ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2001
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

ФОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ДОПУСКАЕМЫЕ ОБОБЩЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ, И ПРИНЦИП ФАКТОРИЗАЦИИ

Л.В. ЛИНЧУК

Российский Государственный Педагогический
Университет им. А.И.Герцена
Санкт-Петербург
E-mail: lidiya@p110.f289.n5030.z2.fidonet.org

Исследования, проведенные в последние годы [7, 12], показали, что используя формальный подход, мы можем значительно расширить классы симметрий, изучаемые в групповом анализе. При этом выявляется групповая природа уравнений, разрешимых в замкнутой форме, но не интегрируемых классическим методом С.Ли [12]. Введение формального оператора позволяет сформулировать теоремы, лежащие в русле общих идей декомпозиции моделей, одна из которых состоит в "погружении изучаемого объекта в класс, где определено понятие об изоморфизме объектов, и в отыскании среди объектов, изоморфных данному, такого, который является "представлением" исходного объекта с помощью семейства более простых в некотором смысле объектов. Примером "представления", о котором здесь идет речь, является ситуация, когда система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка посредством диффеоморфизма сведена к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям, каждое из которых первого порядка" [16].

Легко усмотреть аналог декомпозиции в групповом анализе – как известно, любое уравнение, допускающее точечный оператор, может быть записано в инвариантах этого оператора. Таким образом, во-первых, понижается порядок уравнения, а во-вторых, исходное уравнение представляется в виде "матрешки" двух более простых уравнений, одно из которых "вложено" в другое. Такое представление является обобщением факторизации линейных дифференциальных операторов.

В настоящей статье основные идеи теории формальных операторов распространяются на пространство трех переменных x, y, w, и на ее основе доказывается фундаментальный принцип симметрийного анализа обобщенных дифференциальных уравнений – принцип факторизации. Под **обобщенным дифференциальным уравнением** мы будем понимать недоопределенное дифференциальное уравнение, имеющее дополнительную функциональную или дифференциальную связь между неизвестными функциями. В частности этот класс включает функционально-дифференциальные уравнения, поэтому предложенный в статье подход может быть применен для построения факторсистем или поиска точных решений указанных уравнений.

Наличие третьей переменной вносит радикальные изменения в общую идеологию, поэтому недостаточно привести лишь основные определения и известные ранее теоремы. Все определяемые понятия хорошо известны в групповом анализе [3, 4, 14], но введение в качестве основы изложения теории формальных операторов потребовало переформулировки соответствующих определений.

Следуя практике, принятой при изложении группового анализа [1, 2, 5, 9, 13–15], мы не будем специально определять свойства функций, рядов и операторов, используемых в промежуточных выкладках и доказательствах теорем. Мы будем считать, если не оговорено противное, все функции достаточно гладкими (при необходимости – бесконечно-дифференцируемыми), а операторы – определенными на тех пространствах, на которых они действуют. Это вполне оправдано, если учесть, что исходными положениями и конечными результатами в групповом анализе являются точные аналитические формулы, проверяемые прямой подстановкой ("решение предъявляется").

В ходе доказательств ряды возникают лишь в качестве **представления** нелокальных (интегральных) переменных. Так как представляемый рядами объект определен и существует, исследование сходимости последнего не представляется необходимым. Так, например, переменная

$$D_x^{-1} y = \int y \, dx$$

представима (формальным) рядом [6]

$$\int y \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k)},$$

где D_x – оператор полной производной – определяется формальным рядом

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{\infty} w^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial w^{(i)}}.$$

Естественно, если в выражении, на которое действует оператор D_x, порядок производных ограничен, ряд "обрывается" и становится конечной суммой.

1. Основные понятия и определения

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ переменных x, y, w. Следуя Н.Х.Ибрагимову [13], введем дополнительные переменные

$$y', w', \ldots, y^{(n)}, w^{(n)}, \ldots,$$

сохраняя дифференциальные соотношения

$$\begin{gathered} y' = \frac{dy(x)}{dx}, \quad w' = \frac{dw(x)}{dx}, \\ y^{(n+1)} = \frac{dy^{(n)}(x)}{dx}, \quad w^{(n+1)} = \frac{dw^{(n)}(x)}{dx}, \quad n \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{1}$$

для любых функций $y = y(x)$, $w = w(x)$. Пространство переменных

$$\mathbf{Z}_n = \left(x, y, w, y', w', \ldots, y^{(n)}, w^{(n)} \right),$$

$n \in \mathbb{N}$ называют n-ым продолжением пространства $\mathbf{Z} = (x, y, w)$ или ***продолженным пространством***, а

$$\mathbf{Z}_\infty = (x, y, w, y', w', y'', w'', \ldots)$$

– бесконечным продолжением пространства $\mathbf{Z}$ или ***бесконечно продолженным пространством***. Можно считать, что $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}$. Заметим, что элемент пространства $\mathbf{Z}_n$ является точкой в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+3}$ $(n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\})$.

Обобщенное дифференциальное уравнение n-го порядка ($n \in \mathbb{N}$), разрешенное относительно одной из старших производных,

$$y^{(n)} = F(x, y(x), w(x), y'(x), w'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), w^{(n-1)}(x), w^{(n)}(x)),$$

где $F\colon \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$, можно рассматривать как соотношение для переменных из продолженного пространства $\mathbf{Z}_n$

$$y^{(n)} = F(x, y, w, y', w', \ldots, y^{(n-1)}, w^{(n-1)}, w^{(n)}). \tag{2}$$

Пусть X – линейный оператор вида

$$X = \Phi(x, y, w, y', w', \ldots)\frac{\partial}{\partial y} + \Psi(x, y, w, y', w', \ldots)\frac{\partial}{\partial w}, \tag{3}$$

где функции $\Phi, \Psi\colon \mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ – ***координаты*** канонического оператора. Класс операторов вида (3), в частности, включает операторы, описывающие классические точечные симметрии – точечные операторы в канонической форме

$$X = [\eta_1(x, y, w) - \xi(x, y, w)y']\,\frac{\partial}{\partial y} + [\eta_2(x, y, w) - \xi(x, y, w)w']\,\frac{\partial}{\partial w},$$

а также операторы, координаты которых содержат нелокальные переменные вида $\int \zeta\, dx$, $\zeta \in \mathbf{Z}_k$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (здесь и далее без особых оговорок под интегралом подразумевается полный интеграл, т.е. $\int \zeta\, dx = D_x^{-1}[\zeta]$), например, экспоненциальные нелокальные операторы (ЭНО) вида

$$X = \exp\left(\int \zeta_1\, dx\right)\frac{\partial}{\partial y} + \exp\left(\int \zeta_2\, dx\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

где $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbf{Z}_k$ $(k \in \{0\} \cup \mathbb{N})$.

Действие формального оператора (3) на отображение $G\colon \mathbf{Z}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, определяется с помощью формулы

$$X[G] = \Phi(x, y, w, y', w', \ldots)\frac{\partial G}{\partial y} + \Psi(x, y, w, y', w', \ldots)\frac{\partial G}{\partial w}.$$

Если G: $\mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, оператор (3) необходимо продолжить до переменных $y^{(k)}$, $w^{(k)}$, учитывая соотношения (1).

***Определение* 1**. Оператор

$$\underset{k}{X} = \sum_{i=0}^{k} \left[D_x^i(\Phi) \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} + D_x^i(\Psi) \frac{\partial}{\partial w^{(i)}} \right], \tag{4}$$

где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, называется k-ым ***продолжением*** оператора (3). ***Действие*** оператора (3) на отображение G: $\mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой

$$X[G] = \underset{k}{X}[G] = \sum_{i=0}^{k} \left[D_x^i(\Phi) \frac{\partial G}{\partial y^{(i)}} + D_x^i(\Psi) \frac{\partial G}{\partial w^{(i)}} \right].$$

Определение* 2**. Оператор (3) ***допускается уравнением (2), если

$$\underset{n}{X}\left[y^{(n)} - F(x, y, w, y', w', \ldots, y^{(n-1)}, w^{(n-1)}, w^{(n)})\right]\Big|_{[y^{(n)}=F]} = 0. \tag{5}$$

Символ $\Big|_{[y^{(n)}=F]}$ означает, что равенство (5) выполняется в силу уравнения (2) и всех его дифференциальных следствий $y^{(n+i)} = D_x^i[F]$ $(i \in \mathbb{N})$.

С помощью формулы продолженного оператора (4) соотношение (5) можно записать в развернутой форме

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{n} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial F}{\partial w^{(i)}} - D_x^n(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} = 0. \tag{6}$$

Условие (6) называется ***определяющим уравнением***. Оно может быть использовано как для нахождения координат допускаемого оператора по известному классу уравнений вида (2), так и для восстановления класса уравнений, допускающий заданный оператор (3).

Определение* 3**. Отображение J_k: $\mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ называется ***дифференциальным инвариантом k-го порядка или k-ым дифференциальным инвариантом оператора (3), если J_k удовлетворяет уравнению

$$\underset{k}{X}[J_k] = 0 \tag{7}$$

и $\left|\frac{\partial J_k}{\partial y^{(k)}}\right| + \left|\frac{\partial J_k}{\partial w^{(k)}}\right| \neq 0$. Дифференциальный инвариант нулевого порядка J_0: $\mathbf{Z}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, называется ***универсальным инвариантом***.

Как правило, мы будем рассматривать пару $(X, y^{(n)} = F)$ – оператор (3) и некоторый класс уравнений вида (2), допускающий этот оператор. Поэтому может оказаться, что условие (7) выполнено в силу уравнения (2). Введем более широкое понятие:

Определение 4. Отображение $J_k\colon \mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ называется ***дифференциальным инвариантом*** k-го порядка или k-ым дифференциальным инвариантом оператора (3) ***в силу уравнения*** (2), если

$$\underset{k}{X}[J_k]\big|_{[y^{(n)}=F]} = 0 \tag{8}$$

и $\left|\frac{\partial J_k}{\partial y^{(k)}}\right| + \left|\frac{\partial J_k}{\partial w^{(k)}}\right| \neq 0$.

Условие (8) (как и (7)) можно рассматривать как уравнение для поиска инвариантов порядка не выше k. Также следует заметить, что левая часть уравнения (2) является инвариантом допускаемого оператора в силу самого уравнения (2). Далее без особых оговорок для краткости изложения под инвариантом мы будем понимать инвариант в смысле определения 4.

2. Некоторые свойства операторов полной и частной производной

Для доказательства теорем нам понадобится некоторые правила вычисления полных и частных производных, а также их суперпозиций в силу некоторого уравнения.

Лемма 1. Пусть отображение $G\colon \mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\})$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial(D_x[G])}{\partial y} &= D_x\left[\frac{\partial G}{\partial y}\right], & \frac{\partial(D_x[G])}{\partial y^{(s)}} &= D_x\left[\frac{\partial G}{\partial y^{(s)}}\right] + \frac{\partial G}{\partial y^{(s-1)}}, \\ \frac{\partial(D_x[G])}{\partial w} &= D_x\left[\frac{\partial G}{\partial w}\right], & \frac{\partial(D_x[G])}{\partial w^{(s)}} &= D_x\left[\frac{\partial G}{\partial w^{(s)}}\right] + \frac{\partial G}{\partial w^{(s-1)}}, \end{aligned}$$

где $s \in \mathbb{N}$.

