})_\infty \approx 0.4327$ возникает хаотический аттрактор. Вид этого аттрактора при $\beta_{12} = 0.5$ (значение из области хаоса, достаточно удаленное от $(\beta_{12})_\infty$) в проекции на плоскость (p_2, p_1) и во временно́й развертке $p_1(t)$ представлен на рис. 1 (траектории частично проходят по гиперплоскостям $p_1 = 0$ и $p_2 = 0$). Максимальный ляпуновский показатель, вычисленный на ЭВМ при $\beta_{12} = 0.5$, приближенно равен 0.04.

Дальнейшее увеличение значения β_{12} приводит вначале к переходу устойчивости от хаоса к периодическим движениям различной кратности, потом вновь возникает хаос, а затем происходит стабилизация цены – траектории движутся к устойчивому состоянию равновесия O_2 (один конкурент

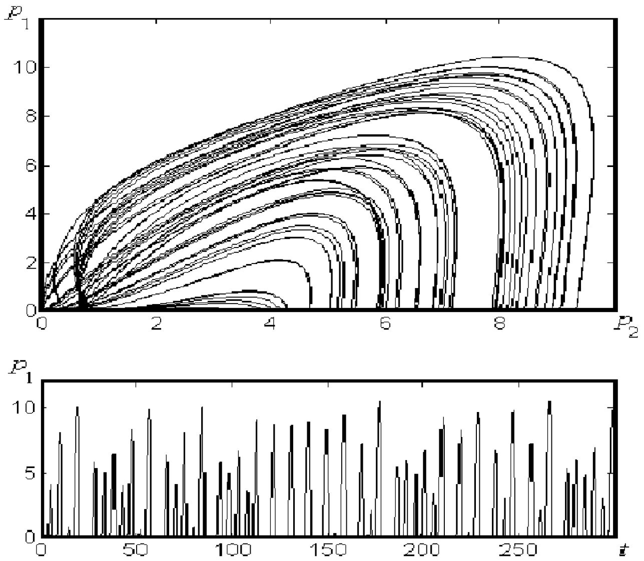

Рис. 1:

"победил"другого), которое соответствует более низкому уровню цен (по сравнению с O_1) и не является парето-оптимальным для продавцов.

Как показывает численное интегрирование системы в обратном времени, часть области притяжения устойчивого состояния равновесия (фокуса) O_1, ограниченная сепаратрисным многообразием S_3^+ седла O_3 и образованная траекториями системы при не очень больших значениях обратного времени, имеет вид узкой трубки с "вершиной"в седле O_3. Эта трубка при $\beta_{12} \to +\infty$ неограниченно сжимается в каждом сечении. Кроме того, при увеличении β_{12} седло O_3 приближается к состоянию равновесия O_1, но не сольется с ним ни при каком конечном β_{12}, так как состояние равновесия O_1 всегда локально асимптотически устойчиво в силу утверждения 3. Таким образом, увеличение конкурентного параметра β_{12} ведет к неограниченному сжатию области притяжения устойчивого состояния равновесия O_1 и делает практически достоверным приход траекторий из любой начальной точки к предельному циклу, хаосу или устойчивому состоянию равновесия O_2 (в зависимости от значения β_{12}).

На основании сказанного можно сделать следующие выводы для данной модели:

1). Постепенное усиление конкурентного "давления"одного продавца на другого при функциях спроса (13), (19) может привести к стабилизации цен (правда, на неоптимальном для продавцов низком уровне цен), но при этом придется пройти через хаотические колебания цен.

2). При функциях конкурентного спроса (13), (19) продавцам приходится решать проблему вступления в некоторый сговор с целью максимизации прибыли.

6. О влиянии потолков цен на динамику ценообразования в модели. В рамках данной модели государство может управлять колебаниями и хаосом в ценообразовании, вводя, например, нижний $p_{\min}$ и верхний $p_{\max}$ потолки цен (обычно нижний потолок цен вводится для поддержки отечественного товаропроизводителя, а верхний – в целях обеспечения возможности покупки товара малоимущими слоями населения [4]). В этом случае модель (1) немного изменяется и приобретает вид:

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_i &= \begin{cases} F_i = k_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial u_i}, & \text{если } p_{\min} < p_i < p_{\max} \\ & \quad \text{или} \quad (p_i = p_{\min} \quad \text{и} \quad F_i \geq 0) \\ & \quad \text{или} \quad (p_i = p_{\max} \quad \text{и} \quad F_i \leq 0), \\ 0, & \text{если } (p_i = p_{\min} \quad \text{и} \quad F_i < 0) \\ & \quad \text{или} \quad (p_i = p_{\max} \quad \text{и} \quad F_i > 0); \end{cases} \\
T_i \dot{u}_i + u_i &= p_i \\
& \quad (i = \overline{1, N}).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Как показывают численные расчеты при многих значениях параметров, при $N = 2$ в системе (21) с функциями конкурентного спроса (13), (19) при увеличении $p_{\min}$ или уменьшении $p_{\max}$ происходит переход от хаоса через серию обратных бифуркаций удвоения периода к стабилизации цены. Здесь в зависимости от начальных условий возможны 2 случая:

1). У обоих продавцов цена устанавливается на уровне верхнего потолка цен.

2). У одного из продавцов (а именно у того i-го продавца, у которого спрос изменяется более резко при изменении разницы цен, т.е. у кого больше коэффициент $\beta_{i,3-i}$ в функции спроса) цена устанавливается на уровне нижнего потолка цен (в результате чего этот продавец в случае $A_1 = A_2$ получает бóльшую прибыль, чем конкурент, причем в зависимости от величин потолков цен эта прибыль может оказаться как больше, так и меньше, чем в 1-м случае), а у другого – на уровне, несколько превышающем нижний потолок цен (и прибыль этого продавца оказывается меньшей, чем в 1-м случае).

7. Заключение. Итак, рассмотрены несколько примеров систем, принадлежащих классу систем вида (1) или (2) и моделирующих динамику формирования рыночных цен в условиях монополистической конкуренции, когда потребительский спрос может "перетекать"от одного продавца к другому. В зависимости от вида (в том числе от резкости) этого "перетекания"в модели наблюдается разнообразное поведение траекторий системы: стабилизация, автоколебания, хаос. При возникновении хаоса можно ввести в модель государственное управление в виде установления ценовых потолков, постепенно приводящее к стабилизации цен через каскад обратных бифуркаций удвоения периода автоколебаний.

Автор выражает искреннюю признательность профессору Ю. И. Неймарку за постановку задачи и научное руководство.

Список литературы

1. *Короновский А. А.* О механизмах установления рыночной цены // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. N 4 – 5. С. 92 – 98.

2. *Ремпен И. С., Короновский А. А.* Нелинейная модель взаимодействия продавцов и потребителей // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. N 5. С. 80 – 87.

3. *Казаков А. П., Минаева Н. В.* Экономика. М.: Изд-во ЦИПКК АП, 1996.

4. *Макконнелл К. Р., Брю С. Л.* Экономикс: принципы, проблемы и политика. В 2-х тт. Пер. с англ. М.: Республика, 1992.

5. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1970.

6. *Ланкастер П.* Теория матриц. Пер. с англ. М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1978.

7. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.-Л., Гостехиздат, 1950.

8. *Красовский Н. Н.* Об устойчивости в целом решения нелинейной системы дифференциальных уравнений // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18. Вып. 6. С. 735 – 737.

9. *Еругин Н. П.* Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения // Прикладная математика и механика. 1951. Т. 15. Вып. 2. С. 227 – 236.