ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2001
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

О ПРИМЕНЕНИИ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПОИСКА ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Е.В. Горелова

г.Уссурийск

В настоящее время для поиска дискретных групп преобразований (ДГП) обыкновенных дифференциальных уравнений широко используются разнообразные алгоритмические (регулярные) методы, позволяющие найти ДГП различной природы для большого числа классов уравнений. Однако, к сожалению, алгоритмические методы не являются универсальными, не говоря уже о том, что в ряде случаев они чрезмерно трудоемки, и ценность получаемой информации становится сравнимой с затратами труда и времени.

Поэтому наряду с алгоритмическими развиваются и альтернативные методы, основанные, как правило, на априорной информации о классе уравнений, подлежащем симметрийному анализу. В настоящей работе рассматриваются методы, основанные на знании одного или нескольких частных решений изучаемого класса уравнений. Во многих случаях эти методы обратимы: знание ДГП доставляет некоторый набор частных решений.

1. **Уравнения первого порядка**. Для любого класса уравнений первого порядка определяющие соотношения не содержат «независимых» переменных, и алгоритмические методы отсутствуют. Поэтому альтернативные методы представляют особый интерес. В рамках проблематики настоящей работы можно выделить две перспективные идеи:

а) представление общего решения с помощью набора частных решений,

б) построение частных решений на основе известной ДГП.

Первое направление восходит к работам Дарбу (см., например, [1]). Дарбу исследовал уравнение

$$Ldy + Mdx + N(xdy - ydx) = 0,$$

где L, M, N – однородные многочлены, причем L и M имеют одинаковые степени, а N является многочленом степени m, и показал, что если известно $\frac{1}{2}m(m+1)+2$ частных решений этого уравнения, то общее решение может быть найдено без квадратур, а если известно $\frac{1}{2}m(m+1)+1$ частных решений, то может быть найден интегрирующий множитель.

Исследования Дарбу лежат в русле проблемы поиска фундаментальных систем решений, уравнений, ими обладающих, и их обобщений. К качестве примеров здесь, как правило, фигурируют линейные уравнения и уравнение Риккати (которые, как известно, легко линеаризуются повышением порядка на единицу).

Для важного в приложениях уравнения Абеля второго рода

$$yy' - y = R(x) \tag{1}$$

алгоритм поиска общего решения по набору частных впервые был предложен Б.М.Кояловичем [2]. Он рассмотрел общий интеграл вида

$$(y-\alpha_1)^{m_1}(y-\alpha_2)^{m_2}\ \ldots\ (y-\alpha_n)^{m_n} = C, \tag{2}$$

где $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_m(x)$ – частные решения (названные им каноническими), $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – константы. Легко видеть, что должно выполняться условие

$$\frac{m_1}{\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{m_n}{\alpha_n} = 0.$$

Коялович показал, что уравнение (1) может допускать канонические решения лишь в том случае, когда правая часть $R(x)$ представима в форме

$$R(x) = ax[1 + R_0(x)],$$

причем $R_0(x) \to 0$ при $x \to \infty$. В частности, это имеет место для уравнения

$$yy' - y = ax + bx^k, \quad k < 1.$$

Широкому применению метода канонических решений препятствует тот факт, что алгоритм Кояловича не являются прогнозирующим, т.е. проведение весьма трудоемкого алгоритма для каждого конкретного уравнения не гарантирует положительного результата. Поэтому В.Ф.Зайцевым и И.Я.Богатушиным [3] была рассмотрена обратная задача – построение уравнения Абеля, допускающего заданное число канонических решений – и доказана теорема, из которой следует, что для представления общего решения уравнения

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a_{n-k}(x)y^{n-k}(x)y'(x)+b_{n-k}(x)y^{n-k}(x)\right]=0 \tag{3}$$

в форме (2) необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно решение переопределенной системы алгебраических и дифференциальных уравнений относительно $a_i(x), b_i(x), \alpha_i(x)$ и констант m_i. Здесь, как и в алгоритме Кояловича, $\alpha_i(x)$ – частные решения уравнения (3).

Потребовав, чтобы уравнение (3) являлось бы уравнением Абеля 2-го рода (1), и решая переопределенную систему уравнений, можно найти все функции $R(x)$, при которых уравнение (1) допускает заданное число канонических решений.