Доказательство осуществляется непосредственным вычислением. Покажем это на примере одного из равенств:

$$\frac{\partial(D_x[G])}{\partial y^{(s)}} = \frac{\partial}{\partial y^{(s)}}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\left(y^{(i+1)}\frac{\partial G}{\partial y^{(i)}} + w^{(i+1)}\frac{\partial G}{\partial w^{(i)}}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left(y^{(i+1)}\frac{\partial^2 G}{\partial y^{(s)}\partial y^{(i)}} + w^{(i+1)}\frac{\partial^2 G}{\partial y^{(s)}\partial w^{(i)}}\right) + \frac{\partial G}{\partial y^{(s-1)}} =$$

$$= D_x\left[\frac{\partial G}{\partial y^{(s)}}\right] + \frac{\partial G}{\partial y^{(s-1)}}.$$

Остальное доказывается аналогично ■

Следствие. Пусть отображение G: $\mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогда

$$\frac{\partial(D_x^s[G])}{\partial y^{(k+s)}} = \frac{\partial G}{\partial y^{(k)}}, \quad \frac{\partial(D_x^s[G])}{\partial w^{(k+s)}} = \frac{\partial G}{\partial w^{(k)}},$$

где $s \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Докажем первое равенство (второе доказывается аналогично). Применяя лемму 1 получим:

$$\frac{\partial(D_x^s[G])}{\partial y^{(k+s)}} = D_x\left[\frac{\partial(D_x^{s-1}[G])}{\partial y^{(k+s)}}\right] + \frac{\partial(D_x^{s-1}[G])}{\partial y^{(k+s-1)}}$$

Выражение $D_x^{s-1}(G)$ зависит от дифференциальных переменных порядка не выше $k+s-1$. Поэтому первое слагаемое равно нулю. Значит,

$$\frac{\partial(D_x^s[G])}{\partial y^{(k+s)}} = \frac{\partial(D_x^{s-1}[G])}{\partial y^{(k+s-1)}}.$$

Применяя к правой части полученного соотношения аналогичным образом $s-1$ раз лемму 1, получаем требуемое соотношение. Таким образом, следствие доказано ■

Лемма 2. Пусть отображение G: $\mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Рассмотрим произвольное уравнение вида (2). Тогда для $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено соотношение

$$D_x^m(G)\big|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^s\big(D_x^{m-s}(G)\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\Big|_{[y^{(n)}=F]}, \quad s \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ 0 \leqslant s \leqslant m.$$

Доказательство. Очевидно, что для $m = 0$ утверждение верно.

Воспользуемся далее методом математической индукции по параметру m.

Сначала проверим справедливость утверждения для $m = 1$. При этом достаточно рассмотреть случай $s = 1$, так как при $s = 0$ доказываемое соотношение преобразуется в тождество

$$D_x(G)|_{[y^{(n)}=F]} = \big(D_x(G)|_{[y^{(n)}=F]}\big)\big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Пусть $s = 0$. Если $k < n$, то $G|_{[y^{(n)}=F]} = G$, а следовательно

$$D_x(G)|_{[y^{(n)}=F]} = D_x(G|_{[y^{(n)}=F]})\big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Если $k \geqslant n$, то представим отображение $G = G(x, y, w, \ldots y^{(k)}, w^{(k)})$ в виде

$$G = \bar{G}\left(x, y, w, \ldots y^{(n-1)}, w^{(n-1)}, v^{(n)}, w^{(n)}, \ldots, v^{(k)}, w^{(k)}\right),$$

где

$$v^{(j)} = y^{(j)} - D_x^{n-j}(F), \quad j \in \mathbb{N}, j \geqslant n.$$

Непосредственно вычисляя, получаем

$$D_x(\bar{G})|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(y^{(i+1)}\frac{\partial \bar{G}}{\partial y^{(i)}}\right)\bigg|_{[y^{(n)}=F]} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty}\left(w^{(i+1)}\frac{\partial \bar{G}}{\partial w^{(i)}}\right)\bigg|_{[y^{(n)}=F]} + \sum_{i=n}^{\infty}\left[D_x^{i-n}(y^{(n)} - F)\frac{\partial \bar{G}}{\partial v^{(i)}}\right]\bigg|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Последняя сумма обращается в ноль, так как $D_x^{i-n}(y^{(n)} - F)|_{[y^{(n)}=F]} = 0$ $(i \geqslant n)$, поэтому

$$D_x(\bar{G})|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(y^{(i+1)}\frac{\partial \bar{G}}{\partial y^{(i)}}\right)\bigg|_{[y^{(n)}=F]} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty}\left(w^{(i+1)}\frac{\partial \bar{G}}{\partial w^{(i)}}\right)\bigg|_{[y^{(n)}=F]} \equiv D_x(\bar{G}|_{[y^{(n)}=F]})|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Таким образом, для $m = 1$ утверждение доказано.

Предположим, что для $\forall m \leqslant r$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ утверждение также верно и докажем его для случая $m = r + 1$. Используя справедливость доказуемого соотношения для $m = r$, запишем цепочку соотношений

$$D_x^{r+1}(G)|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^r\big(D_x(G)\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} = \\ = D_x^s\big(D_x^{r-s}(D_x(G))\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^s\big(D_x^{r+1-s}(G)\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\big|_{[y^{(n)}=F]},$$

где $0 \leqslant s \leqslant r$. Осталось рассмотреть случай $s = r+1$. Сначала мы воспользуемся тем, что утверждение верно для $m = r$, а потом справедливостью доказуемого утверждения для $m = 1$. Получим следующие равенства:

$$D_x^{r+1}(G)\big|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^r\big(D_x(G)\big)\Big|_{[y^{(n)}=F]} =$$
$$= D_x^r\big(D_x(G)\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\Big|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^r\big(D_x(G\big|_{[y^{(n)}=F]})\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\Big|_{[y^{(n)}=F]} =$$
$$= D_x^r\big(D_x(G\big|_{[y^{(n)}=F]})\big)\Big|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^{r+1}\big(G\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\Big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Таким образом, мы доказали утверждение леммы ■

3. Свойства инвариантов формального оператора

Условие инвариантности (7) является однородным линейным уравнением в частных производных 1-го порядка, интегральный базис которого содержит не более чем $2k+2$ функционально независимых решений. Поэтому, если обозначить через $\mathfrak{J}_k$ пространство инвариантов оператора (3) порядка не выше k (в смысле определения 3), то $\dim \mathfrak{J}_k \leqslant 2k+2$. Также очевидно, что x является универсальным инвариантом и может быть включен в качестве элемента базиса $\mathfrak{J}_k$.

Условие (7) является достаточным, но не необходимым для выполнения соотношения (8), так как введение дополнительной связи $y^{(n)} = F$ может расширить множество решений уравнения (7), т.е. $\mathfrak{J}_k \subset \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, где $\mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ – множество инвариантов оператора (3) в силу условия (2) порядка не выше k. Например, для отображения $y^{(n)} - F$ не обязано выполняться условие (7), но $y^{(n)} - F \in \mathfrak{J}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

В любом случае, процесс поиска инвариантов является трудоемкой процедурой, но условие инвариантности (7) или (8) обладает специфической структурой, которая позволяет по известному инварианту построить совокупность других инвариантов (не обязательно всех), функционально независимых с данным, не решая уравнения, а используя только оператор полной производной.

***Теорема* 1**. Пусть $z \in \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, тогда $D_x(z) \in \mathfrak{J}_{k+1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, если $\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} \neq 0$ или $\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}} \neq 0$, иначе $D_x(z) \in \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

Доказательство. Рассмотрим условие инвариантности (8), полагая $J_k = z$, и вычислим полную производную D_x от правой и левой его части при условии $y^{(n)} = F$, т.е рассмотрим соотношение

$$D_x\Big(\underset{k}{X}[z]\big|_{[y^{(n)}=F]}\Big)\Big|_{[y^{(n)}=F]} = 0,$$

которое в силу леммы 2 эквивалентно равенству

$$D_x\Big(\underset{k}{X}[z]\Big)\Big|_{[y^{(n)}=F]} = 0.$$

Преобразуем выражение, стоящее слева, используя правило вычисления суперпозиции полной и частной производной (лемма 1):

$$D_x\Big(\underset{k}{X}[z]\Big) = D_x\left\{\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}}\right\} =$$

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^{i+1}(\Phi)\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)\left[\frac{\partial D_x(z)}{\partial y^{(i)}} - \operatorname{sign}(i)\frac{\partial z}{\partial y^{(i-1)}}\right] +$$

$$+\sum_{i=0}^{k} D_x^{i+1}(\Psi)\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\left[\frac{\partial D_x(z)}{\partial w^{(i)}} - \operatorname{sign}(i)\frac{\partial z}{\partial w^{(i-1)}}\right] =$$

$$D_x^{k+1}(\Phi)\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} + D_x^{k+1}(\Psi)\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}} + \sum_{i=0}^{k}\left[D_x^i(\Phi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial y^{(i)}} + D_x^i(\Psi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial w^{(i)}}\right].$$

Применяя следствие из леммы 1 к полученному выражению, получим

$$D_x\Big(\underset{k}{X}[z]\Big) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k+1}\left[D_x^i(\Phi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial y^{(i)}} + D_x^i(\Psi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial w^{(i)}}\right], & \text{если } \left|\dfrac{\partial z}{\partial y^{(k)}}\right| + \left|\dfrac{\partial z}{\partial w^{(k)}}\right| \neq 0, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\left[D_x^i(\Phi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial y^{(i)}} + D_x^i(\Psi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial w^{(i)}}\right], & \text{если } \left|\dfrac{\partial z}{\partial y^{(k)}}\right| + \left|\dfrac{\partial z}{\partial w^{(k)}}\right| = 0. \end{cases}$$

Таким образом, если $\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} \neq 0$ или $\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}} \neq 0$, то отображение $D_x(z) : \mathbf{Z}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ и

$$\underset{k+1}{X}[D_x(z)]\big|_{[y^{(n)}=F]} = 0,$$

а следовательно $D_x(z) \in \mathfrak{J}_{k+1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, т.е. $D_x(z)$ является инвариантом порядка $(k+1)$. Если $\partial z/\partial y^{(k)} = 0$ и $\partial z/\partial w^{(k)} = 0$, то отображение $D_x(z)$:

$\mathbf{Z}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ и

$$\underset{k}{X}[D_x(z)]\big|_{[y^{(n)}=F]} = 0,$$

а следовательно $D_x(z) \in \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, т.е $D_x(z)$ является инвариантом порядка не выше k ■

Замечание 1. В доказательстве теоремы можно было бы опустить условие "в силу уравнения $y^{(n)} = F$", поэтому верно утверждение: если $z \in \mathfrak{J}_k$, то $D_x(z) \in \mathfrak{J}_{k+1}$, если $\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} \neq 0$ или $\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}} \neq 0$, иначе $D_x(z) \in \mathfrak{J}_k$.

