ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2000
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

О ДИСКРЕТНЫХ СИММЕТРИЯХ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

З.Н.Хакимова

Россия, 190008 Санкт-Петербург, пр.Римского-Корсакова 65/11 кв.18
Российский государственный педагогический
университет им. А.И.Герцена,
кафедра математического анализа

Рассматриваются дискретные группы преобразований (ДГП), допускаемые классом уравнений

$$y'' = Ax^k y^l (y')^m (xy' - y)^n, \tag{1}$$

каждый элемент которого однозначно определяется вектором параметров $(k\ l\ m\ n\,|\,A)$.

Уравнения вида (1) изучались различными исследователями, наиболее полные результаты по интегрируемости в замкнутом аналитическом виде приведены в работах В.Ф.Зайцева и А.Д.Полянина (см., например, [4]). Подкласс (1) с $n = 0$ хорошо известен как класс обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера, допускамые им дискретные метагруппы преобразований подробно изучены В.Ф.Зайцевым [3]. Однако для общего случая ($n \neq 0$) дискретные симметрии никем не исследовались.

1. О группе 48-го порядка

Теорема 1. Класс уравнений (1) допускает дискретную группу преобразований 48-го порядка.

Доказательство. Легко видеть, что класс уравнений (1) инвариантен относительно дискретных преобразований $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{u}$, являющихся образующими дискретных циклических метагрупп 2-го порядка:

$$\mathfrak{r} : (k\ l\ m\ n \,|\, A) \longleftrightarrow \big(l\ k\ 3{-}m{-}n\ n \,|\, (-1)^{n+1}A\big), \tag{2}$$
$$x = u,\ y = t,\ y' = \frac{1}{\dot u},\ \mathfrak{r}^2 = E;$$
$$\mathfrak{s} : (k\ l\ m\ n \,|\, A) \longleftrightarrow (-k{-}l{-}3\ l\ n\ m \,|\, A), \tag{3}$$
$$x = \frac{1}{t},\ y = \frac{u}{t},\ y' = u - t\dot u,\ \mathfrak{s}^2 = E;$$
$$\mathfrak{z} : (k\ l\ m\ n \,|\, A) \longleftrightarrow \Big(-m\ \ -n\ \ -k\ \ -l\ \Big|\ \frac{1}{A}\Big), \tag{4}$$
$$x = \dot u,\ y = t\dot u - u,\ y' = t,\ \mathfrak{z}^2 = E;$$

Точечные преобразования $\mathfrak{r}$ (годографа) и $\mathfrak{s}$, а также касательное преобразование $\mathfrak{z}$ (Лежандра) не содержат неопределенных параметров – параметров класса уравнений (1), поэтому метагруппы преобразований (2)-(4) ассоциативны и, следовательно, являются классическими дискретными группами преобразований.

Пусть $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}$, $\mathfrak{b} = (\mathfrak{rsz})^2\mathfrak{s} = \mathfrak{szrzs}$, $\mathfrak{c} = (\mathfrak{rsz})^2\mathfrak{rsrz} = \mathfrak{szrzs}\cdot\mathfrak{rsz}$ (преобразования в композициях выполняются последовательно слева направо). Можно показать, что класс уравнений (1) допускает дискретную группу преобразований $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{G} = \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{S}_4$ 48-го порядка с тремя образующими $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, определяемую кодом [6]

$$\mathfrak{G} : \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} : \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{ac})^2 = (\mathfrak{ab})^3 = (\mathfrak{bc})^4 = E\},$$
$$(\mathfrak{abc})^6 = E, (\mathfrak{r} = \mathfrak{a}, \mathfrak{s} = \mathfrak{cbc}, \mathfrak{z} = \mathfrak{cbcabc})$$

и имеющую граф, приведенный в [1] (рис. 1).

В монографии [1] показано, что группа $\mathfrak{G}$ изоморфна группе $\mathfrak{H}$ с двумя образующими $\mathfrak{f} = \mathfrak{abc}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{bc}$ и кодом

$$\mathfrak{H} : \big\{\mathfrak{f}, \mathfrak{g};\ \mathfrak{f}^6 = \mathfrak{g}^4 = (\mathfrak{fg})^4 = (\mathfrak{fg}^{-1})^2 = E\big\},$$

являющимися минимальным кодом дискретной группы преобразований класса уравнений (1) ($\mathfrak{f} = \mathfrak{sz}, \mathfrak{g} = \mathfrak{rsz}; \mathfrak{r} = \mathfrak{fg}^{-1}, \mathfrak{s} = \mathfrak{f}^2(\mathfrak{fg})^2\mathfrak{fg}^{-1}, \mathfrak{z} = \mathfrak{f}^2(\mathfrak{fg})^2\mathfrak{g}$). Граф группы $\mathfrak{H}$ тоже приведен в монографии [1].

Замечание. Ранее указывались частные случаи (2)-(4), например, в [4].

