ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2001
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА

Р.В.Пелюхов

Российский Государственный Педагогический
Университет им. А.И.Герцена
Санкт-Петербург

Общим решением в конечном (замкнутом) виде обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка $y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ называется аналитическое выражение, заданное конечным числом формул, связывающих переменные x, y и n независимых произвольных констант C_i, которое при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Такое выражение подразумевает отсутствие бесконечных рядов.

Среди групповых подходов к поиску решений (в замкнутом виде) дифференциальных уравнений различают два основных подхода – классический групповой анализ (предложенный Софусом Ли [1]) основанный на теории непрерывных групп преобразований, и дискретно групповой анализ (предложенный В.Ф.Зайцевым [2]).

Процедура понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется (при использовании аппарата непрерывных групп преобразований) с помощью группы точечных преобразований

$$t = \varphi(x, y, a), \quad u = \psi(x, y, a),$$

которая однозначно определяется своим касательным векторным полем с соответствующим инфинитезимальным (точечным) оператором

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Таким образом, точечный оператор имеет вполне конкретный вид. Однако, можно отказаться от такого вида и рассмотреть формальный (нелокальный) оператор

$$X = \Phi(x,y,y',\,\dots)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Ясно, что точечные операторы являются частным случаем нелокальных операторов, так как могут быть представлены в виде

$$X = \big[\eta(x,y) - y'\xi(x,y)\big]\frac{\partial}{\partial y}.$$

Теория формальных операторов (впервые предложена В.Ф.Зайцевым [3]), представляющая собой пока еще мало исследованную ветвь направления, может быть эффективно применена к решению дифференциальных уравнений (факторизация уравнения до системы специального вида, где одно из уравнений можно решить). Одна из проблем теории – множественность видов формальных операторов (в классическом групповом анализе, в основном, рассматривались только точечные операторы).

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' = F(x,y,y')$$

и оператор

$$X = \left[\xi(x,y) + \eta(x,y)I\right]\partial_y \equiv \hat{\eta}\partial_y,$$

где $I = \displaystyle\int \zeta(x,y)\,dx$ – нелокальная переменная, а интеграл – полный, т.е. $D_x[I] = \zeta(x,y)$. Исследуем, допускается ли такой оператор уравнением 2-го порядка, и какими должны быть функции ξ,η,ζ,F (если оператор допускается).

В этом случае определяющее уравнение имеет вид:

$$(\xi + \eta I)\frac{\partial F}{\partial y} + (\xi_x + y'\xi_y + \eta_x I + y'\eta_y I + \eta\zeta)\frac{\partial F}{\partial y'} = D_x^2[\hat{\eta}]$$

где

$$D_x^2[\hat{\eta}] = \big(\eta_{xx} + 2y'\eta_{xy} + y''\eta_y + {y'}^2\eta_{yy}\big)I\xi_{xx} + 2y'\xi_{xy} + \\ + y''\xi_y + {y'}^2\xi_{yy} + 2y'\eta_y\zeta + y'\eta\zeta_y + 2\eta_x\zeta + \eta\zeta_x.$$

Определяющая система имеет вид:

$$I: \quad \eta\frac{\partial F}{\partial y} + (\eta_x + y'\eta_y)\frac{\partial F}{\partial y'} - \eta_{xx} - 2y'\eta_{xy} - F\eta_y - {y'}^2\eta_{yy} = 0, \qquad (1)$$

$$I^0: \quad \xi\frac{\partial F}{\partial y} + (\xi_x + y'\xi_y + \eta\zeta)\frac{\partial F}{\partial y'} - F\xi_y - \xi_{xx} - 2y'\xi_{xy} - {y'}^2\xi_{yy} - $$
$$-2\eta_x\zeta - 2y'\eta_y\zeta - \eta\zeta_x - y'\eta\zeta_y = 0. \qquad (2)$$

Первое уравнение системы рассматриваем как уравнение в частных производных относительно функции F, решая которое, получаем:

$$F = \eta\left\{\Phi(x,u) + \int\left[\frac{\eta_{xx}}{\eta^2} + \frac{2\eta_{xy}}{\eta}\left(u + \int\frac{\eta_x}{\eta^2}\,dy\right) + \eta_{yy}\left(u + \int\frac{\eta_x}{\eta^2}\,dy\right)^2\right]dy\right\}$$

где $u = \eta^{-1}y' - J$, $\Phi(x,u)$ – произвольная функция двух переменных x, u,

$$J = \int\frac{\eta_x}{\eta^2}\,dy.$$

Так как все интегралы в записи функции F частные, u под знаками таких интегралов – константа. После преобразований получаем

$$F = \eta\Phi(x,u) + \frac{\eta_y}{\eta}{y'}^2 + 2\frac{\eta_x}{\eta}y' + H(x,y),$$