Замечание 2. По определению допускаемого оператора отображение $y^{(n)} - F$ является его инвариантом. Тогда $y^{(n+i)} - D_x^i(F)$ $(i \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ также являются инвариантами этого оператора.

Другой способ построения инварианта оператора по известному инварианту – рассмотрение инварианта в силу уравнения, допускающего этот оператор.

Теорема 2. Пусть $z \in \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, тогда $z\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

Доказательство. Очевидно, что $z\big|_{[y^{(n)}=F]} = z$, если $k < n$, так как мы трактуем символ $\big|_{[y^{(n)}=F]}$, как замену

$$y^{(n+i)} \longrightarrow D_x^i(F) \quad (i \in \{0\} \cup \mathbb{N}).$$

Поэтому для этого случая утверждение верно.

Предположим, что $k \geqslant n$. Запишем инвариант z в виде

$$z = z(x, y, w, \ldots, y^{(n-1)}, w^{(n-1)}, v^{(n)}, w^{(n)}, \ldots, v^{(k)}, w^{(k)}),$$

где $v^{(i)} = y^{(i)} - D_x^{n-i}(F)$, $(i \in \mathbb{N},\, i \geqslant n)$. Тогда условие инвариантности (8) примет вид

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\left[\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{r=n}^{k}\frac{\partial z}{\partial v^{(r)}}\frac{\partial\big(y^{(r)} - D_x^{r-n}(F)\big)}{\partial y^{(i)}}\right]\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} +$$

$$+\sum_{i=n}^{k} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\sum_{r=n}^{k}\frac{\partial z}{\partial v^{(r)}}\frac{\partial\big(y^{(r)} - D_x^{r-n}(F)\big)}{\partial y^{(i)}}\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} +$$

$$+\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\left[\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} + \sum_{r=n}^{k}\frac{\partial z}{\partial v^{(r)}}\frac{\partial\big(y^{(r)} - D_x^{r-n}(F)\big)}{\partial w^{(i)}}\right]\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} = 0$$

или

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} +$$

$$+ \sum_{r=n}^{k} \underset{r}{X}\big(y^{(r)} - D_x^{r-n}(F)\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial v^{(r)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} = 0.$$

Последняя сумма в равенстве обращается в ноль, так как

$$\underset{r}{X}\big(y^{(r)} - D_x^{r-n}(F)\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} = 0$$

по замечанию 2 к теореме 1, поэтому

$$X\left(z\big|_{[y^{(n)}=F]}\right)\big|_{[y^{(n)}=F]} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z\big|_{[y^{(n)}=F]}}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z\big|_{[y^{(n)}=F]}}{\partial w^{(i)}} =$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} = 0.$$

Таким образом, теорема доказана ■

Из доказательства теоремы следует, что по сути дела отображение $J = z\big|_{[y^{(n)}=F]}$ является инвариантом, не зависящим от производных $y^{(i)}$, где $i \geqslant n$, и удовлетворяет линейному однородному уравнению с частными производными 1-го порядка

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial J}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial J}{\partial w^{(i)}} = 0, \tag{9}$$

если порядок k инварианта $z\big|_{[y^{(n)}=F]}$ удовлетворяет условию $k < n$, или

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial J}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial J}{\partial w^{(i)}} = 0, \tag{10}$$

если $k \geqslant n$.

Будем называть множество решений уравнения (9) при $k < n$ (уравнения (10) при $k \geqslant n$) ***пространством*** инвариантов и обозначать его через $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, а интегральный базис этого уравнения – ***базисом*** пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Заметим, что имеют место следующие соотношения

$$\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} = \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}, \quad \text{если } 0 \leqslant k < n,$$

$$\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} \subset \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}, \quad \text{если } k \geqslant n.$$

Как правило, на практике нет необходимости искать инварианты порядка выше, чем порядок уравнения (2). Поэтому далее мы подробнее будем рассматривать вопросы, касающиеся структуры пространств $\bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, которые образуют цепочку включений

$$\bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]} \subset \bar{\mathfrak{J}}_1\big|_{[y^{(n)}=F]} \subset \ldots \subset \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]} \subset \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}, \tag{11}$$

а также исследовать единое уравнение, которому удовлетворяют элементы z пространств $\bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, т.е инварианты порядка меньше n, а также инварианты порядка n, не зависящие от производной $y^{(n)}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{n} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} = 0. \tag{12}$$

4. Построение базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$

Докажем несколько теорем, позволяющих построить базис пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

Во-первых, заметим, что существует не более двух функционально независимых инвариантов нулевого порядка. Это следует из структуры уравнения, определяющего инварианты нулевого порядка $z = z(x, y, w)$

$$\Psi\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial y} + \Phi\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial w} = 0,$$

которое всегда имеет ненулевое решение – универсальный инвариант x. Таким образом,

$$1 \leqslant \dim \bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]} \leqslant 2.$$

С помощью следующих двух теорем можно описать структуру пространств $\bar{\mathfrak{I}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(k \neq 0)$.

Теорема 3. Пусть отображения $z_1, z_2 \in \bar{\mathfrak{I}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{I}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(\, k \in \mathbb{N}\,)$ и выполнено одно из условий

1) $k < n$ и

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

2) $k \geqslant n$.

Если инварианты u_i $(1 \leqslant i \leqslant r,\, r \in \mathbb{N})$ образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{I}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, тогда отображения z_1, z_2, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально зависимы.

Доказательство. Предположим, что выполнено первое условие, т.е. $k < n$ и верно соотношение (13). Запишем уравнения, которым удовлетворяют инварианты k-го порядка z_1 и z_2

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} = 0, \tag{14}$$

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} = 0. \tag{15}$$

Так как z_2, является инвариантом k-го порядка, то $\partial z_2/\partial y^{(k)} \neq 0$ или $\partial z_2/\partial w^{(k)} \neq 0$. Пусть для определенности $\partial z_2/\partial y^{(k)} \neq 0$. Преобразуем уравнение (14), добавив к нему уравнение (15), предварительно домноженное на $\big(\partial z_1/\partial y^{(k)}\big) / \big(\partial z_2/\partial y^{(k)}\big)$. Тогда, учитывая условие (13), получим соотношение

$$\sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\left[\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} - \frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}}\right] + \\ + \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}\left[\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} - \frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}}\right] = 0.$$

Из теории уравнений с частными производными $[10, 11]$ известно, что для выражения

$$dz_1 - \frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\, dz_2 \tag{16}$$

всегда существует ненулевой интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x, y, w, \,\dots\,, y^{(k)}, w^{(k)}),$$

такой, что при домножении на него выражение (16) обращается в полный дифференциал некоторого отображения

$$z^* = z^*(x, y, w, \,\dots\,, y^{(k)}, w^{(k)}),$$

т.е.

$$\mu dz_1 - \mu \frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\, dz_2 = dz^*, \tag{17}$$

причем

$$\frac{\partial z^*}{\partial y^{(k)}} = 0, \quad \frac{\partial z^*}{\partial w^{(k)}} = 0.$$

Это следует из выбора z^* и условия (13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^*}{\partial y^{(k)}} &= \mu\left(\frac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} - \frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}}\right), \\ \frac{\partial z^*}{\partial w^{(k)}} &= \mu\left(\frac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} - \frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, z^* удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z^*}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z^*}{\partial w^{(i)}} = 0$$

и является инвариантом порядка ниже k, а значит z^* функционально выражается через базис u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Рассмотрим теперь матрицу, составленную из частных производных отображений z_1, z_2 и u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Заметим, что $r \leqslant 2k$, так как размерность интегрального базиса уравнения с частными производными 1-го порядка не превышает числа переменных, от которых зависит искомая функция, уменьшенного на единицу, поэтому в матрице (18) размерности $(r+2)\times(2k+3)$ число строк не превышает числа столбцов. Значит, отображения z_1, z_2 и u_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ функционально независимы, если в матрице (18) найдется $r+2$ столбца, образующие квадратную матрицу, определитель которой отличен от нуля, иначе эти отображения функционально зависимы.

Преобразуем первую строчку матрицы, добавив к ней вторую строку, домноженную на $\left(\partial z_1/\partial y^{(k)}\right)\big/\left(\partial z_2/\partial y^{(k)}\right)$, а потом домножим каждый элемент полученной строки на интегрирующий множитель μ. Учитывая соотношение (17), преобразованную матрицу можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z^*}{\partial x} & \frac{\partial z^*}{\partial y} & \frac{\partial z^*}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial z^*}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z^*}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Каждый элемент первой строки выражается линейно через элементы последних r строк того же столбца, так как отображение z^* (в силу функциональной зависимости z^* и инвариантов u_i) может быть представлено в виде $z^* = G(u_1,\,\ldots\,,u_r)$ с некоторым отображением G, а значит:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^*}{\partial x} &= \sum_{l=1}^{r}\frac{\partial G}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial x}, \\ \frac{\partial z^*}{\partial y^{(i)}} &= \sum_{l=1}^{r}\frac{\partial G}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial y^{(i)}}, \qquad i=\overline{1,r}, \\ \frac{\partial z^*}{\partial w^{(i)}} &= \sum_{l=1}^{r}\frac{\partial G}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial w^{(i)}}, \qquad i=\overline{1,r}. \end{aligned}$$

Поэтому, первая строка матрицы (19) при вычитании из нее последних r строк, каждая l-ая из которых домножена соответственно на $\partial G/\partial u_l$, обращается в строку, состоящую из нулей. Значит, в матрице (19), а следовательно и в матрице (18), не существует определителя порядка $r+2$, отличного от нуля. Поэтому отображения z_1, z_2, u_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ функционально зависимы.

Предположение, что выполнено условие 2 теоремы 3 не вносит существенных изменений в приведенное доказательство. Заметим, что в этом случае условие (13) также имеет место, так как инварианты k-го порядка $(k \geqslant n)$, принадлежащие пространству $\bar{\mathfrak{I}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, не зависят от дифференциальной переменной $y^{(k)}$. Поэтому аналогичными преобразованиями из уравнений, которым удовлетворяют инварианты z_1 и z_2:

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} = 0,$$

мы можем получить соотношение

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\left[\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} - \frac{\partial z_1/\partial w^{(k)}}{\partial z_2/\partial w^{(k)}}\frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}}\right] + \\ + \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}\left[\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} - \frac{\partial z_1/\partial w^{(k)}}{\partial z_2/\partial w^{(k)}}\frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}}\right] = 0.$$

Это соотношение преобразуется в уравнение для некоторого инварианта z^* порядка $(k-1)$, такого что

$$\mu dz_1 - \mu\frac{\partial z_1/\partial w^{(k)}}{\partial z_2/\partial w^{(k)}}\,dz_2 = dz^*$$

при некотором ненулевом интегрирующем множителе

$$\mu = \mu(x, y, w, \ldots, y^{(k)}, w^{(k)}),$$

а именно:

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z^*}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z^*}{\partial w^{(i)}} = 0.$$

Инвариант z^* функционально выражается через базис u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Далее, повторяя рассуждения для первого случая, приходим к выводу, что отображения z_1, z_2, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально зависимы ∎

Из теоремы 3 следует, что если мы будем строить базис пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{I}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n)$ с помощью базиса пространства $\bar{\mathfrak{I}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, то для этого нам достаточно найти хотя бы один инвариант z порядка k, такой что $z \in \bar{\mathfrak{I}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{I}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Если $0 < k < n$, то необходимо, чтобы добавляемые в базис инварианты k-го порядка были функционально независимы по старшим производным $y^{(k)}$ и $w^{(k)}$, т.е. определитель из условия (13) должен быть отличен от нуля. Количество инвариантов, которые мы должны добавить в этом случае для получения базиса, определяется следующей теоремой.

