*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N 2, 2001*
*Электронный журнал,*
*рег. N П23275 от 07.03.97*

*http://www.neva.ru/journal*
*e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru*

*Групповой анализ дифференциальных уравнений*

# ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНО-ГРУППОВОГО АНАЛИЗА К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.А.Гарминович

Мичуринский государственный педагогический институт

Будем рассматривать линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка
$$z'' + \Psi(\tau)z = 0 \tag{1}$$
с произвольной функцией $\Psi(\tau)$. В работе [1] была определена дискретная группа преобразований уравнения (1). Проследим, каким образом описанный в [1] алгоритм расширяет множество известных интегрируемых случаев. Сделаем это с помощью исследования алгебраической зависимости между существенными параметрами (потенциалами $\Psi(\tau)$) пары уравнений – исходного и искомого.

Учитывая, что порядок образующей $R$ равен двум, а порядок $X$, – бесконечности, введем обозначение потенциала так, чтобы знак его номера указывал на направление преобразования (вправо $+$, влево $-$), а буква на уровень (верхний – нижний). Для этого положим $\Psi_0$ – нулевой или начальный потенциал; потенциал, полученный из $\Psi_0$ действием образующей $R$ или $R^{-1}$ обозначим $\varphi_0$, так что "размножение" функции $\Psi_0$ можно производить с помощью подстановки $X$ из самой функции $\Psi_0$ и их функции $\varphi_0$.

Будем использовать следующие функциональные представления образующих $X$ и $R$:

$$
\begin{array}{l}
z'' + \Psi_0(\tau_0)z = 0 \ \xrightarrow{X} \ \ddot{w} + \Psi_1(\tau_1)w = 0 \\
\downarrow R \\
\ddot{\tilde{z}} + \varphi(t_0)\tilde{z} = 0
\end{array}
$$

$X$:

$$\Psi_0 \to \Psi_1 = \frac{1}{\tau_1^4 \Psi_0\left(F^{-1}\left(\frac{1}{\tau_1}\right)\right)}, \tag{2}$$

$$\begin{cases} z = \dot{w}\tau - w, \\ \tau_0 = F^{-1}\left(\frac{1}{\tau_1}\right), \end{cases} \quad \text{где} \quad \frac{1}{\tau_1} = \int \Psi_0(\tau_0)\, d\tau_0 = F(\tau_0). \tag{2}$$

$X^{-1}$:

$$\Psi_1 \to \Psi_0 = \frac{1}{[\tau_1(\tau_0)]^4\, \Psi_1\left(\tau_1(\tau_0)\right)},$$

$$\begin{cases} w = \tau_1 z', \\ \tau_1 = \tau_1(\tau_0), \end{cases} \quad \text{где} \quad \tau_0 = -\int \tau_1^2 \Psi_1(\tau_1)\, d\tau_1. \tag{3}$$

$R$:

$$\Psi_0 \to \varphi_0 = \frac{1}{\Psi\left(F^{-1}(t_0)\right)},$$

$$\begin{array}{l} z = \dot{\tilde{z}}, \\ \tau_0 = F^{-1}(t_0), \end{array} \quad \text{где} \quad \tau_0 = -\int \Psi(\tau_0)\, d\tau_0. \tag{4}$$

В качестве нулевых потенциалов будем использовать элементы множества функций $\Psi(\tau)$ уравнений типа (1), решение которых известны [2] и выражений вида и

$$\Psi(\tau) = \frac{a''(\tau)}{a(\tau)} \quad \text{и} \quad \Psi(\tau) = \frac{2aa'' + a'^2 + \beta}{4a^2},$$

$\beta =$ const, где $a(\tau)$ – частное решение уравнения (1) [2].

Чтобы сделать один шаг в преобразовании, следует найти выражение «старой» координаты через «новую», решив алгебраическое уравнение, и перевести выражение для «нового» потенциала в «новые» координаты. Решение дифференциального уравнения с «новым» потенциалом выписывается по формулам связи.

1). Пусть $a(\tau_0) = \operatorname{tg}\tau_0$, тогда

$$\Psi_0(\tau_0) = \frac{a''(\tau_0)}{a(\tau_0)} = \frac{2}{\cos^2\tau_0},$$

и

$$Z = c_1(\operatorname{tg}^2\tau_0 - \tau_0\operatorname{tg}\tau_0) + c_2\operatorname{tg}\tau_0$$

– решение уравнения (1).

