ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2001
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.А. Васильева

Российский Государственный Педагогический
Университет им. А.И.Герцена
Санкт-Петербург

Настоящая работа посвящена поиску классов нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений старших порядков, обладающих фундаментальными системами решений. В последнее время интерес к таким уравнениям резко возрос (см., например, [2], [4]). Фундаментальные системы позволяют находить общие решения дифференциальных уравнений с помощью конечного числа частных решений. Кроме того, нелинейные законы суперпозиции играют важную роль при моделировании различных процессов и явлений. В определении и поиске нелинейных принципов суперпозиции ключевым является понятие фундаментальные системы решений.

***Определение* 1** [1]. Говорят, что система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i = F^i\big(t, x^1, \dots, x^n\big), \quad i = \overline{1,n} \tag{1}$$

обладает фундаментальной системой решений, если общее решение этой системы выражается явно через конечное число m произвольно выбранных частных решений $x_k = \big(x_k^1, \dots, x_k^n\big), \quad k = \overline{1,m}$ с помощью формул, содержащих n произвольных констант:

$$x^i = \varphi^i \left(x_1, \, \ldots \, , x_m, \, C_1, \, \ldots \, , C_n \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

***Определение* 2** [1]. Частные решения x_k, которые считаются функционально независимыми, называются **фундаментальной системой решений** (ФСР) системы (1).

Замечание. Используемое в определении 2 понятие "функциональная независимость" никак не определяется, и, возможно, его применение вызвано стремлением автора обобщить понятие линейной независимости, которое фигурирует в определении ФСР системы линейных дифференциальных уравнений.

Естественно, возникает вопрос о принципиальной возможности построения для нелинейной системы обыкновенных уравнений аналогичной формулы, определяющей общее решение данной системы через m в некотором смысле различных частных решений.

Существует классическая теорема Ли, которая дает критерий существования ФСР для заданной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта теорема формулируется следующим образом [1].

Теорема (С.Ли). Система уравнений (1) обладают ФСР, если они представимы в специальном виде:

$$\dot{x}^i = T_1(t)\xi_1^i(x) + \, \ldots \, + T_r(t)\xi_r^i(x), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

так, что операторы

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

образуют r-мерную алгебру Ли. При этом число m необходимых частных решений оценивается как $nm \geqslant r$.

Замечание. Теорема дает критерий лишь для систем дифференциальных уравнений первого порядка, поэтому ее применение для дифференциальных уравнений старших порядков весьма затруднительно в силу неоднозначности их представления в виде системы. Поэтому построение классов уравнений старших порядков, обладающих ФСР, является актуальной и интересной задачей.

Как известно, уравнение Риккати

$$z' + z^2 + f(x)z + g(x) = 0$$

обладает следующим интересным свойством: подстановкой $z = y'/y$ оно сводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка. И задача нахождения его ФСР решается непосредственным применением теоремы Ли.

Рассмотрим теперь класс уравнений

$$z'' + 3zz' + z^3 + f(x)z' + f(x)z^2 + g(x)z + h(x) = 0, \tag{3}$$

которые подстановкой $z = y'/y$ сводятся к линейному дифференциальному уравнению третьего порядка, и в этом смысле являются аналогом уравнения Риккати. Уравнения (3) представляются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая имеет вид (2):

$$\begin{cases} z' = p - z^2, \\ p' = -(f(x)p + pz + g(x)z + h(x), \end{cases} \tag{3}$$

где $p = y''/y$.

Уравнения в системе (4) содержат слагаемые не выше второй степени, что дает нам возможность предполагать, что применение к ней теоремы Ли даст конечномерную алгебру Ли. Однако прямая подстановка коэффициентов ξ_i не дает требуемого результата. Поэтому вместо системы (4) рассмотрим систему

$$\begin{cases} v' = A_1(x)u + B_1(x)v - \beta v^2 - \alpha uv + C_1(x), \\ u' = A_2(x)u + B_2(x)v - \beta uv - \alpha u^2 + C_2(x), \end{cases} \tag{4}$$

где

$$C_1(x) = \frac{a(c - \gamma^2 - \gamma') + \alpha(c' + fc + c\gamma + g\gamma + h)}{a\beta - \alpha b},$$
$$C_2(x) = \frac{b(c - \gamma^2 - \gamma') + \beta(c' + fc + c\gamma + g\gamma + h)}{\alpha b - a\beta}.$$

Система (5) связана с исходной следующим общим линейным преобразованием:

$$\begin{cases} p = au + bv + c, \\ z = \alpha u + \beta v + \gamma, \qquad a\beta - \alpha b \neq 0. \end{cases}$$

В нашем случае линейное преобразование как бы “проявляет” алгебру операторов уравнения (3). И если из системы (4) абсолютно неочевидно какой вид будет иметь ее алгебра Ли, то система (5) сразу дает следующий набор операторов

$$X_1 = u\partial_v + v\partial_u, \quad X_2 = v\partial_v + u\partial_u, \quad X_3 = uv\partial_v + u^2\partial_u,$$
$$X_4 = v^2\partial_v + uv\partial_u, \quad X_5 = \partial_v + \partial_u.$$