***Теорема* 4**. Пусть отображения

$$z_1, z_2, z_3 \in \mathfrak{J}_k\Big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \mathfrak{J}_{k-1}\Big|_{[y^{(n)}=F]}$$

$(1 \leqslant k < n)$ и

$$A_{12} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} \neq 0, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а инварианты u_i $(1 \leqslant i \leqslant r,\, r \in \mathbb{N})$ образуют базис пространства инвариантов $\mathfrak{J}_{k-1}\Big|_{[y^{(n)}=F]}$, тогда отображения z_1, z_2, z_3, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально зависимы.

Доказательство. Идея доказательства схожа с доказательством предыдущей теоремы. По определению инварианты k-го порядка z_1, z_2 и z_3 должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} = 0, \tag{20}$$

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} = 0, \tag{21}$$

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_3}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_3}{\partial w^{(i)}} = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим уравнение, получающееся алгебраическими преобразованиями из уравнений (20)-(22), а именно, сложим уравнения (20)-(22), домножив каждое соответственно на A_{23}, $(-A_{13})$ и A_{12}:

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \left[A_{23}\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} - A_{13}\frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}} + A_{12}\frac{\partial z_3}{\partial y^{(i)}} \right] + \\ + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \left[A_{23}\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} - A_{13}\frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} + A_{12}\frac{\partial z_3}{\partial w^{(i)}} \right] = 0. \quad (23)$$

Множители при $D_x^k(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}$ и $D_x^k(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}$, равные соответственно

$$B_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad B_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} & \frac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix},$$

обращаются в ноль, так как каждая матрица содержит по паре одинаковых столбцов. Поэтому уравнение (23) можно упростить

$$\sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \left[A_{23}\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} - A_{13}\frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}} + A_{12}\frac{\partial z_3}{\partial y^{(i)}} \right] + \\ + \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \left[A_{23}\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} - A_{13}\frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} + A_{12}\frac{\partial z_3}{\partial w^{(i)}} \right] = 0. \quad (24)$$

Заметим [10, 11], что для выражения

$$A_{23}\, dz_1 - A_{13}\, dz_2 + A_{12}\, dz_3 \quad (25)$$

всегда существует ненулевой интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x, y, w, \ \dots\ , y^{(k)}, w^{(k)}),$$

такой, что после умножения на него выражение (26) обращается в полный дифференциал некоторого отображения

$$z^* = z^*(x, y, w, \ \dots\ , y^{(k)}, w^{(k)}),$$

т.е.

$$\mu A_{23}\, dz_1 - \mu A_{13}\, dz_2 + \mu A_{12}\, dz_3 = dz^*, \quad (26)$$

причем, так как $B_1 = 0$ и $B_2 = 0$, отображение z^* не зависит от дифференциальных переменных $y^{(k)}$ и $w^{(k)}$. Следовательно, z^* удовлетворяет уравнению, которое получается из уравнения (24) и соотношения (26),

$$\sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z^*}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z^*}{\partial w^{(i)}} = 0,$$

и является инвариантом порядка ниже k, и поэтому z^* функционально выражается через базис u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Для определения функциональной зависимости отображений z_1, z_2 и u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ составим матрицу из частных производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial z_3}{\partial x} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & \frac{\partial z_3}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_3}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_3}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Как мы уже отмечали в доказательстве теоремы 3, $r \leqslant 2k$, поэтому в матрице (27) размерности $(r+3) \times (2k+3)$ число строк не превышает числа столбцов. Тогда отображения z_1, z_2, z_3 и u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально независимы, если в матрице (27) найдется $r+3$ столбца, образующие квадратную матрицу, определитель которой отличен от нуля, иначе эти отображения функционально зависимы.

Преобразуем первую строчку матрицы, согласно формуле (26), в которой под символом dz_i подразумевается строка с номером i. Тогда матрица (27) примет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z^*}{\partial x} & \frac{\partial z^*}{\partial y} & \frac{\partial z^*}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z^*}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z^*}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial z_3}{\partial x} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & \frac{\partial z_3}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_3}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_3}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Каждый элемент первой строки выражается линейно через элементы последних r строк того же столбца в силу функциональной зависимости отображения z^* и инвариантов u_i. Далее повторяя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 3, приходим у выводу, что первую строку матрицы (28) можно преобразовать в строку, состоящую из нулей. Значит, матрице (28), а следовательно и в матрице (27) не существует определителя порядка $r+3$, отличного от нуля. Поэтому отображения z_1, z_2, z_3, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально зависимы ■ Предыдущие две теоремы позволяют сформулировать принцип дополнения базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(\, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\,)$ до базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_{k+1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

***Теорема* 5**. Пусть отображения

$$z_1, z_2 \in \bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$$

$(k \in \mathbb{N})$, а инварианты u_i $(1 \leqslant i \leqslant r,\ r \in \mathbb{N})$ образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

1. Если $k \geqslant n$, то отображения z_1, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

2. Если $k < n$ и

$$A_{12} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то отображения z_1, z_2, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ образуют базис пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

Доказательство. Для доказательства того, что инварианты z_1, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ в первом случае и z_1, z_2, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ во втором образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ достаточно показать, что эти отображения функционально независимы, так как то, что любой инвариант порядка не выше k выражается через данные, следует из теорем 3 и 4.

Пусть $k \geqslant n$. Очевидно, что инварианты z_1, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально независимы, так как $\partial z_1/\partial w^{(k)} \neq 0$, а $\partial u_i/\partial w^{(k)} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Рассмотрим случай $k < n$ и составим матрицу, содержащую частные производные инвариантов z_1, z_2, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Так как инварианты u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально независимы, то в подматрице

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} \end{pmatrix} \tag{30}$$

матрицы (29) существует определитель $\det U$ порядка r, отличный от нуля. Предположим для определенности, что матрицу этого определителя образуют первые r столбцов матрицы (30). Тогда определитель квадратной подматрицы M, составленный из первых r и последних двух столбцов матрицы (29) отличен от нуля, так как он может быть представлен в виде

$$\det M = \varepsilon A_{12} \det U, \quad \text{где } \varepsilon = \pm 1.$$

Так как каждый из сомножителей отличен от нуля, то $\det M \neq 0$, а следовательно инварианты z_1, z_2, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально независимы ■

В теореме 5 сформулирован принцип построения базиса пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, который заключается в последовательном “расширении” базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]}$ до базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$. На основе этого принципа и теоремы 1 можно построить алгоритм поиска базиса пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Мы ограничимся рассмотрением случая $k = n$, так как при факторизации уравнения (2) (как мы покажем далее) используется базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Для остальных случаев алгоритм формулируется аналогичным образом.

Рассмотрим разбиение (11) пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ на $n+1$ вложенных друг в друга подпространств. Как уже отмечалось ранее, универсальный инвариант $x \in \bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]}$, поэтому $\dim \bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]} \geqslant 1$ $(\forall i = \overline{0, n})$.

Предположим, что существует индекс $k^* \leqslant n$, такой что

$$\dim \bar{\mathfrak{J}}_{k^*}\big|_{[y^{(n)}=F]} > 1.$$

Если такого k^* не существует, то $\dim \mathfrak{J}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} = 1$, а базис пространства $\mathfrak{J}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ состоит из одного элемента x.

Обозначим

$$k_1 = \min\left\{ i \mid \dim \bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]} > 1 \right\}.$$

Очевидно, что $k_1 \leqslant n$.

Если $k_1 < n$, тогда из предположения следует, что найдется дифференциальный инвариант z_1 порядка k_1: $z_1 \equiv z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1} = \mathfrak{J}_{k_1}$, причем либо $\partial z_1^{(0)}/\partial y^{(k_1)} \neq 0$, либо $\partial z_1^{(0)}/\partial w^{(k_1)} \neq 0$. Согласно утверждению теоремы 1 отображения $z_1^{(i)} = D_x^i(z_1) \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1+i}\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_1+i-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(0 < i < n - k_1)$. Инварианты $x, z_1^{(0)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}$ функционально независимы, так как все они являются инвариантами различных порядков: соответственно порядка $0, k_1, k_1+1, \ldots, n-1$, а если $k_1 = 0$, то x и z_1^0 функционально независимы по выбору $z_1^{(0)}$. По теореме 1 отображение $D_x^{n-k_1}(z_1) \in \mathfrak{J}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$, а тогда из теоремы 2 следует, что $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Но $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]}$ не обязательно является инвариантом n-го порядка, например, если $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]}$ и отображение F не зависят от переменной $w^{(n)}$.

Таким образом, возможно 3 случая:

1) $k_1 = n$. А значит пространство $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ состоит из инвариантов n-го порядка и нулевого порядка, функционально зависимых с x. В качестве элементов базиса мы положим

$$x, z_1^{(0)},$$

а все остальные инварианты пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ выражаются через $z_1^{(0)}$ и x (по теореме 3);

2) $k_1 < n$ и $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Тогда мы можем построить элементы базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$:

$$x, z_1^{(0)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)};$$

3) $k_1 < n$ и $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Тогда в качестве элементов базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ можно взять инварианты

$$x, z_1^{(0)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_1^{(n-k_1)}.$$

В последних двух случаях структура подпространств $\mathfrak{J}_i\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(i < n)$ будет такова, что

$$\begin{aligned} \dim \bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]} &= 1, & k_1 < i, \\ \dim \bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]} &\geqslant i - k_1 + 2, & k_1 \leqslant i < n. \end{aligned}$$

Допустим, что нашелся индекс k^{**} такой, что $k_1 \leqslant k^{**} < n$ и

$$\dim \bar{\mathfrak{J}}_{k^{**}}\big|_{[y^{(n)}=F]} > k^{**} - k_1 + 2.$$

Если такого k^{**} не существует, то инварианты

$$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}$$

образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, а $\dim \bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]} = i - k_1 + 2$ $(k_1 \leqslant i < n)$. Причем если $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, то по теореме 5 инварианты

$$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1)}$$

являются базисом пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$. В случае если

$$D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]},$$

может существовать инвариант

$$z_2 \equiv z_2^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]},$$

тогда базисом пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ являются инварианты

$$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_2^{(0)}$$

или (если $z_2^{(0)}$ не существует)

$$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}.$$

Теперь рассмотрим второй случай, когда k^{**} существует. Заметим, что $k^{**} \neq 0$, так как функционально независимых инвариантов нулевого порядка не более двух. Обозначим

$$k_2 = \min\left\{ i \mid \dim \bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]} > i - k_1 + 2 \right\}.$$

