ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2001
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ТОПОЛОГИЯ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СПУТНИКА ПО ПАРАМЕТРУ ПРИ НАЛИЧИИ СИНГУЛЯРНОСТИ

И. И. Косенко

Россия, 141221, Московская обл., Пушкинский р-н, Черкизово-1,
ул. Трудовая, д. 7,
Московский государственный университет сервиса,
e-mail: cosenco@chat.ru

Аннотация.

Для случая уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите рассмотрена методика непрерывного продолжения решения системы ОДУ по параметру вплоть до его предельного значения, когда нарушается регулярность правых частей. Параметром является эксцентриситет орбиты. Его сингулярное значение, равное единице, соответствует случаю параболической орбиты. Применение интегральной метрики с весами в пространстве производных от фазовых переменных (касательном пространстве) играет “регуляризирующую” роль. Для приближенного представления решения можно использовать ряды Фурье в соответствующем

[0]Статья выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 99-01-00785, № 00-15-96150 и Министерства образования Российской Федерации, грант Т00-14.1-746

гильбертовом пространстве. Коэффициенты этих рядов непрерывно зависят от параметра, включая и точку сингулярности. Одновременно по независимой переменной автоматически обеспечивается равномерная аппроксимация функций фазовых переменных на любом компакте, не включающем точку разрыва правых частей при сингулярном значении параметра.

1. Введение

Рассматриваются колебания несимметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты [1] под действием гравитационных моментов, создаваемых притягивающим центром. Орбитальное движение считается заданным. Следуя работе [2] уравнение вращательного движения спутника относительно своего центра масс можно записать в виде

$$(1 - e\cos t)\ddot{\delta} - e\dot{\delta}\sin t + \mu\sin(\delta - 2\nu(t)) = 0. \tag{1}$$

Здесь e является эксцентриситетом кеплеровской орбиты центра масс спутника. В качестве независимой переменной t выбрана эксцентрическая аномалия ($t \in [0, 2\pi]$). Зависимой является переменная $\delta = 2\theta$, где θ есть угол отклонения одной из главных центральных осей спутника от направления на перицентр орбиты. Истинная аномалия $\nu(t)$ — известная функция независимой переменной, а μ — числовой параметр, характеризующий динамическую асимметрию спутника.

Пусть $x_1 = \delta$, $x_2 = \dot{\delta}$. Рассмотрим Эволюцию решения задачи Коши для получающейся из (1) системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{(e\sin t)x_2 + \mu\sin 2\nu(t)\cos x_1 - \mu\cos 2\nu(t)\sin x_1}{1 - e\cos t} \end{aligned} \tag{2}$$

с начальными условиями, заданными в середине отрезка определения решения: $x_i(t_0) = x_{i0}$ $(i = 1, 2)$, где $t_0 = \pi$. Эта эволюция исследуется в зависимости от изменения параметра $e \in [0, 1]$ — эксцентриситета орбиты. Параметр μ считается при этом фиксированным. Вместо e далее будут рассматриваться решения в зависимости от параметра $\varepsilon = 1 - e$. Ясно, что $\varepsilon \in [0, 1]$.

При $\varepsilon = 0$ система уравнений (2) имеет сингулярности, когда $t = 0, 2\pi$. Этот случай соответствует предельной орбите спутника, имеющей форму прямолинейного отрезка и допускающей его соударения с центром гравитации при $t = 0, 2\pi$. Кроме того, легко проверить, что при $\varepsilon \longrightarrow 0$ правые части системы (2) имеют неравномерный предел на интервале $(0, 2\pi)$.