где $H(x,y) = \eta J_x - 2\eta_x J$. Подставляем найденную функцию F и её частные производные по y, y' во второе уравнение системы получаем:

$$\xi\left[\eta_y\Phi - \frac{\eta_y}{\eta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}y' - \frac{\eta_x}{\eta}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + {y'}^2\frac{\eta\eta_{yy} - \eta_y^2}{\eta^2} + 2y'\frac{\eta\eta_{xy} - \eta_x\eta_y}{\eta^2} + \frac{\partial H}{\partial y}\right] +$$
$$+\xi_x\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u} + 2\frac{\eta_y}{\eta}y' + 2\frac{\eta_x}{\eta}\right] + \xi_y\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}y' - \eta\Phi + \frac{\eta_y}{\eta}{y'}^2 - H\right] +$$
$$+\eta\zeta\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \xi_{xx} - 2y'\xi_{xy} - {y'}^2\xi_{yy} - \eta\zeta_x - y'\eta\zeta_y = 0.$$

Это уравнение можно расщеплять по $\frac{\partial\Phi}{\partial u}y'$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$, Φ, ${y'}^2$, y', ${y'}^0$, если функция Φ – «общего» вида , т.е. ${y'}^2$, y' не входят в неё явно (в противном случае отсутствовали бы выражения вида $\frac{\partial\Phi}{\partial u}y'$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$, Φ, и такое расщепление было бы невозможно) или по ${y'}^2$, y', ${y'}^0$ и другим натуральным степеням y' (если они присутствуют) – в случае явной зависимости функции Φ

от натуральных степеней y'. В первом случае получаем систему:

$$
\begin{array}{lcl}
\left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} y'\right] & : & -\dfrac{\eta_y}{\eta}\xi + \xi_y = 0, \\
\left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\right] & : & -\dfrac{\eta_x}{\eta}\xi + \xi_x + \eta\zeta = 0, \\
[\Phi] & : & \xi\eta_y - \xi_y\eta = 0, \\
\left[{y'}^2\right] & : & \dfrac{\eta\eta_{yy} - \eta_y^2}{\eta^2}\xi + \dfrac{\eta_y}{\eta}\xi_y - \xi_{yy} = 0, \\
[y'] & : & 2\dfrac{\eta\eta_{xy} - \eta_x\eta_y}{\eta^2}\xi + 2\dfrac{\eta_y}{\eta}\xi_x - 2\xi_{xy} - \eta\zeta_y = 0, \\
\left[{y'}^0\right] & : & \dfrac{\partial H}{\partial y}\xi + 2\dfrac{\eta_x}{\eta}\xi_x - \xi_{xx} - H\xi_y - \eta\zeta_x = 0.
\end{array}
$$

Первое уравнение системы совпадает с третьим, и является обыкновенным однородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно функции ξ (или относительно функции η), решая которое, находим $\xi = c(x)\eta$, где $c(x)$ произвольная функция переменного x. Подставляя найденную функцию ξ во второе уравнение системы, получаем $\eta \equiv 0$ или $\zeta = -c'(x)$, т.е. оказывается, что функция ζ зависит только от x. В обоих случаях оператор $X = \hat{\eta}\partial_y$ является точечным, а предполагалось, что он нелокальный!

Обратимся теперь к случаю явной зависимости функции Φ от натуральных степеней y'. Такая зависимость будет, например, если Φ – полином степени $n > 1$ по переменной u (ведь $u = \eta^{-1}y' - J$)

$$\Phi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) u^i.$$

Удобно записать эту функцию и её частную производную $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ в виде полиномов по степеням y':

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{k=0}^{i}(-1)^{k+i}C_{n-k}^{i-k}\varphi_{n-k}J^{i-k}\right]\left(\frac{y'}{\eta}\right)^{n-i}, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{i}(-1)^{k+i}C_{n-k-1}^{i-k}(n-k)\varphi_{n-k}J^{i-k}\right]\left(\frac{y'}{\eta}\right)^{n-i-1}.
\end{aligned}
$$

Первые два уравнения системы имеют вид:

$$\left[y'^n\right] \quad : \quad (n-1)\frac{\varphi_n}{\eta^n}\left(\xi\eta_y - \xi_y\eta\right) = 0,$$

$$\left[y'^{n-1}\right] \quad : \quad \left[n(n-2)\varphi_n J + (2-n)\varphi_{n-1}\right]\left[\frac{\xi_y}{\eta^{n-2}} - \frac{\xi\eta_y}{\eta^{n-1}}\right] + \\ + \frac{n\varphi_n}{\eta^n}\left(-\xi\eta_x + \xi_x\eta + \zeta\eta^2\right) = 0.$$

Из первого уравнения получаем $\xi = c(x)\eta$ (т.к. $\varphi_n \neq 0$ и $n \neq 1$). Подставляя найденную функцию ξ во второе уравнение системы, получаем $\eta \equiv 0$ или $\zeta = -c'(x)$, т.е. функция ζ зависит только от x. Заметим, что эти уравнения будут иметь такой вид, если $n \geqslant 4$ (действительно, если $n \leqslant 3$, то во второе уравнение добавятся слагаемые: $\xi_y\eta_y/\eta$, $-\xi_{yy}$, и такие случаи нужно рассматривать отдельно).