Очевидно, что $\max\{k_1, 1\} \leqslant k_2 < n$. Из существования k_2 следует, что найдется инвариант $z_2^{(0)} \in \bar{\mathfrak{I}}_{k_2}$ порядка k_2, т.е. имеет место одно из соотношений: либо $\partial z_2^{(0)}/\partial y^{(k_2)} \neq 0$, либо $\partial z_2^{(0)}/\partial w^{(k_2)} \neq 0$, причем инварианты $x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(k_2-k_1)}, z_2^{(0)}$ будут функционально независимы. Тогда по теореме 3 и следствию из леммы 1 будет выполняться необходимое условие

$$\det A \neq 0, \tag{31}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1^{(0)}}{\partial y^{(k_1)}} & \dfrac{\partial z_1^{(0)}}{\partial w^{(k_1)}} \\ \dfrac{\partial z_2^{(0)}}{\partial y^{(k_2)}} & \dfrac{\partial z_2^{(0)}}{\partial w^{(k_2)}} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно построить последовательность инвариантов $z_2^{(0)}, \ldots, z_2^{(n-k_2-1)}$ соответственно порядка $k_2, \ldots, n-1$, где $z_2^{(i)} = D_x^i(z_2^{(0)})$ $(0 \leqslant i \leqslant n-k_2)$. Рассмотрим совокупность инвариантов

$$\mathfrak{z}_i = \{x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(i-k_1)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_2^{(i-k_2)}\} \quad i \in \mathbb{N},\ k_2 \leqslant i < n,$$

и покажем, что $\mathfrak{z}_i$ является базисом пространства $\bar{\mathfrak{I}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Будем рассуждать по индукции. Совокупность инвариантов $\mathfrak{z}_{k_2}$ является базисом пространства $\bar{\mathfrak{I}}_{k_2}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ по выбору $z_2^{(0)}$ и теореме 5. Из условия (31) следует выполнение соотношения

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1^{(1)}}{\partial y^{(k_1+1)}} & \dfrac{\partial z_1^{(1)}}{\partial w^{(k_1+1)}} \\ \dfrac{\partial z_2^{(1)}}{\partial y^{(k_2+1)}} & \dfrac{\partial z_2^{(1)}}{\partial w^{(k_2+1)}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1^{(1)}}{\partial y^{(k_1)}} & \dfrac{\partial z_1^{(1)}}{\partial w^{(k_1)}} \\ \dfrac{\partial z_2^{(1)}}{\partial y^{(k_2)}} & \dfrac{\partial z_2^{(1)}}{\partial w^{(k_2)}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Тогда по теореме 5 набор отображений $\mathfrak{z}_{k_2+1}$ образует базис пространства $\bar{\mathfrak{I}}_{k_2+1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Проводя последовательно эти рассуждения для $i = \overline{k_2, n-1}$, приходим к требуемому выводу.

В заключение заметим, что для инварианта $z_2^{(n-k_2)} = D_x^{n-k_2}(z_2^{(0)})$ выполняется одно из двух отношений

$$z_2^{(n-k_2)}\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{I}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{I}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$$

или

$$z_2^{(n-k_2)}\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{I}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]},$$

причем инварианты $z_1^{(n-k_1)}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ и $z_2^{(n-k_2)}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ не могут одновременно принадлежать пространству $\bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Докажем это. Если предположить, что

$$z_1^{(n-k_1)}\big|_{[y^{(n)}=F]}, z_2^{(n-k_2)}\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]},$$

то $z_1^{(n-k_1)}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ и $z_2^{(n-k_2)}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ не зависят от переменной $w^{(n)}$. Это условие, с помощью следствия из леммы 1, выражается соотношениями

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_1^{(n-k_1)}\big|_{[y^{(n)}=F]}}{\partial w^{(n)}} &\equiv \frac{\partial F}{\partial w^{(n)}}\frac{\partial z_1^{(0)}}{\partial y^{(k_1)}} + \frac{\partial z_1^{(0)}}{\partial w^{(k_1)}} &= 0,\\
\frac{\partial z_2^{(n-k_2)}\big|_{[y^{(n)}=F]}}{\partial w^{(n)}} &\equiv \frac{\partial F}{\partial w^{(n)}}\frac{\partial z_2^{(0)}}{\partial y^{(k_2)}} + \frac{\partial z_2^{(0)}}{\partial w^{(k_2)}} &= 0.
\end{aligned}$$

А значит, определитель $\det A$ обращается в ноль, что противоречит условию (31).

Таким образом, оказывается, что для построения базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ достаточно не более трех инвариантов

$$x,\ z_1^{(0)},\ z_2^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]},$$

последние два из которых мы будем называть ***младшими*** инвариантами. Этот вывод отражен в результирующей таблице 1.

Таблица 1

Условие	Базис $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$
$z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$	$x, z_1^{(0)}$
$\left[\begin{array}{ll} z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big|_{[y^{(n)}=F]} & (k_1 = 0) \\ z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_1-1}\big|_{[y^{(n)}=F]} & (1 < k_1 < n) \end{array}\right.$ $z_1^{(n-k_1)}\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $\forall k = \overline{k_1, n-1} :\ \dim \bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} = k - k_1 + 2$	$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1)}$
$\left[\begin{array}{ll} z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big|_{[y^{(n)}=F]} & (k_1 = 0) \\ z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_1-1}\big|_{[y^{(n)}=F]} & (1 < k_1 < n) \end{array}\right.$ $z_1^{(n-k_1)}\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $\dim \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} = n - k_1 + 1$	$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}$
$\left[\begin{array}{ll} z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big|_{[y^{(n)}=F]} & (k_1 = 0) \\ z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_1-1}\big|_{[y^{(n)}=F]} & (1 < k_1 < n) \end{array}\right.$ $z_1^{(n-k_1)}\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $\dim \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} = n - k_1 + 2$ $z_2^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$	$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)},$ $z_2^{(0)}$
$\left[\begin{array}{ll} z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big|_{[y^{(n)}=F]} & (k_1 = 0) \\ z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_1-1}\big|_{[y^{(n)}=F]} & (1 < k_1 < n) \end{array}\right.$ $z_2^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_2}\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_2-1}\big|_{[y^{(n)}=F]} \quad (0 < k_2 < n)$ $z_i^{(n-k_i)}\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(i = 1$ или $i = 2)$	$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)},$ $z_2^{(0)}, \ldots, z_2^{(n-k_2-1)},$ $z_i^{(n-k_i)}$

5. Принцип факторизации

Групповой подход, заключающийся в представлении уравнения в инвариантах допускаемого оператора, оказался эффективным для редукции широких классов уравнений. Достаточно полное изложение применения принципа факторизации для анализа и решения обыкновенных дифференциальных уравнений приведено в [5, 7, 12, 14, 15]. Распространение симметрийных методов на класс обобщенных дифференциальных уравнений позволяет свести обобщенное дифференциальное уравнение (2) к системе "вложенных" уравнений более простой структуры, а следовательно, представить задачу анализа и интегрирования исходного уравнения в виде последовательности более простых подзадач.

Рассмотрим недоопределенное обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$F\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(n_k)}\right) = 0, \tag{32}$$

где $y_i = y_i(x)$ $(i = \overline{1,k})$.

Определение 5. Будем говорить, что уравнение (32) ***факторизуется*** до системы

$$\begin{cases} G\left(x, z_1, z_1', \ldots, z_1^{(m_1)}, \ldots, z_s, z_s', \ldots, z_s^{(m_s)}\right) = 0, \\ z_1 = H_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(r_{11})}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(r_{1k})}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_s = H_s\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(r_{s1})}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(r_{sk})}\right), \end{cases} \tag{33}$$

если система (33) является следствием уравнения (32) (в том смысле, что если $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1,k}$ удовлетворяют уравнению (32), то они удовлетворяют и системе (33)), и

$$\begin{aligned} r_{ij} &\leqslant n_j \quad (\forall i \leqslant s,\ \forall j \leqslant k), \\ m_i &\leqslant \min_{1\leqslant j\leqslant k}\{n_j - r_{ij}\} \quad (\forall i \leqslant s), \end{aligned} \tag{34}$$

$$s \leqslant k, \tag{35}$$

$$s + \max_{0\leqslant i\leqslant s} m_i < k + \max_{0\leqslant i\leqslant k} n_i. \tag{36}$$

Систему (33) будем называть ***факторсистемой***.

Из определения 5 следует, что факторсистема представляет собой "матрешку", в которой первое уравнение, называемое ***внешним***, может решаться независимо от остальных уравнений системы, называемых ***внутренними*** (далее термины ***внешнее*** и ***внутреннее*** уравнение мы будем применять к любым системам "вложенных" уравнений вида (33)). Число переменных и порядок внешнего уравнения системы (33) не превышают значения этих характеристик исходного уравнения (32). Это следует из соотношений (34) и (35), первое из которых дает соотношение для порядка уравнений

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant s} m_i \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} n_j.$$

Неравенство (36) гарантирует нам, что хотя бы одна из характеристик внешнего уравнения (число переменных или порядок) будет строго меньше соответствующей характеристики исходного уравнения, поэтому оно заведомо "проще" уравнения (32).

<u>Замечание 1</u>. Если подставить величины z_i $(i = \overline{1, s})$ в первое уравнение системы (33), то, вообще говоря, мы получим исходное уравнение с точностью до некоторого множителя

$$\mu = \mu \left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(r_1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(r_k)} \right),$$

где $r_j \leqslant n_j$, $j = \overline{1, k}$, и $r_j < n_j$ хотя бы для одного $j \in \{1, \ldots, k\}$. Функция μ является аналогом интегрирующего множителя; уравнение $\mu = 0$ требует дополнительного исследования – решения этого уравнения могут быть, например, особыми решениями исходного.

<u>Замечание 2</u>. Возможен случай, когда неравенство (36) превращается в равенство, т.е.

$$s + \max_{0 \leqslant i \leqslant s} m_i = k + \max_{0 \leqslant i \leqslant k} n_i, \tag{37}$$

но структура внешнего уравнения системы (33) все равно оказывается проще структуры исходного уравнения (31) (именно такая ситуация возникает при использовании групповых методов). Поэтому далее термины "факторизация" и "факторсистема" мы будем также использовать, если в определении 5 система (33) вместо условия (36) удовлетворяет условию (37).

Для обобщенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = F \left(x, y, w, y', w', \ldots, y^{(n-1)}, w^{(n-1)}, w^{(n)} \right), \tag{38}$$

где y и w – функции одной переменной x (очевидно, равносильного уравнению (2), поэтому к нему также применимы термины "факторизация" и "факторсистема") в определении 5 можно уточнить некоторые параметры. Во-первых, число зависимых переменных y_i в исходном уравнении (33) равно двум – y и w, а порядок n_i относительно каждой переменной не превышает n. Количество внутренних уравнений системы (34) не превышает двух, порядок каждого из них относительно переменных y и w меньше либо равен порядку n исходного уравнения. Внешнее уравнение в зависимости от числа и структуры внутренних уравнений является либо обыкновенным дифференциальным уравнением порядка не выше n, либо обобщенным дифференциальным уравнением, содержащим две неизвестные функции z_1 и z_2, порядок которого строго меньше n (либо равен n с учетом замечания 2 к определению 5).