Очевидно, всякое уравнение класса (1) связано с 47-ю другими уравнениями этого же класса, и из разрешимости какого-нибудь уравнения следует разрешимость всех остальных уравнений, связанных с исходным известными преобразованиями (2)-(4). Например, при $n = 0$ орбита группы преобразований содержит несколько обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера. К настоящему времени известно 99 разрешимых случаев этих уравнений, которые в силу преобразований (2)-(4) порождают новые интегрируемые уравнения класса (1).

Теорема 1 обобщается на случай произвольных функций в правой части (1).

Теорема 2. Класс уравнений

$$y'' = f(x)g(y)h(y')p(xy' - y) \tag{1'}$$

допускает дискретную группу преобразований 48 порядка.

Замечание. Легко видеть, что теоремы 1 и 2 верны для произвольного числа слагаемых в правых частях уравнений.

2. Интегрирование инвариантов

Преобразования $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{z}$ в классе уравнений (1) имеют инварианты, из которых $\mathfrak{r}$- и $\mathfrak{s}$-инварианты проинтегрированы. Допускают интегрирование также их обобщения с произвольными функциями: $\mathfrak{r}$-инвариант

$$y'' = f(xy)g\left(\tfrac{xy'-y}{y'^{1/2}}\right)y'^{3/2} \xrightarrow{\mathbf{K}_\mathfrak{r}} 2\dot V = f(\theta)g(V), \tag{5}$$

$$\theta = xy, \quad V = \frac{xy'-y}{y'^{1/2}}, \quad \dot V = \frac{1}{2}y'^{-3/2}y''$$

и $\mathfrak{s}$-инвариант

$$y'' = x^{3/2}f(x^{-1/2}y)g\left[(xy'-y)y'\right] \xrightarrow{\mathbf{K}_\mathfrak{s}} \dot V = 2f(\theta)g(V), \tag{6}$$

$$\theta = x^{-1/2}y, \quad V = (xy'-y)y', \quad \dot V = 2x^{3/2}y''.$$

$\mathfrak{r}$- и $\mathfrak{s}$-инварианты при $g \equiv 1$ и произвольной f были проинтегрированы ранее (см. соответственно [2, 5]).

В (5) и (6) в качестве конкомитантов взяты инварианты $\mathfrak{r}$- и $\mathfrak{s}$-симметрий, которые содержатся в самом уравнении; при этом преобразованное уравнение оказывается проще, чем при выборе других функций. Например, если в (6) при $g \equiv 1$ взять другой интегрирующий конкомитант [2], то преобразованное уравнение будет менее “каноническим”, чем в (6):

$$y'' = f(xy)y'^{3/2} \xrightarrow[V=\frac{xy'-y}{(xyy')^{1/2}}]{\theta=\frac{1}{2}\ln xy} \dot V + V = e^\theta f\left(e^{2\theta}\right),$$

Очевидно, что инвариантными будут также уравнения типа (5) и (6) с любым числом слагаемых в правой части

$$y'' = \sum_{i=0}^{s} f_i(xy)g_i\left(\tfrac{xy'-y}{y'^{1/2}}\right)y'^{3/2} \xrightarrow{\mathbf{K}_\mathfrak{r}} 2\dot V = f_i(\theta)g_i(V), \tag{7}$$

$$y'' = \sum_{i=0}^{s} x^{3/2}f_i(x^{-1/2}y)g_i\left[(xy'-y)y'\right] \xrightarrow{\mathbf{K}_\mathfrak{s}} \dot V = 2f_i(\theta)g_i(V), \tag{8}$$

Частные случаи (7) и (8) при некоторых конкретных функциях f_i и g_i рассмотрены, например, в [2, 4].

Интегрирование в замкнутом виде допускает не только $\mathfrak{r}$-инвариант, но и $\mathfrak{r}$-инвариантное семейство с произвольными функциями

$$xyy'' = f(x^n y^m)g\left(\tfrac{xy'-y}{y'^{\frac{n}{m+n}}}\right)y'^{\frac{m+2n}{m+n}} \xrightarrow{\mathbf{K}} (m+n)\theta\dot V = f(\theta)g(V),$$

$$\theta = x^n y^m, \quad V = \frac{xy' - y}{y'^{\frac{n}{m+n}}}.$$

Случаи $f(\xi) = \xi$ при произвольной g и $g(\xi) = \xi^k$ при произвольной f рассмотрены А.Д.Поляниным [4], но они были проинтегрированы с помощью других конкомитантов, поэтому преобразованные уравнения оказались существенно сложнее.

Список литературы

[1] Зайцев В.Ф., Кормилицына Т.В. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений, ч.2. – Л.: ЛГПИ, деп. в ВИНИТИ №3720-85Деп. от 29.05.85. – 150 с.

[2] Аржанникова И.Ю., Зайцев В.Ф., Малых А.А., Попов В.В., Перес Лопес А., Фалилеева Е.Г., Флегонтов А.В., Хакимова З.Н. Современный групповой анализ: методы и приложения. Дискретно-групповой анализ. Препринт №107. – Л., ЛИИАН, 1989. – 58 с.

[3] Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений – Л.: ЛИИАН, 1991. – 240 с.

[4] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. – М.: "Наука", 1993. – 464 с.

[5] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: "Наука", 1976. – 576 с.

[6] Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. – М.: "Наука", 1980. – 240 с.