В самом деле, легко проверить, что при любом фиксированном $t \in (0, 2\pi)$, когда параметр $e \longrightarrow 1$, функции

$$\cos\nu(t) \longrightarrow -1, \quad \sin\nu(t) \longrightarrow 0.$$

Легко также видеть, что эта сходимость неравномерна на интервале $t \in (0, 2\pi)$. Имеем — при $t = t_e = \arccos e$ для всех $e \in [0, 1)$ справедливы равенства

$$\cos\nu(t_e) = 0, \quad \sin\nu(t_e) = 1.$$

Поэтому при любом фиксированном $t \in (0, 2\pi)$, но также неравномерно на всем интервале $(0, 2\pi)$

$$\cos 2\nu(t) \longrightarrow 1, \quad \sin 2\nu(t) \longrightarrow 0.$$

2. Интегральная метрика

Чтобы “преодолеть” сингулярность при $\varepsilon = 0$ задачу Коши для системы уравнений (2) переформулируем в виде нелинейного интегрального уравнения в пространстве векторных функций со специально подобранной метрикой [3].

Система дифференциальных уравнений (2) может быть в пространстве производных $y_i = \dot{x}_i$ записана в виде системы интегральных уравнений вида

$$y_i = F_i(y_1, y_2, \varepsilon) \quad (i = 1, 2), \tag{3}$$

или

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, \varepsilon), \tag{4}$$

где в соответствии с [3, 5] нелинейный оператор правой части уравнения (4) следует определить по формулам

$$\begin{array}{rcl} [F_1(\mathbf{y}, \varepsilon)]\,(t) & = & x_2[y_2](t), \\ [F_2(\mathbf{y}, \varepsilon)]\,(t) & = & [1 - (1-\varepsilon)\cos t]^{-1}\left\{[(1-\varepsilon)\sin t]\, x_2[y_2](t) + \right. \\ & & +\mu \sin 2\nu(t) \cos x_1[y_1](t) - \\ & & \left. -\mu \cos 2\nu(t) \sin x_1[y_1](t)\right\}, \end{array} \tag{5}$$

где функции $x_i[y_i](t)$ $(i = 1, 2)$ вычисляются на отрезке $[0, 2\pi]$ из функций $y_i(t)$ при помощи оператора P взятия первообразной по формуле

$$x_i[y_i](t) = (Py_i)(t) = x_{i0} + \int\limits_{t_0}^{t} y_i(\tau)d\tau.$$

Для функции $y_1 = \dot{x}_1$ используем весовое пространство $L_2^{\omega_1}[0, 2\pi]$ с весом $\omega_1 = 1 - \cos t$. Для $y_2 = \dot{x}_2$ — соответственно $L_2^{\omega_2}[0, 2\pi]$ с весом $\omega_2 = (1 - \cos t)^2$. Оказывается, при помощи обобщенного неравенства Харди [4] можно проверить [5], что пространство векторнозначных функций

$$Y = \{(y_1(t), y_2(t)) : y_1 \in L_2^{\omega_1}[0, 2\pi], y_2 \in L_2^{\omega_2}[0, 2\pi]\} \tag{6}$$

инвариантно под действием нелинейного оператора

$$\mathbf{F}(\cdot, \varepsilon) : Y \to Y$$

при любом фиксированном $\varepsilon \in [0, 1]$. Более того, этот оператор на множестве $Y \times [0, 1]$ непрерывен и имеет производную Фреше. Таким образом, уравнение (4) в пространстве Y задано корректно.

Фиксируем в дальнейшем начальные условия x_{i0} $(i = 1, 2)$. Оказывается, уравнение (4) имеет в пространстве Y при фиксированном значении параметра ε единственное решение. Кроме того, ниже будет показано, что все эти решения могут быть оценены сверху в метрике Y равномерно при всех $\varepsilon \in [0, 1]$.