Докажем несколько теорем, позволяющих на основе свойств пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, полученных в предыдущих параграфах, факторизовать обобщенное дифференциальное уравнение (2) и тем самым упростить процесс интегрирования исходного уравнения.

Теорема 6. Пусть обобщенное дифференциальное уравнение (2) допускает некоторый формальный оператор (3), имеющий только один младший инвариант

$$z = H\left(x, y, w, \ \ldots\ , y^{(k)}, w^{(k)}\right) \in \bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$$

порядка $k \leqslant n$.

1) Если

$$D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]},$$

то уравнение (2) факторизуется до системы двух уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} z = H\left(x, y, w, \ \ldots\ , y^{(k)}, w^{(k)}\right), \\ z^{(n-k)} = G\left(x, z, \ \ldots\ , z^{(n-k-1)}\right). \end{array}\right. \tag{39}$$

2) Если

$$D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \backslash \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$$

и существует отображение $z^* = H^*\left(x, y, w, \ \ldots\ , y^{(n)}, w^{(n)}\right)$, такое что $z^* \in \mathfrak{J}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \backslash \mathfrak{J}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, а отображения $x, z^{(0)}, \ \ldots\ , z^{(n-k)}, z^*$ функционально независимы, то уравнение (2) факторизуется до системы трех уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} z = H\left(x, y, w, \ \ldots\ , y^{(k)}, w^{(k)}\right), \\ z^* = H^*\left(x, y, w, \ \ldots\ , y^{(n)}, w^{(n)}\right), \\ z^* = G\left(x, z, \ \ldots\ , z^{(n-k)}\right). \end{array}\right. \tag{40}$$

Доказательство. Предположим, что выполнено условие

$$D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{I}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Так как z – младший инвариант, то $k<n$ (при $k=n$ отображение $D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]}=z$ является инвариантом n-го порядка). В предыдущем пункте 1.4 мы показали, что отображения $x, z^{(0)},\ \ldots,\ z^{(n-k-1)}$, где $z^{(m)}=D_x^m(z)$ $(m=\overline{0,n-k-1})$, при $k<n$ образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{I}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Следовательно, присоединение к этому базису любого другого инварианта порядка не выше $n-1$ приводит к функциональной зависимости между элементами этого множества инвариантов. Поэтому существует некоторая достаточно гладкая функция G, такая что

$$z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]} = G\left(x, z^{(0)},\ \ldots,\ z^{(n-k-1)}\right).$$

Это означает, что если переменные $x, y, w,\ \ldots,\ y^{(n)}, w^{(n)}$ связаны соотношением (2), то для них верно равенство

$$z^{(n-k)} = G\left(x, z^{(0)},\ \ldots,\ z^{(n-k-1)}\right).$$

Таким образом мы получаем систему (39), являющуюся следствием уравнения (2), а точнее факторсистему исходного уравнения (2), внешнее равнение которой является обыкновенным дифференциальным уравнением.

Во втором случае необходимо рассмотреть базис пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{I}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$, состоящий из отображений $x, z^{(0)},\ \ldots,\ z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$. Но тогда инварианты $x, z^{(0)},\ \ldots,\ z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$, $z^*|_{[y^{(n)}=F]}$ будут функционально зависимы, а следовательно, существует достаточно гладкая функция G, такая что

$$z^* = G\left(x, z,\ \ldots,\ z^{(n-k)}\right)$$

при условии (2). Значит, система (40) является следствием уравнения (2), и теорема доказана. ■

<u>Замечание</u>. Может оказаться, что инвариант $z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$ имеет порядок $s<n-1$. Тогда

1) если инварианты x и $z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$ функционально зависимы, то факторсистема имеет вид

$$\begin{cases} z = H\left(x, y, w,\ \ldots,\ y^{(k)}, w^{(k)}\right), \\ z^{(n-k)} = G(x). \end{cases}$$

В частности, если $G \equiv 0$, тогда H является первым интегралом уравнения (2);

2) если инварианты x и $z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$ функционально независимы, то очевидно, что $s \geqslant k$, и совокупность инвариантов $x, z^{(0)}, \dots, z^{(s-k)}$, $z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$ будет функционально зависима, поэтому уравнение (2) редуцируется к факторсистеме

$$\begin{cases} z = H\left(x, y, w, \dots, y^{(k)}, w^{(k)}\right), \\ z^{(n-k)} = G\left(x, z, \dots, z^{(s-k)}\right). \end{cases}$$

Теорема 7. Пусть обобщенное дифференциальное уравнение (2) допускает некоторый формальный оператор (3), имеющий два младших инварианта

$$z_i = H_i\left(x, y, w, \dots, y^{(k_i)}, w^{(k_i)}\right) \in \bar{\mathfrak{I}}_{k_i}\Big|_{[y^{(n)}=F]}, \quad i = 1, 2,$$

порядка $k_i \leqslant n$. Тогда

1) если

$$D_x^{n-k_1}(z_1)\Big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{I}}_{n-1}\Big|_{[y^{(n)}=F]},$$

то уравнение (2) представимо в виде факторсистемы

$$\begin{cases} z_1 = H_1\left(x, y, w, \dots, y^{(k_1)}, w^{(k_1)}\right), \\ z_2 = H_2\left(x, y, w, \dots, y^{(k_2)}, w^{(k_2)}\right), \\ z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, \dots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \dots, z_2^{(n-k_2-1)}\right), \end{cases} \tag{41}$$

при $k_2 < n$,

$$\begin{cases} z_1 = H_1\left(x, y, w, \dots, y^{(k_1)}, w^{(k_1)}\right), \\ z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, \dots, z_1^{(n-k_1-1)}\right), \end{cases} \tag{42}$$

при $k_2 = n$;

2) если

$$D_x^{n-k_1}(z_1)\Big|_{[y^{(n)}=F]}, D_x^{n-k_2}(z_2)\Big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{I}}_n\Big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{I}}_{n-1}\Big|_{[y^{(n)}=F]},$$

то уравнение (2) факторизуется до системы

$$\begin{cases} z_1 = H_1\left(x, y, w, \dots, y^{(k_1)}, w^{(k_1)}\right), \\ z_2 = H_2\left(x, y, w, \dots, y^{(k_2)}, w^{(k_2)}\right), \\ z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, \dots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \dots, z_2^{(n-k_2)}\right). \end{cases} \tag{43}$$

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству теоремы 6.

Рассмотрим первый случай:

$$D_x^{n-k_1}(z_1)\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{I}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Так как z_1 – младший инвариант, то $k_1 < n$ (при $k_1 = n$ отображение $D_x^{n-k_1}(z_1)\big|_{[y^{(n)}=F]} = z_1$ является инвариантом n-го порядка). Базис пространства $\bar{\mathfrak{I}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ образуют инварианты

$$x, z_1, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \ldots, z_2^{(n-k_2-1)},$$

если $k_2 < n$,

$$x, z_1, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)},$$

если $k_2 = n$, тогда для некоторого достаточно гладкого отображения G будут верны соотношения

$$z_1^{(n-k_1)}|_{[y^{(n)}=F]} = G\left(x, z_1, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \ldots, z_2^{(n-k_2-1)}\right),$$

либо соответственно

$$z_1^{(n-k_1)}|_{[y^{(n)}=F]} = G\left(x, z_1, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}\right).$$

Значит, из уравнения (2) следует одна из факторсистем (41) или (42).

Во втором случае необходимо рассмотреть базис пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{I}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$, который образуют инварианты

$$x, z_1, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \ldots, z_2^{(n-k_2-1)}, z_2^{(n-k_2)}|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Поэтому существует некоторое достаточно гладкое отображение G, такое что

$$z_1^{(n-k_1)}|_{[y^{(n)}=F]} = G\left(x, z_1, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \ldots, z_2^{(n-k_2-1)}, z_2^{(n-k_2)}|_{[y^{(n)}=F]}\right).$$

Таким образом, из уравнения (2) мы получаем следствие в виде системы (43) ■

<u>Замечание 1</u>. Одним из необходимых условий теорем 6 и 7 является обращение полной производной порядка $n-k$ младшего инварианта $z \in \bar{\mathfrak{I}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ порядка k в инвариант порядка ниже n:

$$D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{I}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}, \tag{44}$$

т.е. инвариант

$$D_x^{n-k}(z)\Big|_{[y^{(n)}=F]} = \sum_{0<i<n-1} \frac{\partial\left(D_x^{n-k-1}[z]\right)}{\partial y^{(r)}} y^{(r+1)} + \\ + \sum_{0<i<n-1} \frac{\partial\left(D_x^{n-k-1}[z]\right)}{\partial w^{(r)}} w^{(r+1)} + \frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} F + \frac{\partial z}{\partial w^{(k)}} w^{(n)} \quad (45)$$

не зависит от дифференциальной переменной $w^{(n)}$. Заметим, что производная $\partial z/\partial y^{(k)} \neq 0$ (иначе $\partial z/\partial w^{(k)} \neq 0$, а следовательно отображение $D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]}$ является инвариантом порядка n). Дифференцируя по $w^{(n)}$ соотношение (45) и применяя следствие из леммы 1, получим

$$\frac{\partial D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]}}{\partial w^{(n)}} = \frac{\partial F}{\partial w^{(n)}} \frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} + \frac{\partial z}{\partial w^{(k)}}.$$

Выражение справа от знака равенства обращается в ноль, если

$$\frac{\partial F}{\partial w^{(n)}} = -\frac{\partial z/\partial w^{(k)}}{\partial z/\partial y^{(k)}}.$$

Таким образом, правая часть уравнения (2) F должна быть **линейной** по старшей производной $w^{(n)}$.

Замечание 2. Из теоремы 6 следует, что формальный оператор, имеющий только один младший инвариант z порядка $k < n$, не всегда эффективен для факторизации уравнения (2), допускающего этот оператор, так как необходимо либо выполнение условия (44), либо нужно знать еще один инвариант z^*, удовлетворяющий условиям, сформулированным в теореме. Если уравнение (2) допускает формальный оператор (3), имеющий два младших инварианта порядка ниже n (теорема 7), то, очевидно, что для инварианта z либо выполняется условие (44), т.е. порядок $D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]}$ ниже n (1-ый пункт теоремы 7), либо порядок $D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]}$ равен n (2-ой пункт теоремы 7), а значит уравнение (2) гарантированно сводится к некоторой факторсистеме.

Наличие допускаемого оператора позволяет в большинстве случаев факторизовать исходное уравнение, но тогда возникает вопрос: верно ли, что всякой факторсистеме можно поставить в соответствие некоторый формальный оператор? Если это так, то это означает, что теоретически методами группового анализа мы можем найти ***все*** типы факторсистем, к которым сводится исходное уравнение, хотя, конечно, на практике это удается сделать не всегда. Докажем обратную теорему для наиболее распространенных и практически значимых типов факторизации.