Построим потенциал $\Psi_1(\tau_1)$. Найдем выражение «старой» координаты через «новую», для этого вычислим первообразную $\Psi_0(\tau_0)$

$$\int \frac{2}{\cos^2\tau_0} d\tau_0 = 2\operatorname{tg}\tau_0$$

и решим алгебраическое уравнение $2\operatorname{tg}\tau_0 = \frac{1}{\tau_1}$ относительно $\tau_0$,

$$\tau_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\tau_1}.$$

Подставляя в формулу для $\Psi_1$ вместо $\tau_0$ выражение от $\tau_1$, получим

$$\Psi_1(\tau_1) = \frac{1}{2\tau_1^4\,(1 + 4\tau_1^2)}$$

– «новый» потенциал.

Решение уравнения $\ddot{w} + \Psi_1(\tau_1)w = 0$ выпишем по формуле связи

$$w = \tau_1 z' = \frac{1}{2}c_1\frac{\tau_1^3}{\tau_1^2 + 4}\operatorname{arctg}2\tau_1 + c_1\tau_1^2 - c_2\frac{\tau_1^3}{\tau_1^2 + 4}.$$

Из первообразной от $\Psi_1$ переменную $\tau_1$ как функцию $\tau_2$ явно выразить не удается, поэтому потенциал $\Psi_2$ точно не определяется.

Построим потенциал $\varphi_0(t_0)$ по формулам (4). Имеем

$$t_0 = \int \frac{2}{\cos^2\tau_0}\,d\tau_0 = 2\operatorname{tg}\tau_0, \quad \text{откуда} \quad \tau_0 = \operatorname{arctg}\frac{t_0}{2}.$$

$$\varphi_0(t_0) = \frac{t_0^2}{8 + 2t_0^2}$$

– потенциал уравнения

$$\ddot{\tilde{z}} + \varphi_0(t_0)\tilde{z} = 0,$$

решение которого записывается в виде

$$\tilde{z} = -z' = \frac{c_1\left(\tau_0 + \frac{1}{2}\sin 2\tau_0 - 2\operatorname{tg}\tau_0\right) + c_2}{\cos^2\tau_0}.$$

Действие образующей $X$ и $X^{-1}$ на потенциал $\varphi_0$ приводит к необходимости решать трансцендентные уравнения.

2) Пусть $a(\tau_0)$ – степенная функция,

$$a(\tau_0) = \tau_0^n, \qquad \Psi(\tau_0) = \frac{a''}{a} = n(n-1)\tau_0^{-2}.$$

Орбита этого элемента состоит из одной точки – самого элемента, т.е. дифференциальное уравнение, решением которого служит степенная функция, является инвариантом.

3) Пусть $a(\tau_0)$ – многочлен степени $n$,

$$a(\tau_0) = b_n\tau_0^n + b_{n-1}\tau_0^{n-1} + \ \ldots\ + b_0, \quad n \in N.$$

Тогда $\Psi(\tau_0)$ – правильная дробь, числитель и знаменатель которой – многочлены. Неопределенный интеграл от правильной дроби на всяком промежутке, на котором знаменатель не равен нулю, существует и выражается через элементарные функции, а именно, он является алгебраической суммой суперпозиций рациональных дробей, арктангенсов и натуральных логарифмов.

При $n = 1$ $a(\tau_0) = b_1\tau_0 + b_0, \quad \Psi(\tau_0) = 0.$

При $n = 2$ $a(\tau_0) = b_2\tau_0^2 + b_1\tau_0 + b_0,$

$$\Psi_0(\tau_0) = \frac{2b_2}{b_2\tau_0^2 + b_1\tau + b_0},$$

первообразная от $\Psi_0$ равна

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{2b_2}{\sqrt{b_0 - \frac{b_1^2}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau_0 + \frac{b_1}{2}}{\sqrt{b_0 - \frac{b_1^2}{2}}}\right),$$

откуда

$$\tau_0 = \sqrt{b_0 - \frac{b_1^2}{2}}\operatorname{tg}\left(\frac{b_0 - \frac{b_1^2}{2}}{2b_2}\tau_1\right) - \frac{b_1}{2},$$

$$\Psi_1 = \frac{b_2\tau_0^2 + b_1\tau_0 + b_0}{2b_2\tau_1^4},$$

где $\tau_0 = \tau_0(\tau_1)$.