В самом деле, единственность решения уравнения (4) следует из единственности соответствующего решения задачи Коши для системы ОДУ (2) при всех $t \in [0, 2\pi]$, когда $\varepsilon > 0$, и всех $t \in (0, 2\pi)$, когда $\varepsilon = 0$. При проверке существования решения уравнения (4) трудности могут встретиться только в случае $\varepsilon = 0$, поскольку при $\varepsilon > 0$ имеет место регулярный случай и решение $\mathbf{y} \in Y$. Когда же $\varepsilon = 0$, следует рассмотреть векторнозначную функцию $(x_1(t), x_2(t))^T$ — решение задачи Коши для (2), максимально продолженное в области $t \in (0, 2\pi)$, и затем оценить в метрике Y векторную функцию $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))^T$.

Далее, в силу регулярности задачи при $\varepsilon > 0$ для получения равномерной оценки решений уравнения (4) по норме пространства Y достаточно рассмотреть малые значения $\varepsilon > 0$ из окрестности сингулярного значения $\varepsilon = 0$. Более того, оценки достаточно получить не для всех $t \in (0, 2\pi)$, а лишь для полуинтервалов вида $(0, \lambda]$, $[2\pi - \lambda, 2\pi)$, примыкающим к точкам сингулярного возмущения. Причем, при доказательстве достаточно ограничиться рассмотрением полуинтервала $[2\pi - \lambda, 2\pi)$. Для другого полуинтервала проводится аналогичный анализ.

Для реализации намеченной программы действий на полуинтервале $[3\pi/2, 2\pi)$ выполним регуляризирующую замену независимой переменной $t \mapsto \tau$ по формуле

$$\tau = -\ln(1 - \cos t).$$

Тогда уравнение колебаний спутника (1) следует преобразовать к новой независимой переменной в соответствии с соотношениями

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\sin t}{1 - \cos t}, \quad \frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{1}{1 - \cos t},$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{\sin t}{1 - \cos t} \cdot \frac{d\delta}{d\tau}, \quad \frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \cdot \frac{d^2\delta}{d\tau^2} + \frac{1}{1 - \cos t} \cdot \frac{d\delta}{d\tau}. \tag{7}$$

Легко проверить, что условие $\dot{\delta} \in L_2^{\omega_1}[3\pi/2, 2\pi)$ эквивалентно условию $\delta' \in L_2^p[0, +\infty)$, где новая весовая функция имеет вид

$$p(\tau) = e^{-\tau/2}.$$

Здесь точкой, как обычно, обозначается дифференцирование по переменной t, а штрихом — по переменной τ.

В самом деле, соотношение

$$\left|\dot{\delta}(t)\right|^2 (1 - \cos t)dt = |\delta'(\tau)|^2 \left(2 - e^{-\tau}\right)^{1/2} e^{-\tau/2} d\tau$$

гарантирует упомянутую эквивалентность в силу того, что финально, при $\tau \longrightarrow \infty$, функция $2 - e^{-\tau} \longrightarrow 2$.

Кроме того, при помощи второго равенства из (7) и неравенства Минковского для интегральных норм, с учетом только что доказанной эквивалентности легко убедиться, что условие $\ddot{\delta} \in L_2^{\omega_2}[3\pi/2, 2\pi)$ эквивалентно условию $\delta'' \in L_2^p[0, +\infty)$.

Теперь дифференциальное уравнение (1) на множестве $[3\pi/2, 2\pi)$ преобразуется к новому виду

$$\delta'' + \left(\frac{1}{2 - e^{-\tau}} + \frac{e^{-\tau}}{\varepsilon' + e^{-\tau}}\right)\delta' + \frac{\mu}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{1}{2 - e^{-\tau}} \cdot \frac{e^{-\tau}}{\varepsilon' + e^{-\tau}} \sin(\delta - 2\nu(\tau)) = 0 \tag{8}$$

дифференциального уравнения, заданного на множестве значений независимой переменной $\tau \in [0, +\infty)$. Здесь вблизи сингулярного значения $\varepsilon = 0$ величина $\varepsilon' = \varepsilon/(1-\varepsilon)$ также является малой.