Теорема 8. Пусть обобщенное дифференциальное уравнение n-го порядка (38)

1) редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, z_1', \ldots, z_1^{(m_1)}\right)$$

с помощью подстановки

$$z_1 = H_1\left(x, y(x), w(x), \ldots, y^{(k_1)}(x), w^{(k_1)}(x)\right), \quad k_1 < n,$$

где $0 \leqslant m_1 < n - k_1$;

2) сводится к обобщенному дифференциальному уравнению

$$z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, z_1', \ldots, z_1^{(m_1)}, z_2, z_2', \ldots, z_2^{(m_2)}\right)$$

с помощью подстановки вида

$$\begin{aligned} z_1 &= H_1\left(x, y(x), w(x), \ldots, y^{(k_1)}(x), w^{(k_1)}(x)\right), \qquad k_1 < n, \\ z_2 &= H_2\left(x, y(x), w(x), \ldots, y^{(k_2)}(x), w^{(k_2)}(x)\right), \qquad k_2 < n, \end{aligned}$$

$\frac{\partial z_1}{\partial y^{k_1}} \neq 0$, $-1 < m_1 < n - k_1$, $0 \leqslant m_2 \leqslant n - k_2$.

Тогда исходное уравнение допускает некоторый формальный оператор (3), такой что все z_i $(i = 1, 2)$ являются его инвариантами: $z_i \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_i}\Big|_{[y^{(n)}=F]}$.

Доказательство. За исключением процедуры построения оператора, рассуждения в обоих случаях совпадают. Рассмотрим второй случай: пусть исходное уравнение (38) (равносильное (2)) сводится к факторсистеме

$$\left\{ \begin{aligned} & z_1 = H_1\left(x, y, w, \ldots, y^{(k_1)}, w^{(k_1)}\right), \\ & z_2 = H_2\left(x, y, w, \ldots, y^{(k_2)}, w^{(k_2)}\right), \\ & z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, \ldots, z_1^{(m_1)}, z_2, \ldots, z_2^{(m_2)}\right). \end{aligned} \right. \tag{46}$$

Найдем формальный оператор (3), такой, что z_1 и z_2 являются его инвариантами. Для этого запишем уравнения, которым удовлетворяют инварианты k_i-го порядка ($k_i < n$, $i = 1, 2$) (в смысле определения 3)

$$\sum_{r=0}^{k_i} D_x^r(\Phi) \frac{\partial z_i}{\partial y^{(r)}} + \sum_{r=0}^{k_i} D_x^r(\Psi) \frac{\partial z_i}{\partial w^{(r)}} = 0.$$

Одно из этих уравнений можно считать линейным уравнением в полных производных относительно функции Φ. Тогда из второго уравнения, являющегося линейным уравнением в полных производных относительно Ψ, подставляя найденное выражение для Φ, можно выразить Ψ. Таким образом, всегда существует некоторый формальный оператор вида (3), имеющий в качестве инвариантов отображения $z_1 \in \mathfrak{J}_{k_1}$ и $z_2 \in \mathfrak{J}_{k_2}$, при этом они будут инвариантами и в смысле определения 4 для произвольного обобщенного дифференциального уравнения (2), т.е.

$$z_i \in \mathfrak{J}_{k_i}\Big|_{[y^{(n)}=F]} \equiv \bar{\mathfrak{J}}_{k_i}\Big|_{[y^{(n)}=F]}, \quad i = 1, 2.$$

Покажем, что уравнение (2), факторизующееся до системы (46), допускает построенный формальный оператор. Заметим, что так как

$$z_1^{(n-k_1)} = \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i+1)} \frac{\partial z_1^{(n-k_1-1)}}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{n-1} w^{(i+1)} \frac{\partial z_1^{(n-k_1-1)}}{\partial w^{(i)}} + y^n \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k_1)}} + w^n \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k_1)}}$$

и выражение

$$z_1^{(n-k_1)} - G\left(x, z_1, z_1', \ldots, z_1^{(m_1)}, z_2, z_2', \ldots, z_2^{(m_2)}\right)$$

при возвращении к переменным y и w при условии, что $y^{(n)} = F$, должно обращаться в тождественный ноль, то

$$y^{(n)} - F = \left(z_1^{(n-k_1)} - G|_{[y^{(n)}-F]}\right) : \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k_1)}}.$$

Тогда, вычисляя действие найденного оператора X на выражение $y^{(n)} - F$:

$$X\Big[y^{(n)} - F\Big]\Big|_{[y^{(n)}=F]} = X\Big[z_1^{(n-k_1)} - G|_{[y^{(n)}=F]}\Big]\Big|_{[y^{(n)}=F]} : \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k_1)}} -$$
$$- \left(z_1^{(n-k_1)} - G|_{[y^{(n)}=F]}\right)\Big|_{[y^{(n)}=F]} X\left[\frac{\partial z_1}{\partial y^{(k_1)}}\right] : \left(\frac{\partial z_1}{\partial y^{(k_1)}}\right)^2,$$

приходим к выводу, что

$$X\Big[y^{(n)} - F\Big]\Big|_{[y^{(n)}=F]} = 0,$$

так как множители

$$X\Big[z_1^{(n-k_1)} - G|_{[y^{(n)}=F]}\Big]\Big|_{[y^{(n)}=F]} \quad \text{и} \quad \left(z_1^{(n-k_1)} - G|_{[y^{(n)}=F]}\right)\Big|_{[y^{(n)}=F]}$$

равны нулю. Равенство нулю второго множителя очевидно. Первый множителя обращается в ноль, так как отображения $z_1^{(n-k_1)}$ и $G|_{[y^{(n)}=F]}$ являются инвариантами в силу исходного уравнения (2) (по построению инвариантов $z_1^{(i)}$ и из теорем 1,2).

В первом случае, когда уравнение (2) факторизуется до системы

$$\begin{cases} z_1 = H_1\left(x, y, w, \, \ldots \, , y^{(k_1)}, w^{(k_1)}\right), \\ z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, \, \ldots \, , z_1^{(m_1)}\right). \end{cases}$$

процедура построения оператора, имеющего в качестве инварианта отображение z_1, проще, так как уравнение

$$\sum_{r=0}^{k_1} D_x^r(\Phi)\frac{\partial z_1}{\partial y^{(r)}} + \sum_{r=0}^{k_1} D_x^r(\Psi)\frac{\partial z_1}{\partial w^{(r)}} = 0$$

является переопределенным уравнением с двумя искомыми функциями Ψ и Φ, из которого мы можем выразить, например, Φ как решение линейного уравнения в полных производных. Дальнейшие рассуждения для построенного оператора аналогичны ■

Из теоремы 8 следует, что методами группового анализа теоретически мы можем описать все варианты факторизации обобщенного дифференциального уравнения (2) до обыкновенного дифференциального уравнения, а также построить все факторсистемы вида (46), за исключением случая, когда хотя бы одно из внутренних уравнений факторсистемы имеет порядок, равный порядку исходного уравнения n. В следующем пункте мы опишем некоторые типы операторов, для которых, как правило, удается найти инварианты и тем самым на практике реализовать идею факторизации.

6. Поиск инвариантов

Согласно теоремам 6 и 7, процесс факторизации уравнения включает следующие действия:

1) поиск допускаемого оператора;

2) поиск и исследование младших инвариантов допускаемого оператора порядка меньше n (их количество, выполнение свойства (44)).

Как правило, на практике возникает проблема: допускаемый оператор найден, но непонятно, как искать его инварианты. В этом параграфе мы рассмотрим несколько случаев, в которых процесс поиска инвариантов осуществляется с наименьшими затруднениями.

Заметим, что инварианты порядка ниже n должны удовлетворять уравнению (12). Исключая зависимость от переменной $w^{(n)}$, получаем уравнение

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} = 0.$$

Для нахождения младших инвариантов мы должны последовательно исследовать на наличие решений $z = z(x, y, w, \ldots y^{(k)}, w^{(k)})$, функционально независимых с x, уравнения

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \qquad (47)$$

Будем считать, что из двух возможных младших инвариантов z_1 и z_2 порядок первого k_1 не превышает порядка второго инварианта k_2, тогда z_1 удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=0}^{k_1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k_1} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} = 0,$$

причем, если $k_1 \neq 0$, интегральный базис уравнений

$$\sum_{i=0}^{l} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{l} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} = 0, \quad l = \overline{0, k_1 - 1}$$

состоит из одного элемента x. Пусть $\partial z_1/\partial y^{(k_1)} \neq 0$. Введем новые переменные:

$$y^{(k_1+r)} \to \bar{y}^{(k_1+r)} \equiv D_x^r(z_1), \quad r = \overline{0, n-1-k_1}. \qquad (48)$$

(Если $\partial z_1/\partial y^{(k_1)} = 0$, то аналогично можно рассмотреть замену переменных $w^{(k_1+r)} \to \bar{w}^{(k_1+r)} \equiv D_x^r(z_1)$, $r = \overline{0, n-1-k_1}$.) Напомним, что только один из младших инвариантов может иметь нулевой порядок, поэтому второй младший инвариант порядка ниже n может существовать только у обобщенных дифференциальных уравнений (2) порядка $n > 1$. Тогда для поиска второго младшего инварианта при $n > 1$ необходимо рассмотреть уравнения (47), учитывая замену (48), где $k = \overline{\max\{1, k_1\}, n-1}$. Если интегральный базис этих уравнений состоит из одного элемента x, то второго младшего инварианта нет, иначе существует наименьший $k = k_2$ такой, что размерность интегрального базиса соответствующего уравнения (47) (с заменой (48)) больше единицы (а точнее, как мы уже отмечали, равна двум). Из этого уравнения мы и находим второй младший инвариант z_2. Чтобы оценить возможность факторизации уравнения (2) и ее тип, нам не обязательно искать решения уравнения (47), а достаточно определить значения k_1 и k_2. Для этого мы должны выполнить следующие действия:

1. Найти размерность интегрального базиса уравнения (47) при $k = 0$ $(\dim \bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]})$. Если $\dim \bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]} > 1$, то $k_1 = 0$, иначе нужно определить минимальное значение $k = k_1 > 0$, для которого размерность интегрального базиса соответствующего уравнения (47) увеличивается по сравнению с размерностью интегрального базиса для уравнения (47) при $k = k_1 - 1$. Если такого k_1 не нашлось, то оператор не имеет младших инвариантов порядка ниже n. Если для уравнения (2) первого порядка мы нашли $k_1 = 0$, то второго младшего инварианта порядка ниже $n = 2$ нет.

2. Предположим, что мы определили k_1 и $n > 1$, тогда необходимо проанализировать уравнения (47) при $k = \overline{\max\{1, k_1\}, n-1}$ и найти минимальное значение $k = k_2$, для которого размерность интегрального базиса соответствующего уравнения (47) по сравнению с размерностью интегрального базиса для уравнения (47) при $k = k_1 - 1$ увеличивается более чем на единицу. Если такого k_2 не нашлось, то оператор имеет только один младший инвариант порядка ниже n.

Структура координат оператора (3) может оказаться достаточно сложной, а следовательно, в процессе определения порядка младших инвариантов или самих инвариантов мы можем столкнуться с различного рода препятствиями. Рассмотрим простейшие случаи, в которых, как правило, удается решить поставленную задачу.