Вычисление коммутаторов этих операторов показывает, что они образуют 7-мерную алгебру Ли. При этом добавляются еще два оператора:

$$X_6 = u\partial_v + u\partial_u, \quad X_7 = v\partial_v + v\partial_u.$$

Результаты вычислений представлены в таблице:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	0	X_4	X_3	$-X_1$	$X_7 - X_6$	$X_6 - X_7$
X_2	0	0	X_3	X_4	$-X_1$	0	0
X_3	$-X_4$	$-X_3$	0	0	$-X_2 - X_7$	$-X_3$	$-X_4$
X_4	$-X_3$	$-X_4$	0	0	$-X_2 - X_7$	$-X_3$	$-X_4$
X_5	X_1	X_1	$X_2 + X_7$	$X_2 + X_7$	0	X_5	X_5
X_6	$X_6 - X_7$	0	X_3	X_3	$-X_5$	0	$X_6 - X_7$
X_7	$X_7 - X_6$	0	X_4	X_4	$-X_5$	$X_7 - X_6$	0

Таким образом, по теореме Ли класс уравнений (3) обладает ФСР, и для ее построения необходимо знать минимум четыре частных решения (оценка $nm \geqslant r$, при $n = 2, r = 7$).

Замечание. Если $C_1(x) = C_2(x) = 0$, то алгебра Ли уравнения (5) становится четырехмерной (порождается операторами X_3, X_4, X_6, X_7). Действительно,

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \quad \begin{cases} aT_1 - \alpha T_2 = 0 \\ bT_1 - \beta T_2 = 0 \end{cases},$$

где

$$T_1 = \gamma' + \gamma^2 - C, \quad T_2 = C' + Cf + C\gamma + g\gamma + h.$$

Так как $a\beta - \alpha b \neq 0$, то имеем $T_1 = T_2 = 0$, т.е.

$$\begin{cases} C = \gamma' + \gamma^2, \\ C' + Cf + C\gamma + g\gamma + h = 0. \end{cases}$$

Подставим $C = \gamma' + \gamma^2$ во второе уравнение, получим:

$$\gamma'' + 3\gamma\gamma' + \gamma^3 + f\gamma' + f\gamma^2 + g\gamma + h = 0.$$

Таким образом, γ – некоторое частное решение уравнения (5). Поскольку проведенные действия можно обратить, получается, что если нам известно какое-нибудь частное решение γ уравнения (5), то $C_1(x) = C_2(x) = 0$, и алгебра Ли уравнения (5) становится четырехмерной. И в этом случае для построения общего решения нам необходимо знать еще минимум два частных решения (оценка $nm \geqslant r,\ n = 2,\ r = 4$).

Построенный пример не является единственным. Так, например, в [2] рассматривается уравнение, встречающееся в нелинейной оптике:

$$\ddot{y} = \frac{\dot{y}^2}{y} + \left(2y^2 - \frac{1}{t}\right)\dot{y} + \frac{y^3}{t}.$$

Н.Х.Ибрагимов показал, что ФСР этого уравнения состоит из одной функции. Действительно, данное уравнение можно представить в виде следующей системы

$$\frac{dz}{dx} = zy^2 - \frac{z}{2x}, \quad \frac{dy}{dx} = z^2y - \frac{y}{2x},$$

которая имеет вид, требуемый в теореме 1. Эта система допускает двумерную алгебру Ли L_2, порожденную операторами

$$X_1 = y^2z\partial_z + z^2y\partial_y, \quad X_2 = z\partial_z + y\partial_y.$$

Оценка $nm \geqslant r\,(n = 2, r = 2)$ записывается в виде $m \geqslant 1$. Оказывается, что одного частного решения достаточно для выражения общего. И нелинейная суперпозиция имеет вид:

$$\frac{z^2 - y^2}{z_1^2 - y_1^2} = C_1, \quad \ln z - \ln y - \frac{z^2 - y^2}{z_1^2 - y_1^2}(\ln z_1 - \ln y_1) = C_2.$$

В целом, полученные результаты дают представление о том, что поиск ФСР для нелинейных дифференциальных уравнений старших порядков является нетривиальной задачей, поскольку в теореме Ли не указываются механизмы построения общих классов уравнений, обладающих ФСР. Поэтому рассмотрение каждого отдельного класса дифференциальных уравнений требует применения некоторых специальных приемов и пока не поддается алгоритмизации.

Список литературы

[1] Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. – М.: Знание, сер. Математика и кибернетика, №8, 1989. – 48 с.

[2] Ibragimov N.H. Introduction to modern group analysis. – Ufa: Tau, 2000. – 113 pp.

[3] Зайцев В.Ф. Введение в современный групповой анализ. – СПб: РГПУ, 1996. – 40 с.

[4] Яковенко Г.Н. Принцип суперпозиций для нелинейных систем: Софус Ли и другие. – М.: МФТИ, 1997. – 100 с.