Для достижения поставленных нами выше целей достаточно доказать, что равномерно по всем $\varepsilon \in [0,1]$ при фиксированных начальных данных для решения задачи Коши уравнения (8) на полуинтервале $[0, +\infty)$ выполняется неравенство

$$\|\delta'\|_2^p \leq \text{const}.$$

Ясно, что решение $\delta(\tau)$ задачи Коши непрерывно продолжается на весь полуинтервал $[0, +\infty)$. Интерпретируем уравнение (8) как линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $v(\tau) = \delta'(\tau)$ вида

$$v' + a(\tau)v = b(\tau), \tag{9}$$

где функции коэффициента и свободного члена имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \frac{1}{2-e^{-\tau}} + \frac{e^{-\tau}}{\varepsilon' + e^{-\tau}}, \\ b(\tau) &= -\frac{\mu}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{2-e^{-\tau}} \cdot \frac{e^{-\tau}}{\varepsilon' + e^{-\tau}} \sin(\delta(\tau) - 2\nu(\tau)). \end{aligned}$$

Функция $\delta(\tau)$ решения задачи Коши для (8) при получении оценки считается известной.

Решение уравнения (9) можно выразить по известной формуле

$$v(\tau) = v(0) \exp\left[-\int_0^\tau a(\sigma)d\sigma\right] + \int_0^\tau b(\sigma) \exp\left[\int_0^\sigma a(\xi)d\xi\right] d\sigma \exp\left[-\int_0^\tau a(\sigma)d\sigma\right]. \tag{10}$$

Здесь первое слагаемое заведомо является ограниченной функцией. Поэтому оценки будут выполняться для функции второго слагаемого. Вычисляя первообразные получим последовательно

$$\exp\left[\int_0^\tau a(\sigma)d\sigma\right] = e^{\tau/2}\sqrt{2-e^{-\tau}}\frac{1+\varepsilon'}{e^{-\tau}+\varepsilon'}.$$

Далее, используя полученную квадратуру, в силу оценки

$$|b(\tau)| \leq \frac{\mu}{1-\varepsilon},$$

выполняющейся при всех $\tau \in [0, +\infty)$ и $\varepsilon \in [0, 1)$, выводим неравенство

$$\left| \int\limits_0^\tau b(\sigma) \exp\left[\int\limits_0^\sigma a(\xi) d\xi\right] d\sigma \right| \le \frac{2\mu}{1-\varepsilon^2} \int\limits_0^\tau \frac{e^{\sigma/2} d\sigma}{e^{-\sigma} + \varepsilon'}.$$

Вычисляя еще одну квадратуру получим

$$\int\limits_0^\tau \frac{e^{\sigma/2} d\sigma}{e^{-\sigma} + \varepsilon'} = \frac{\ln(1+\varepsilon' e^\tau)}{\varepsilon'} - \frac{\ln(1+\varepsilon')}{\varepsilon'}, \tag{11}$$

где второе слагаемое справа равномерно ограничено по $\varepsilon' \ge 0$.

Таким образом, для получения оценки второго слагаемого в (10) следует оценить произведение первого слагаемого в правой части (11) и функции

$$\exp\left[-\int\limits_0^\tau a(\sigma) d\sigma\right] = \frac{e^{-\tau/2}}{\sqrt{2-e^{-\tau}}} . \frac{1+\varepsilon' e^\tau}{1+\varepsilon'} \frac{1}{e^\tau}.$$

В силу выполнимости равномерной оценки $\sqrt{2-e^{-\tau}}\,(1+\varepsilon') \ge 1$ остается оценить выражение

$$e^{-\tau/2} \frac{1+\varepsilon' e^\tau}{\varepsilon' e^\tau} \ln(1+\varepsilon' e^\tau) = \left(\frac{\varepsilon'}{x}\right)^{1/2} \frac{1+x}{x} \ln(1+x) = \varphi(x, \varepsilon'),$$