При применении преобразования $X^{-1}$ получаем трансцендентное уравнение относительно $\tau_0$, его решение может быть найдено только приближенно. Действие образующей $R$ на $\Psi_0$ приводит к потенциалу $\varphi_0(t_0)$

$$\varphi_0 = \frac{b_2\tau_0^2 + b_1\tau_0 + b_0}{2b_2},$$

где

$$\tau_0 = \frac{1}{2b_2}\left[\sqrt{4b_0b_2 - b_1^2}\,\mathrm{tg}\,\frac{t_0\left(4b_0b_2 - b_1^2\right)}{4b_2} - b_1\right].$$

Решения уравнений с потенциалами $\Psi_1$ и $\varphi_0$ выписывается по формулам (2) и (4) соответственно.

4). $a(\tau_0) = \sin\tau_0$ или $a(\tau_0) = \cos\tau_0$.

$$\Psi_0 = -1, \Psi_1 = -\tau_1^4, \Psi_2 = 3^{3/4}\tau_2^{-8/3}, \ldots, \Psi_k,$$

$$\Psi_{-1} = -\tau_{-1}^{-4/3}, \Psi_{-2} = \left(\frac{5}{3}\tau_{-2}\right)^{-8/5}, \ldots, \Psi_{-k}.$$

Множество функций $\Psi_k$, $\Psi_{-k}$ принадлежит полю степенных функций. Применение образующей $R$ к потенциалу $\Psi_0$ не меняет его.

5). $a(\tau_0) = \tau_0^n$. Найдем $\Psi_0$ по формуле:

$$\Psi_0 = \frac{2aa'' - a'^2 + 4}{4a^2} = \left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n\right)\tau_0^{n-2} + \frac{1}{\tau_0^n}.$$

При $n = 1$ $\Psi_0 = \frac{3}{4\tau_0}$, тогда

$$\Psi_1 = \tau_1^{-4}e^{-\frac{4}{3\tau_1}}.$$

Поиск переменной $\tau_2$ приводит к интегралу, который не выражается через элементарные функции.

При $n = 2$ $\Psi_0 = \tau_0^{-2}$, и уравнение (1) – инвариант, его орбита вырождается в точку.

При $n = 3$ $\Psi_0 = \frac{3\tau_0^4+4}{4\tau_0^3}$, легко находим

$$\Psi_1 = \frac{4\tau_0^3}{\tau_1^4\left(3\tau_0^4 + 4\right)},$$

где

$$\tau_0 = \pm\sqrt{\frac{4 \pm 2\sqrt{4 - 3\tau_1^2}}{3\tau_1}}.$$

Следующий шаг дает интеграл, который не выражается через элементарные функции. Уравнение, из которого определяется переменная $\tau_{-1}$, имеет только приближенное решение.

6) $\Psi_0 = ae^{\lambda\tau_0}$ (уравнение 2.1.3.1, [2]).

Находим, что

$$\Psi_1 = \frac{1}{\lambda\tau_1^3},\ \Psi_2 = \sqrt{\frac{2^3(-\lambda)}{\tau^5}}\,(\lambda < 0),\ \ldots,\Psi_k,$$

где $\Psi_k$ принадлежат полю степенных функций.

Уравнение для $\tau_{-1}$ имеет только приближенное решение.

Используя образующую $R$, получаем

$$\varphi_0 = \frac{1}{t_0\lambda},$$

откуда

$$\varphi_1 = \frac{1}{\lambda t_1^4 e^{\lambda/t_1}},$$

$\varphi_2$ точно не определяется.

Преобразование $X^{-1}$ дает цепочку потенциалов $\Psi_{-k}$, принадлежащих полю степенных функций:

$$\Psi_{-1} = \frac{1}{-2\lambda^3 t_1^9},\ \ldots,\Psi_{-k}.$$

7). $\Psi_0 = a\,\mathrm{th}\,(\lambda\tau_0) + b$ (2.1.4.2, [2]) при $b = 0$. Используя преобразование $X$, находим

$$\tau_0 = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{arch}\,\left(e^{\lambda/a\tau_1}\right) \quad \text{и} \quad \Psi_1 = \pm e^{\lambda/a\tau_1}\left(\tau_1^4\sqrt{e^{2\lambda/a\tau_1} - 1}\right)^{-1}.$$

Рассмотренные примеры позволяют сделать вывод: функции $\Psi_k$, полученные из функции $\Psi_{k-1}$ по формулам алгебраического представления образующих $X$ и $R$, являются степенными функциями $\tau_k$ или трансцендента от $\tau_k$.

## Список литературы

[1] Гарминович Н.А. Дискретно-групповой анализ линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. – СПб: РГПУ. – Деп. в ВИНИТИ от 28.11.94, №2728–В94 – 11 с.

[2] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: точные решения. – М.: Физматлит, 1995. – 560 с.