Опуская соответствующие системы и сопутствующие выкладки, при $n = 3$ опять получаем $\zeta = -c'(x)$, а при $n = 2, 1$ функция ζ будет зависеть от переменной y (однако, вопрос о характере зависимости остаётся открытым). Итак, при $n \geqslant 3$ получаем тот же результат, что и в случае произвольной функции Φ.

Рассмотрим теперь эту задачу для уравнения

$$y'' = F(x, y).$$

В этом случае определяющее уравнение имеет вид

$$(\xi + \eta I)\frac{\partial F}{\partial y} = D_x^2\left[\hat{\eta}\right],$$

определяющая система имеет вид:

$$\left[y'^2 I\right] \quad : \quad \eta_{yy} = 0, \tag{3}$$

$$\left[y' I\right] \quad : \quad \eta_{xy} = 0, \tag{4}$$

$$\left[I\right] \quad : \quad \eta\frac{\partial F}{\partial y} - \eta_{xx} - F\eta_y = 0, \tag{5}$$

$$\left[y'^2\right] \quad : \quad \xi_{yy} = 0, \tag{6}$$

$$\left[y'\right] \quad : \quad -2\xi_{xy} - 2\eta_y\zeta - \eta\zeta_y = 0, \tag{7}$$

$$\left[y'^0\right] \quad : \quad \xi\frac{\partial F}{\partial y} - \xi_{xx} - F\xi_y - 2\eta_x\zeta - \eta\zeta_x = 0. \tag{8}$$

Из уравнений (3),(4),(6) находим

$$\xi = g(x)y + f(x), \quad \eta = ay + b(x),$$

где $g(x), f(x), b(x)$ – произвольные функции переменного x, a – константа. Используя это, из уравнения (5) находим

$$F = A(x)y + B(x),$$

где $A(x) = au(x), B(x) = b(x)u(x) - b''(x)/a$, $u(x)$ – произвольная функция. Далее, из уравнения (7) находим

$$\zeta = \frac{F_1(x)y^2 + F_2(x)y + F_3(x)}{[ay + b(x)]^2}, \tag{9}$$

где $F_1(x) = -ag'(x), F_2(x) = -2b(x)g'(x), F_3(x)$ – произвольная функция. Наконец, из уравнения (8) получаем

$$\zeta = \frac{q(y) + \Phi_1(x)y^2 + \Phi_2(x)y + \Phi_3(x)}{[ay + b(x)]^2}, \tag{10}$$

где $\Phi_1(x) = -ag'(x)$,

$$\Phi_1(x) = -\int \left[g''(x)b(x) + as(x)\right] dx, \quad \Phi_3(x) = -\int s(x)b(x)\, dx,$$

$s(x) = -f(x)A(x) + g(x)B(x) + f''(x)$, $q(y)$ – произвольная функция переменного y. Видно, что $F_1(x) = \Phi_1(x)$; пусть $q(y) \equiv 0$, $F_2(x) = \Phi_2(x)$, $F_3(x) = \Phi_3(x)$ (при этих условиях функция ζ будет иметь вид (9)). Заметим, что можно было решать только уравнение (7), затем подставить найденную функцию ζ в уравнение (8), которое расщепляется по степеням переменной y. Тогда получается система из пяти уравнений, решая которую, придем к условиям $F_2(x) = \Phi_2(x), F_3(x) = \Phi_3(x)$ (но этот подход более трудоемкий).

При $a = 0$ функции F, ζ будут иметь более простой вид

$$F = \frac{b''(x)}{b(x)}y + l(x), \quad \zeta = \tilde{F}_2(x)y + \tilde{F}_3(x)$$

с условиями

$$q(y) \equiv 0, \quad \tilde{F}_2(x) = \tilde{\Phi}_2(x), \quad F_3(x) = \Phi_3(x),$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_2(x) &= -\frac{2g'(x)}{b(x)}, \\
\tilde{F}_3(x) &= \frac{F_3(x)}{b^2(x)}, \\
\tilde{\Phi}_2(x) &= -\frac{1}{b^2(x)} \int g''(x) b(x) dx, \\
\tilde{\Phi}_3(x) &= -\frac{1}{b^2(x)} \int s(x) b(x) dx,
\end{aligned}$$

$F_3(x)$, $\Phi_3(x)$ – прежние, $l(x)$ – произвольная функция переменного x.