где положено $x = \varepsilon' e^\tau \ge 0$. Область определения $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ функции $\varphi(x, \varepsilon')$ задается неравенствами

$$0 \le \varepsilon' \le 1, \quad \varepsilon' \le x.$$

Очевидно, что множество $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ является объединением подмножеств вида

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x, \varepsilon') : \varepsilon' \ge 0, \varepsilon' \le x \le 1\}, \\ \Omega_2 &= \{(x, \varepsilon') : 0 \le \varepsilon' \le 1, x \ge 1\}. \end{aligned}$$

Здесь для определенности взято ограничивающее значение $\varepsilon' = 1$, соответствующее значению $\varepsilon = 1/2$. На множестве Ω_1 справедлива оценка

$$|\varphi(x, \varepsilon')| \le 2 \frac{\ln(1+x)}{x} \le 2,$$

в то время, как на множестве Ω_2 выполняется неравенство

$$|\varphi(x, \varepsilon')| \le \frac{1+x}{x} \frac{\ln(1+x)}{x^{1/2}} \le 2 \frac{\ln(1+x)}{x^{1/2}} \le 4 \frac{x_0^{1/2}}{1+x_0} < 2,$$

где $x_0 > 1$ — корень уравнения

$$2\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = 0.$$

Таким образом, доказана равномерная ограниченность по параметру $\varepsilon \in [0,1]$ функции $v(\tau,\varepsilon) = \delta'(\tau,\varepsilon)$ в метрике $C[0,+\infty)$ и тем более — в метрике $L_2^p[0,+\infty)$.

3. Основные результаты

Вернемся к исходной независимой переменной $t \in [0, 2\pi]$.

Утверждение 3.1. Уравнение (4) при фиксированных начальных условиях имеет в пространстве Y единственное решение для любых значений $\varepsilon \in [0,1]$. Более того, имеет место равномерная по $\varepsilon \in [0,1]$ оценка

$$\|\mathbf{y}(\varepsilon)\|_Y \le \mathrm{const}.$$

Доказательство. Используя результаты предыдущего раздела заключаем, что при $\varepsilon \le 1/2$ справедлива равномерная оценка

$$\left\|\dot{\delta}(\varepsilon)\right\|_2^{\omega_1} \le c_1.$$

При $\varepsilon \ge 1/2$ уравнение (1) является всюду регулярным. Таким образом, из известных теорем о зависимости решений ОДУ от параметров выводим, что существует постоянная $c_2 > 0$ такая, что

$$\left|\dot{\delta}(t,\varepsilon)\right| \le c_2$$

при всех $\varepsilon \in [1/2, 1]$. Тогда тем более существует постоянная $c_3 > 0$ такая, что

$$\left\|\dot{\delta}(\varepsilon)\right\|_2^{\omega_1} \le c_3.$$

при этих же ε.

Поэтому при всех $\varepsilon \in [0,1]$ или, что то же, при произвольном эксцентриситете орбиты $e \in [0,1]$ существует постоянная $C_1 = \max c_1, c_2$ такая, что

$$\left\|\dot{\delta}(\varepsilon)\right\|_2^{\omega_1} \le C_1. \tag{12}$$

После этого можно использовать инвариантность Y относительно оператора $\mathbf{F} : Y \to Y$ [3, 5]. Свойства нелинейного функционала $F_2(\mathbf{y}, \varepsilon)$ гарантруют равномерную оценку для функции $\ddot{\delta}(t, \varepsilon) = \dot{x}_2(t, \varepsilon) = y_2(t, \varepsilon)$

$$\|y_2(\varepsilon)\|_2^{\omega_2} \le C_2.$$

Заметим, что для проверки этого свойства следует использовать свойство (12) и справедливость неравенства

$$\left| \frac{1 - \cos t}{1 - e \cos t} \right| \le 1$$

при всех $t \in (0, 2\pi)$, $e \in [0, 1]$.$\square$

Из предыдущего материала следует, что при фиксированных начальных данных семейство решений задачи Коши, зависящее от параметра $e \in [0, 1]$ задает ограниченное отображение

$$\mathbf{y} : [0, 1] \to Y; \quad \mathbf{y} : \varepsilon \mapsto \mathbf{y}(\varepsilon),$$

где $[\mathbf{y}(\varepsilon)](t)$ — решение уравнения (4).