<u>Пример 1</u>. Пусть $n=3$. Без ограничения общности можно положить $m_3=1$. Оставляя в уравнении (3) члены с y^2y', y^2 и y, получим систему

$$\begin{cases} m_1+m_2+1=a, \\ (m_2+1)\alpha_1+(m_1+1)\alpha_2+(m_1+m_2)\alpha_3=0, \\ m_1\alpha_1'+m_2\alpha_2'+\alpha_3'=a, \\ m_1\alpha_2\alpha_3+m_2\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_2=0, \\ m_1\alpha_1'\alpha_2\alpha_3+m_2\alpha_1\alpha_2'\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3'=0, \\ m_1\alpha_1'(\alpha_2+\alpha_3)+m_2\alpha_2'(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_3'(\alpha_1+\alpha_2)=aR(x), \end{cases} \tag{4a}$$

а члены с yy', y и свободный – систему

$$\begin{cases} m_1+m_2+1=0, \\ (m_2+1)\alpha_1+(m_1+1)\alpha_2+(m_1+m_2)\alpha_3=a(x), \\ m_1\alpha_1'+m_2\alpha_2'+\alpha_3'=0, \\ m_1\alpha_2\alpha_3+m_2\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_2=0, \\ m_1\alpha_1'\alpha_2\alpha_3+m_2\alpha_1\alpha_2'\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3'=a(x), \\ m_1\alpha_1'(\alpha_2+\alpha_3)+m_2\alpha_2'(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_3'(\alpha_1+\alpha_2)=a(x)R(x), \end{cases} \tag{4b}$$

Если в системе (4a) подставить α_3 из второго уравнения в четвертое (с учетом первого), то без труда получаем $\alpha_2 = \sigma_1\alpha_1$, $\alpha_3 = \sigma_2\alpha_1$, где σ_1, σ_2 – некоторые константы. Из третьего уравнения следует, что все α_i – линейные функции x, т.е. $R(x) = Ax + B$. Нетрудно видеть, что результат совпадает с результатом, полученным при рассмотрении задачи при $n = 2$ (очень простые выкладки для этого случая мы не приводим).

Вторая система (4b) решается следующим образом. Сложив проинтегрированное второе уравнение с четвертым и учитывая первое, убеждаемся, что $a(x) = a$ – константа. Подставляя α_3 из четвертого уравнения в третье и пятое, находим, что третье уравнение интегрируется

$$\frac{1}{2}m(m+1)(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = a\left[(m+1)\alpha_2 - m\alpha_1\right] - ax - b,$$

а из пятого следует

$$m(m+1)(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = b\left[m\alpha_2 - (m+1)\alpha_1\right].$$

Складывая эти выражения, получаем квадратное уравнение относительно разности $(\alpha_1 - \alpha_2)$, а вычитая второе из удвоенного первого – линейное соотношение между α_1 и α_2. Подставляя полученные α_i в шестое уравнение системы (4b), получаем (с точностью до сдвигов)

$$R(x) = -\frac{2}{9}x + A + Bx^{-1/2},$$

при этом

$$m_i = \frac{2A}{3(2\varepsilon_i^2 - 3A)},$$

а ε_i – корни кубического уравнения

$$\varepsilon_i^3 - \frac{9}{2}A\varepsilon_i - \frac{9}{2}B = 0.$$

На основании этого примера и ряда других выкладок, которые мы здесь опускаем, можно сделать следующие выводы:

1). Для любого натурального n существует уравнение Абеля второго рода, общее решение которого представимо по формуле (2) через набор n частных. Однако, как следует из теоремы Ли, **не существует** нетривиального уравнения Абеля второго рода, обладающего фундаментальной системой решений. Это никоим образом не противоречит полученному результату – частные решения α_i **не являются произвольными**.

2). Для каждого заданного n можно выписать $n-1$ определяющую систему. Среди них всегда найдется система, решения которой соответствуют значениям $n_1 = n-k$, где $k = 1, \ldots, n-2$.

3). Функции $\alpha_i(x)$ могут быть найдены из решения алгебраического уравнения степени $n-1$, а величины m_i – также из решения алгебраического уравнения степени n.

Второе направление является развитием доказанной В.Ф.Зайцевым [4] теоремы, в которой утверждается, что если известно преобразование $p = \psi(\zeta, q)$, $\xi = \varphi(\zeta, q)$, переводящие уравнение $pp' - p = R(\xi)$ в уравнение $qq' - q = Q(\zeta)$, то пара (p, ξ) является параметрической формой частного интеграла двух однопараметрических семейств уравнений Абеля

$$p\frac{dp}{d\xi} - p = R(\xi) + q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^{-1} P(\zeta, q), \quad (\zeta - \text{параметр})$$

и

$$p\frac{dp}{d\xi} - p = R(\xi) - [Q(\zeta) + q]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \zeta}\right)^{-1} P(\zeta, q), \quad (q - \text{параметр}),$$