Заключение: Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' = F(x, y, y')$$

допускает нелокальный оператор

$$X = \hat{\eta}\partial_y,$$

если

$$F = \eta\Phi(x, u) + \frac{\eta_y}{\eta} y'^2 + 2\frac{\eta_x}{\eta} y' + H(x, y),$$

причём

$$\Phi(x, u) = \varphi_2(x) u^2 + \varphi_1(x) u + \varphi_0(x).$$

Если функция Φ – полином (по переменной u) степени $n \geqslant 3$ или функция общего вида, то оператор будет локальным и такой результат не подходит по условию задачи. Если функция F зависит только от переменных x, y, то функции ξ, η, F зависят от переменной y линейно, а ζ – дробно-рациональная функция, числитель и знаменатель которой суть полиномы второй степени по переменной y. Заметим, можно получить нетривиальный результат (имеется ввиду, что переменная I не является локальной т.е. функция ζ зависит от переменной y), если повысить порядок уравнения на единицу или брать функцию ζ в виде $\zeta = \zeta(x, y, y')$. В первом случае алгоритм решения такой же как и для уравнения $y'' = F(x, y, y')$ (решаем первое уравнение исходной системы как уравнение в частных производных относительно функции F, затем подставляем функцию F во второе уравнение системы, которое расщепляем и находим функцию ζ. Расщепление возможно будет другим в силу того, что функция F будет иметь вид, отличный от получаемого выше и находим функцию ζ), во втором случае нужно знать частное решении исходного уравнения $y'' = F(x, y, y')$ (тогда можно решать второе уравнение исходной системы как уравнение в частных производных относительно функции ζ). Этот результат не является следствием изложенных выше выкладок, а требует индивидуального рассмотрения.

Также отметим, что для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad \frac{\partial F}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y^j} \neq 0, \quad j = 0 \div (n-1) \tag{11}$$

и оператора произвольного вида

$$X = \Phi(I)\frac{\partial}{\partial y} \quad , \tag{12}$$

где $I = \int \zeta(x, y, y', \ldots, y^{(n)}, \ldots)dx$, $\zeta : R^\infty \to R$, функция бесконечного числа переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n)}, \ldots$ справедливы следующие утверждения:

1.1 ОДУ (11) не допускает нелокального оператора (12), если функция Φ линейно независима с функциями $\Phi_k = \frac{d^k\Phi}{dI^k}$ и $\frac{d^k\Phi}{dI^k} \neq 0$ для всякого натурального k.

1.2 ОДУ (11) не допускает нелокального оператора (12), если функция Φ линейно независима с функциями $\Phi_k = \frac{d^k\Phi}{dI^k}$ и $\frac{d^k\Phi}{dI^k} = 0$ для некоторого натурального k .

Замечание: Из условия утверждения следует, что $\Phi(I) = A_0 + A_1 I + + \ldots + A_{k-1}I^{k-1}$ $(A_{k-1} \neq 0)$. Утверждение верно, если A_i, $i = 0 \div k-1$ **константы**! Случай, когда $A_l = A_l(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $i = 0 \div k-1$ требует отдельного рассмотрения.

2.1 Если функции Φ и Φ'_I функционально зависимы (т.е. $\Phi'_I = \Psi(\Phi)$), то для уравнения первого порядка $y' = F(x, y)$ оператор $X = \Phi(I)\partial_y$ является экспоненциальным нелокальным оператором и имеет вид

$$X = \exp\left(\int F_y\, dx\right)\partial_y.$$

2.2 Если функции Φ, Φ'_I, Φ''_{II} функционально зависимы, то уравнение второго порядка $y'' = F(x, y, y')$ допускает нелокальный оператор вида

$$X = \frac{1}{2}\Big\{\exp[k(c_1 + I)] - p^2 \exp[-k(c_1 + I)]\Big\}\partial_y,$$

где $k = \pm\sqrt{b}$, c_1 – константа, а p, b – функции переменных x, y, y', …, $y^{(n)}$, … (в общем случае).

Список литературы

[1] Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. – М.: Знание, сер. “Математика и кибернетика”, №8, 1989.

[2] Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа. – М.: Знание, сер. “Математика и кибернетика”, №7, 1991.

[3] Зайцев В.Ф. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений, ч.1. – Л.: ЛГУ, деп. В ВИНИТИ №5739–82 Деп от 22.11.82.

[4] Zaitsev V.F. Universal description of symmetries on a basis of the formal operators // Math. Research, vol. 7. “Theory and practice of differential equations” – St.Petersburg: SPbSTU, 2000.