Утверждение 3.2. Функция $\mathbf{y} : [0, 1] \to Y$ непрерывна.

Доказательство. Непрерывность при $\varepsilon > 0$ в силу регулярности легко проверяется. Рассмотрим поэтому случай $\varepsilon = 0$ и докажем, что при $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\|\mathbf{y}(\varepsilon) - \mathbf{y}(0)\|_Y \longrightarrow 0.$$

В самом деле, в силу предыдущего утверждения из-за равномерной ограниченности $\|\mathbf{y}(\varepsilon)\|_Y \le C$ следует, что равномерно ограничены интегралы

$$\int_0^{2\pi} \omega_i(t)\, |y_i(t, \varepsilon)|^2 \, dt \le \text{const}, \quad (i = 1, 2).$$

При $\varepsilon = 0$ эти интегралы становятся несобственными. Заметим, что при $t \in (0, 2\pi)$ подынтегральные функции являются гладкими. Из полученных в предыдущем разделе равномерных по ε оценок для скорости роста функций $y_i(t, \varepsilon)$, $(i = 1, 2)$ легко выводится, что найдется такое достаточно малое значение $\eta(\alpha)$, не зависящее от $\varepsilon \in [0, 1]$, что

$$\int_0^{\eta} \omega_i(t)\, |y_i(t, \varepsilon)|^2 \, dt + \int_{2\pi-\eta}^{2\pi} \omega_i(t)\, |y_i(t, \varepsilon)|^2 \, dt < \frac{\alpha^2}{16}, \quad (i = 1, 2),$$

где α произвольно малая, наперед заданная, величина.

Теперь следует рассмотреть систему (2) или уравнение (1) на меньшем множестве $t \in [\eta, 2\pi - \eta]$. На этом множестве уравнение (1) регулярно при всех $\varepsilon \in [0, 1]$. В силу непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра ε получим при достаточно малом ε на отрезке $[\eta, 2\pi - \eta]$ равномерную по t оценку

$$|y_i(t, \varepsilon) - y_i(t, 0)| < \frac{\alpha}{2(\pi - \eta)^{1/2}}.$$

В итоге можно вывести оценку

$$(\|y_i(\varepsilon) - y_i(0)\|_2^{\omega_i})^2 = \int\limits_0^{2\pi} \omega_i(t)\,|y_i(t, \varepsilon) - y_i(t, 0)|^2\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\eta} \omega_i(t)\,|y_i(t, \varepsilon) - y_i(t, 0)|^2\,dt + \int\limits_{2\pi-\eta}^{2\pi} \omega_i(t)\,|y_i(t, \varepsilon) - y_i(t, 0)|^2\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\eta}^{2\pi-\eta} \omega_i(t)\,|y_i(t, \varepsilon) - y_i(t, 0)|^2\,dt \le$$

$$\le \left[\left(\int\limits_0^{\eta} \omega_i(t)\,|y_i(t, \varepsilon)|^2\,dt\right)^{1/2} + \left(\int\limits_0^{\eta} \omega_i(t)\,|y_i(t, 0)|^2\,dt\right)^{1/2}\right]^2 +$$

$$+ \left[\left(\int\limits_{2\pi-\eta}^{2\pi} \omega_i(t)\,|y_i(t, \varepsilon)|^2\,dt\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{2\pi-\eta}^{2\pi} \omega_i(t)\,|y_i(t, 0)|^2\,dt\right)^{1/2}\right]^2 +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{4(\pi - \eta)} \int\limits_{2\pi-\eta}^{2\pi} \omega_i(t)dt \le$$

$$\le \left[\left(\frac{\alpha^2}{16}\right)^{1/2} + \left(\frac{\alpha^2}{16}\right)^{1/2}\right]^2 + \left[\left(\frac{\alpha^2}{16}\right)^{1/2} + \left(\frac{\alpha^2}{16}\right)^{1/2}\right]^2 + \frac{\alpha^2}{2} \le \alpha^2. \square$$