где

$$P(\zeta, q) = \frac{1}{q}\left\{\psi\frac{\partial\psi}{\partial q} - [\psi + R(\varphi)]\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right\},$$

а пара (q, ζ) является параметрической формой частного интеграла других двух однопараметрических семейств уравнений Абеля

$$q\frac{dq}{d\zeta} - q = Q(\zeta) + p\left(\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial p}\right)^{-1} \tilde P(\xi, p), \quad (\xi - \text{параметр})$$

и

$$q\frac{dq}{d\zeta} - q = Q(\zeta) - [R(\xi) + p]\left(\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial \xi}\right)^{-1} \tilde P(\xi, p), \quad (p - \text{параметр}),$$

где

$$\tilde P(\xi, p) = \frac{1}{p}\left\{\tilde\psi\frac{\partial\tilde\psi}{\partial p} - \left[\tilde\psi + Q(\tilde\varphi)\right]\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial p}\right\},$$

$q = \tilde\psi(p, \xi)$, $\zeta = \tilde\varphi(p, \xi)$.

Эта теорема может быть обобщена для любых уравнений первого порядка. Пусть известно преобразование $y = \varphi(t, u), x = \psi(t, u)$, переводящее уравнение $y' = f(x, y)$ в уравнение $\dot u = g(t, u)$. Тогда пара (y, x) является параметрической формой частного интеграла двух однопараметрических семейств уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^{-1} P(t,u) \quad (t - \text{ параметр})$$

и

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^{-1} P(t,u)g(t,u) \quad (u - \text{ параметр}),$$

а пара (u,t) будет параметрической формой частного интеграла двух однопараметрических семейств уравнений

$$\frac{du}{dt} = g(t,u) + \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}\right)^{-1} \tilde{P}(t,u) \quad (x - \text{ параметр})$$

и

$$\frac{du}{dt} = g(t,u) - \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}\right)^{-1} \tilde{P}(x,y)f(x,y) \quad (y - \text{ параметр}),$$

где $(\tilde{\psi}, \tilde{\varphi})$ – обратное преобразование, а функции $P, \tilde{P}$ представляют собой выражение, аналогичное соответствующим функциям в теореме об уравнениях Абеля.

Пример 2. Уравнение

$$pp' - p = 6\xi + A\xi^{-4}$$

преобразованием

$$\begin{cases} p = -4\zeta^{4/3}\left[(q-3\zeta)^2 \mp 225\zeta^{-3}\right], \\ \xi = \zeta^{4/3}(q-3\zeta)^2 \end{cases}$$

переводится в уравнение

$$qq' - q = 20\zeta + A\zeta^{-1/2}.$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что заданная параметрически функция

$$\begin{cases} y = -4\zeta^{4/3}\left[(3\zeta-a)^2 \mp 225\zeta^{-3}\right], \\ x = \zeta^{4/3}(3\zeta-a)^2 \end{cases}$$

является, например, частным решением однопараметрического семейства уравнений Абеля с правой частью, заданной в параметрической форме

$$\begin{cases} y\dfrac{dy}{dx} - y = 6\zeta^{4/3}(3\zeta-a)^2 + A\zeta^{-16/3}(3\zeta-a)^{-8} + \\ \qquad + \dfrac{3\zeta^{2/3}(20\zeta + A\zeta^{-1/2} + a)\left[6\zeta^3(3\zeta-a)^2 - A\zeta^{-11/3}(3\zeta-a)^{-8} \mp 2700\right]}{a(15\zeta-2a)}, \\ x = \zeta^{4/3}(3\zeta-a)^2. \end{cases}$$

Таким образом, очевидно, что знание дискретной группы преобразований или отображения классов уравнений дает нам частный интеграл некоторого (другого) семейства уравнений.

2. **Уравнения высших порядков**. Для уравнений высших порядков алгоритмические методы поиска дискретных групп существуют и достаточно эффективны (для уравнений второго порядка – точечные преобразования, для третьего и выше – и преобразования Беклунда), однако трудоемкость их применения резко возрастает с ростом порядка уравнения. К настоящему времени апробированы три возможности упрощения алгоритмов:

а) использование частных решений и первых интегралов для решения определяющих систем;

б) обобщение теоремы З.Н.Хакимовой [5] о частном решении;

в) применение первого интеграла для расширения группы независимо от полной интегрируемости уравнения.