I. Отношения

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{D_x(\Phi)}{\Phi}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}_0 = \frac{\Psi}{\Phi}\bigg|_{[y^{(n)}=F]}$$

являются отображениями ***конечномерного*** пространства (считаем для определенности, что $\Phi \neq 0$). Тогда можно записать уравнения, равносильные уравнениям (45):

$$\sum_{i=0}^{k} \mathfrak{A}_i \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} \mathfrak{B}_i \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{49}$$

где $\mathfrak{A}_0 = 1$, а остальные $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ задаются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_i &= D_x(\mathfrak{A}_{i-1})|_{[y^{(n)}=F]} + \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{i-1}, \quad 1 < i < n, \\ \mathfrak{B}_i &= D_x(\mathfrak{B}_{i-1})|_{[y^{(n)}=F]} + \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_{i-1}, \quad 0 < i < n, \end{aligned} \tag{50}$$

которые легко получаются из цепочки преобразований

$$D_x\left[\left.\frac{D_x^{i-1}(\Psi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]}\right]\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} \overset{[\text{лемма } 2]}{=} D_x\left[\frac{D_x^{i-1}(\Psi)}{\Phi}\right]\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} =$$
$$= \left.\frac{D_x^{i}(\Psi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} - \left.\frac{D_x^{i-1}(\Psi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} \cdot \left.\frac{D_x(\Psi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} \tag{51}$$

и аналогичной ей, если подставить вместо Ψ координату Φ. Уравнения (49) являются линейными уравнениями с частными производными первого порядка, коэффициенты которого являются отображениями некоторого конечномерного пространства $\mathbb{R}^{s_k}$ в $\mathbb{R}$. Последний вывод следует из рекуррентных формул (50), так как применяя оператор полной производной к выражению, зависящему от конечного числа переменных, мы получим снова выражение, зависящее от конечного числа переменных. Таким образом, к каждому уравнению из совокупности (49) можно применить классические методы решения уравнений с частными производными. Рассмотрим одно из уравнений совокупности (49) при некотором $k = k_0$:

$$\sum_{i=0}^{k_0} \mathfrak{A}_i \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k_0} \mathfrak{B}_i \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} = 0. \tag{52}$$

Если коэффициенты $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ зависят от переменных $x, y, w, \ldots, y^{(k_0)}$, $w^{(k_0)}$, то найти интегральный базис уравнения (52), состоящий из $2(k_0+1)$ инвариантов, можно из соответствующей системы в характеристиках:

$$\frac{d\,y}{\mathfrak{A}_0} = \ldots = \frac{d\,y^{(k_0)}}{\mathfrak{A}_{k_0}} = \frac{d\,w}{\mathfrak{B}_0} = \ldots = \frac{d\,w^{(k_0)}}{\mathfrak{B}_{k_0}}.$$

Если хотя бы один из коэффициентов $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ зависит от дифференциальной переменной порядка выше k_0 (будем тогда считать, что $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ зависят от переменных $x, y, w, \ldots, y^{(k_0)}, w^{(k_0)}, \ldots, y^{(k_0+n_0)}, w^{(k_0+n_0)}$, где $n_0 \in \mathbb{N}$), тогда уравнение (52) равносильно нормальной (т.к. $\mathfrak{A}_0 = 1$) системе

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k_0} \mathfrak{A}_i \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum\limits_{i=0}^{k_0} \mathfrak{B}_i \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}}, = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y^{(k_0+i)}} = 0, \quad i = \overline{1, n_0}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial w^{(k_0+i)}} = 0, \quad i = \overline{1, n_0}. \end{cases} \tag{53}$$

Система (53) может оказаться незамкнутой. Поэтому, согласно методу Якоби, ее необходимо дополнить уравнениями до равносильной якобиевой системы [11] с помощью скобок Пуассона. Мы не будем подробно излагать этот метод приведения системы в нормальную замкнутую форму, который достаточно подробно описан в классической математической литературе, например в [11]. Отметим только, что размерность интегрального базиса якобиевой системы равна разности между числом переменных и числом уравнений. Поэтому для определения размерности пространства инвариантов нам не нужно искать решения системы (53).

На практике чаще всего приходится рассматривать операторы (3), координаты которых удовлетворяют соотношениям

$$\left.\frac{D_x(\Phi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{D_x(\Phi)}{\Phi} \quad \text{и} \quad \left.\frac{\Psi}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{\Psi}{\Phi}.$$

Одним из аргументов в пользу таких операторов является то, что пока не ясно, как осуществлять подстановки вида $y^{(i)} = D_x^i(F)$ в выражения, зависящие от бесконечно числа аргументов, в частности, содержащие полный интеграл. Если считать, согласно предположению, что

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{D_x(\Phi)}{\Phi} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}_0 = \frac{\Psi}{\Phi},$$

то можно восстановить класс соответствующих операторов, а именно: координаты Φ и Ψ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \exp\left(\int \mathfrak{A}_1\, dx\right), \\ \Psi &= \mathfrak{B}_0 \exp\left(\int \mathfrak{A}_1\, dx\right). \end{aligned}$$

II. Отношения

$$\mathfrak{A}_1 = \left.\frac{D_x(\Phi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}_1 = \left.\frac{D_x(\Psi)}{\Psi}\right|_{[y^{(n)}=F]} \tag{54}$$

являются отображениями ***конечномерного*** пространства ($\Phi \neq 0$, $\Psi \neq 0$), но отношение $(\Psi/\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}$ не обладает этим свойством (иначе мы получим предыдущий случай), либо определение этого свойства оказывается затруднительным. Тогда мы можем поступить следующим образом:

Преобразуем уравнения (47)

$$\Phi|_{[y^{(n)}=F]} \sum_{i=0}^{k} \mathfrak{A}_i \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \Psi|_{[y^{(n)}=F]} \sum_{i=0}^{k} \mathfrak{B}_i \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} = 0, \quad k = \overline{0, n-1},$$

где $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = 1$, а остальные $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ при $i > 1$ задаются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_i &= D_x(\mathfrak{A}_{i-1})|_{[y^{(n)}=F]} + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_{i-1}, \quad i > 1, \\ \mathfrak{B}_i &= D_x(\mathfrak{B}_{i-1})|_{[y^{(n)}=F]} + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_{i-1}, \quad i > 1, \end{aligned}$$

которые получаются из цепочки преобразований (51), поэтому все коэффициенты $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ оказываются отображениями конечномерного пространства. Будем искать младшие инварианты z_1 и z_2 такие, что первый из них зависит только от переменных x и дифференциальных переменных $y, \ldots, y^{(k_1)}$, а второй – от x и дифференциальных переменных $w, \ldots, w^{(k_2)}$. Тогда они должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{i=0}^{k_1} \mathfrak{A}_i \frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{k_2} \mathfrak{B}_i \frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} = 0.$$

Таким образом, для поиска инвариантов нам необходимо исследовать уравнения

$$\sum_{i=0}^{k} \mathfrak{A}_i \frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} = 0, \quad 1 < k < n,$$
$$\sum_{i=0}^{k} \mathfrak{B}_i \frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} = 0, \quad 1 < k < n.$$

Метод исследования рассмотрен в предыдущем пункте I. Единственный вопрос, который может возникнуть при таком подходе – существует ли у оператора, коэффициенты которого удовлетворяют свойству (54), инвариант **“смешанного”** типа (т.е. он зависит как от производных переменной y, так и от производных переменной w) порядка ниже k_2, а значит, применение термина ***младший*** к инвариантам z_1 и z_2 может оказаться некорректным. Эта проблема пока остается нерешенной, но практика показывает, что уравнение, допускающее такой оператор, всегда факторизуется с помощью найденных инвариантов z_1 и z_2.

Если для координат оператора (3) соотношения (54) выполняются без условия "в силу уравнения (2)", т.е.

$$\left.\frac{D_x(\Phi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{D_x(\Phi)}{\Phi} \quad \text{и} \quad \left.\frac{D_x(\Psi)}{\Psi}\right|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{D_x(\Psi)}{\Psi}, \tag{55}$$

мы можем восстановить класс операторов, координаты которых обладают свойствами (54) и (55), а именно: координаты Φ и Ψ имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi &= \exp\left(\int \mathfrak{A}_1\, dx\right),\\ \Psi &= \exp\left(\int \mathfrak{B}_1\, dx\right).\end{aligned}$$

Заметим, что указанный подход к поиску инвариантов, не являющихся инвариантами "смешанного" типа, заключающийся в расщеплении уравнения для поиска инвариантов на систему из двух уравнений, может применяться независимо от структуры координат формального оператора (3).

Таким образом, на основе теории формальных операторов на класс обобщенных дифференциальных уравнений распространен и доказан универсальный принцип факторизации, позволяющий редуцировать различные классы уравнений, сводящиеся к уравнениям этого типа, например, функционально-дифференциальные уравнения. Указанный подход не имеет ограничений по порядку и виду рассматриваемых уравнений и может использоваться для решения широкого круга задач моделирования и ряда других прикладных областей.

Список литературы

[1] Bluman G.W., Cole J.D. Similarity methods for differential equations. – Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1974. – 332 pp.

[2] Hill J.M. Solution of differential equations by means of one-parameter groups // Res. Notes Math. – №63, 1982. – pp. 1-170.

[3] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen / Bearbeitet und herausgegben von Dr. G.Scheffers. – Leipzig: B.G.Teubner, 1981.

[4] Lie S. Gesammelte Abhandlungen. – Leipzig: B.G.Teubner – Oslo: H.Aschehoug & Co.: Bd.1. – 1934; Bd.2 (Teil 1). – 1935; Bd.2 (Teil 2). – 1937; Bd.3 – 1922; Bd.4 – 1929; Bd.5 – 1924; Bd.6 – 1927.

[5] Stephani H. Differentialgleichungen. Symmetrien und Lösungsmethoden. – Heidelberg-Berlin-Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1994. – 320 pp.

[6] Zaitsev V.F. On the substantiation of the theory of formal operators // Tools for mathematical modelling, abstracts of III Int. Conference. – SPb: SpbSTU, 2001. – P.61.

[7] Zaitsev V.F. Universal description of symmetries on a basis of the formal operators // Math. Research, vol.7. «Theory and practice of differential equations». – St.Petersburg: SPbSTU, 2000, pp.39-45.

[8] Zaitsev V.F., Linchuk L.V. On some problems of modern group analysis of differential equations // Computer algebra in fundamental and applied research and education, proceedings of II Int. Sci. Conference. – Minsk: Belarusian St. Univ., 1999. – pp.76-81.

[9] Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. Под ред. Виноградова А.М. и Красильщика И.С. – М.: Изд-во «Факториал», 1997. – 464 с.

[10] Гребенча М.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Учпедгиз, 1937. – 280 с.

[11] Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – ОНТИ, ГТТИ, 1934. – 360 с.

[12] Зайцев В.Ф. О современном групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды II Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их применения». - СПб: Изд.СПбГТУ, 1998. – С.137-151.

[13] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: «Наука», 1983. – 280 с.

[14] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: «Наука», 1978. – 400 с.

[15] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: «Мир», 1989.

[16] Павловский Ю.Н. Геометрическая теория декомпозиции и теоретико-групповой анализ // Симметрия и дифференциальные уравнения. – Красноярск, 2000. – С.170-172.