Полученные результаты позволяют строить разложения функций $y_i(t, \varepsilon)$ по базисам пространств $L_2^{\omega_i}[0, 2\pi]$ с коэффициентами Фурье, непрерывно зависящими от параметра ε. Пусть $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ — функциональный ортонормированный базис в $L_2[0,2\pi]$. В качестве такого базиса можно взять, например, тригонометрическую систему функций

$$\varphi_0(t)=(2\pi)^{-1/2},\;\; \varphi_{2k-1}(t)=\pi^{-1/2}\sin kt,\;\; \varphi_{2k}(t)=\pi^{-1/2}\cos kt \quad (k=1,2,\dots).$$

Легко видеть, что в весовом пространстве $L_2^{\omega_i}[0,2\pi]$ ортонормированный базис образует система функций $\left\{\chi_{ik}(t)=\omega_i^{-1/2}(t)\varphi_k(t)\right\}_{k=0}^{\infty}$. Таким образом, функции $y_i(t,\varepsilon)$ могут быть разложены в ряды Фурье

$$y_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{ik}(\varepsilon)\chi_{ik}(t). \tag{13}$$

Утверждение 3.3. Коэффициенты Фурье $c_{ik}(\varepsilon)$ разложений (13) непрерывно зависят от параметра $\varepsilon\in[0,1]$.

Доказательство. Это утверждение очевидным образом следует из непрерывности скалярного произведения $(\cdot,\cdot)^{\omega_i}$ в $L_2^{\omega_i}[0,2\pi]$ и предыдущего утверждения:

$$\begin{aligned}|c_{ik}(\varepsilon)-c_{ik}(\varepsilon_0)| &= |(y_i(\varepsilon),\chi_{ik})^{\omega_i}-(y_i(\varepsilon_0),\chi_{ik})^{\omega_i}| =\\ &= |(y_i(\varepsilon)-y_i(\varepsilon_0),\chi_{ik})^{\omega_i}| \le \|y_i(\varepsilon)-y_i(\varepsilon_0)\|_2^{\omega_i}\longrightarrow 0\end{aligned}$$

при $\varepsilon\longrightarrow\varepsilon_0$.$\square$

Таким образом, в $L_2^{\omega_1}[0,2\pi]$ справедливо разложение

$$\dot{\delta}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{1k}(\varepsilon)\frac{\varphi_k(t)}{(1-\cos t)^{1/2}}, \tag{14}$$

и из [5] следует, что ряд

$$\delta(t,\varepsilon)=\delta(\pi)+\sum_{k=0}^{\infty}c_{1k}(\varepsilon)\int\limits_{\pi}^{t}\frac{\varphi_k(s)}{(1-\cos s)^{1/2}}ds \tag{15}$$

сходится при всех $\varepsilon\in[0,1]$ на множестве $t\in(0,2\pi)$ в метрике $L_2[0,2\pi]$. Кроме того, поскольку на любом подотрезке вида $[\eta,2\pi-\eta]$ мера $(1-\cos t)dt$ эквивалентна мере dt, то ряд (14) сходится также в $L_2[\eta,2\pi-\eta]$. Поэтому ряд (15) для первообразной сходится в $C[\eta,2\pi-\eta]$, т. е. равномерно на любом подотрезке $[\eta,2\pi-\eta]$.