Первая идея вытекает из общеизвестного факта [5], что определяющая система в общем случае содержит уравнение, эквивалентное исходному, но записанное в переменных (f, g), являющихся элементами искомого преобразования. Легко показать, что частные решения в данном случае непригодны, так как обращают якобиан преобразования в нуль в силу зависимости $f = f(g)$. Поэтому положительный результат может быть получен лишь при использовании первого интеграла (или общего решения), в котором произвольная константа – некоторая функция (пока неизвестная) другой переменной. На примере обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера было показано, что новой информации получить не удается, так как решениями являются точечные преобразования, уже известные из анализа определяющей системы, а преобразования Беклунда получены быть не могут в силу того, что определяющая система выписана в предположении $f_{\dot{u}} = g_{\dot{u}} = 0$. Впрочем, для строгого доказательства этого факта необходим учет структуры определяющей системы в зависимости от вида искомого преобразования, так как для преобразований Беклунда некоторых подклассов уравнений знание первого интеграла позволяет расширить группу (об этом см. ниже).

Обобщение теоремы З.Н.Хакимовой можно проводить в двух направлениях – распространением выводов теоремы на более широкий класс уравнений (переходя от степенных функций от x к произвольным функциям и, возможно, рассматривая дробные степени y и производных) и доказательством достаточности условий теоремы для более узких классов уравнений. Обе эти возможности основываются на анализе получающейся алгебраической определяющей системы, который позволяет оценить совместность и количество решений в зависимости от порядка уравнения, и строения и количества слагаемых в правой части.

Хорошим примером служит найденное В.Ф.Зайцевым [6] обобщение теоремы на класс уравнений

$$y'' = f(x)y^2. \tag{5}$$

Подстановка

$$y = F(x)u + G(x) \tag{6}$$

приводит к уравнению

$$u'' + \frac{2F'}{F}u' = fFu^2 + \left(2fG - \frac{F''}{F}\right)u + \frac{fG^2 - G''}{F}, \tag{7}$$

причем для того, чтобы в правой части уравнения (7) осталось только одно слагаемое, необходимо положить

$$G'' = fG^2, \tag{8}$$

$$F'' = 2fFG. \tag{9}$$

Первое уравнение (8) совпадает с исходным, и по каждому его частному решению из линейного уравнения (9) найдется некоторая конкретная функция $F(x)$. Для перевода уравнения (7) в класс (5) необходимо выполнить еще подстановку

$$x = H(t), \tag{10}$$

которая при

$$\frac{dH}{dt} = CF^2(H)$$

приводит к уравнению

$$\ddot{u} = f\big(H_i(t)\big)\,\big[F\big(H_i(t)\big)\big]^5\,u^2,$$

где i – номер частного решения уравнения (8). Таким образом, по k частным решениям исходного уравнения строится k $\mathfrak{u}$-подобных образующих дискретной группы на классе (5). Простота доказательства объясняется тем, что преобразования (6) и (10) "развязаны": подстановка (10) существенно изменяет лишь коэффициент при слагаемом с первой производной $\dot{u}$.

Аналогично использованию частных решений при построении расширений дискретных групп можно применять и первые интегралы. В обоих случаях принципиально важным является то обстоятельство, что возможность построения расширения не зависит от знания общего решения. Хорошей иллюстрацией может служить исследование автономного подкласса обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера, выполненное И.Ю.Аржанниковой и В.Ф.Зайцевым [7]. Оказывается, что метод RF-пар в этом случае дает одну образующую, специальное преобразование автономного уравнения – еще две, а применение первого интеграла – еще шесть (!). При этом известное общее решение этого подкласса уравнений нигде не используется.

Список литературы

[1] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Пер. с англ. под ред. А.М.Эфроса. – Харьков: ОНТИ, 1939. – 719 с.

[2] Коялович Б.М. Исследования о дифференциальном уравнении $ydy - ydx = Rdx$. – СПб: Академия Наук, 1984. – 261 с.

[3] Богатушин И.Я., Зайцев В.Ф. Об одной форме общего интеграла нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – Тула: ТПИ, 1989. – С.13-15.

[4] Зайцев В.Ф., Кормилицына Т.В. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений, ч.2. – Л.: ЛГПИ, 1985, деп. в ВИНИТИ №3720-85. – 150 с.

[5] Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Дискретно-групповой анализ дифференциальных уравнений. Методы и алгоритмы. Препринт №84. – Л.: ЛИИАН, 1988. – 66 с.

[6] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Дискретно-групповой метод интегрирования уравнений нелинейной механики. Препринт №339. – М.: ИПМ АН СССР, 1988. – 44 с.

[7] Аржанникова И.Ю., Зайцев В.Ф. и др. Современный групповой анализ: методы и приложения. Дискретно-групповой анализ. Препринт №107. – Л.: ЛИИАН, 1989. – 58 с.