4. Обсуждение

Полученные в данной работе результаты позволили автору сконструировать и реализовать алгоритмы численного продолжения решений при изменении значения эксцентриситета вплоть до предельного $e = 1$. Для этого использовался метод Ньютона в пространствах с интегральными метриками. При этом одна и та же метрика "накрывает" регулярный и предельный случаи. Подобранные весовые функции обеспечивают хорошую сходимость итерационного процесса Ньютона при всех значениях эксцентриситета. При $e \longrightarrow 1$ решение все сильнее осциллирует при подходе к точкам нарушения регулярности. Поэтому использование обычной техники численных методов невозможно без предварительного применения процедуры регуляризации. Однако в последнем случае для построения решения (например, при проверке условия периодичности) при интегрировании на увеличивающемся отрезке независимой переменной требуются нарастающие вычислительные ресурсы. Применение интегральных метрик позволяет аппроксимировать решение на всем множестве максимальной его продолжаемости и при помощи метода Ньютона приближенно строить семейства решений, зависящие от эксцентриситета и удовлетворяющие каким-либо дополнительным условиям.

Известен другой подход к анализу рассмотренной в статье задачи — в [6] уравнение колебаний спутника рассматривалось по отношению к осям орбитальной системы координат. Для этого случая вычисление семейств периодических решений при помощи высокоточных алгоритмов выполнялось В. П. Вариным [7, 8]. При этом для регулярного, неограниченно близкого к $e = 1$, и предельного случаев решения аппроксимируются по различным методикам.

Рассмотренная в данной статье методика аппроксимации решений позволяет исследовать семейства решений дифференциальных уравнений с неаналитическими и даже разрывными правыми частями (например, уравнение колебаний спутника с учетом сил светового давления)

Ранее вопрос о свойствах решений уравнения колебаний спутника в окрестности предельного $e = 1$ случая для спутника со слабой динамической асимметрией рассматривался в работе [9]. В работах [10, 11, 12] численными методами строились семейства симметричных периодических решений в упомянутой задаче, исследована их устойчивость. В работе [13] рассмотрены семейства несимметричных периодических решений.

Список литературы

[1] Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965. — 416с.

[2] Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. — 308с.

[3] Косенко И. И. Интегральные метрики с весами для продолжения решений ОДУ по параметру при наличии сингулярностей. // Труды третьей международной конференции "Дифференциальные уравнения и приложения", Санкт-Петербург, 12–17 июня 2000. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. С. 74—77.

[4] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — 416с.

[5] Косенко И. И. О выполнимости условий теоремы о неявной функции в предельной задаче для уравнения колебаний спутника на эллиптической орбите. // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. Часть 2. М.: Вычислительный центр РАН, 2000. С. 69—98.

[6] Bruno A. D., Varin V. P. The limit problems for the equation of oscillations of a satellite. // Celest. Mech. and Dynam. Astron. 1997. V. 67. No. 1. P. 1—40.

[7] Варин В. П. Критические семейства периодических решений уравнения колебаний спутника. М: Ин-т прикл. матем., Препринт № 101, 1996.

[8] Варин В. П. Критические подсемейства семейства K_0 периодических решений уравнения колебаний спутника. М: Ин-т прикл. матем., Препринт № 20, 1997.

[9] Черноусько Ф. Л. Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс. // ЖВМ и МФ. Т. 3. № 3. 1963. С. 528—538.

[10] Златоустов В. А., Охоцимский Д. Е., Сарычев В. А., Торжевский А. П. Исследование колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты. // Космич. исслед. Т. II. Вып. 5. 1964. С. 657—666.

[11] Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А. Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. // Космич. исслед. Т. XV. Вып. 6. 1977. С. 809—834.

[12] Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А. Периодические вращения спутника в плоскости эллиптической орбиты. // Космич. исслед. Т. XVII. Вып. 2. 1979. С. 190—207.

[13] Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А. Несимметричные периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. // Космич. исслед. Т. XVIII. Вып. 1. 1980. С. 3—10.