ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2002
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ 3-ГО ПОРЯДКА

М. Ю. Балахнев.
Россия, 302015, Орел, Комсомольская, д. 95,
Орловский Государственный Университет,
e-mail: max@my.orel.ru

И. В. Кулемин.
Россия, 302015, Орел, Комсомольская, д. 95,
Орловский Государственный Университет,

Аннотация.

В работе найдены дифференциальные подстановки для систем следующего вида $u_t = u_3 + f(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2)$, $v_t = g(u, v, u_1, v_1)$, классификация которых представлена в работе одного из соавторов. Установлено, что в результате дифференциальных подстановок все найденные ранее системы и несколько других систем, распадаются на два класса эквивалентности: класс систем, эквивалентных системе Ито, и класс систем эквивалентных системам Дринфельда-Соколова. Основным результатом является более полный, чем ранее, список интегрируемых систем, а также указаны дифференциальные связи между ними.

1 Введение

Данная работа посвящена вычислению дифференциальных подстановок для интегрируемых систем с двумя независимыми переменными x, t следующего вида

$$u_t = u_3 + f(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2),\ v_t = g(u, v, u_1, v_1). \tag{1}$$

Здесь $u_t = \partial u/\partial t, u_i = \partial^i u/\partial x^i$. К этому классу принадлежит, например, известная система Ито [2]

$$u_t = (u_{xx} + \frac{3}{2}u^2 + v^2)_x,\ v_t = (uv)_x, \tag{2}$$

а также первая

$$u_t = u_3 + 2u_1v_1 + v_2u,\ v_t = u^2 \tag{3}$$

и вторая системы Дринфельда-Соколова [3]

$$u_t = u_3 + u_1v_1,\ v_t = u_1. \tag{4}$$

В работе [1] найден обширный список других формально интегрируемых систем вида (1). В данной работе мы приводим дифференциальные подстановки допускаемые всеми этими системами. Дифференциальной подстановкой называется подстановка следующего вида:

$$u = \varphi_1(u', v', u'_1, v'_1, u'_2, v'_2, \dots),\ v = \varphi_2(u', v', u'_1, v'_1, u'_2, v'_2, \dots). \tag{5}$$

Дифференциальный порядок правых частей этих равенств называется порядком дифференциальной подстановки. Обычно ограничиваются вычислением дифференциальных подстановок первого порядка, однако, известны дифференциальные подстановки высших порядков, не являющиеся суперпозициями подстановок первого порядка [4]. В этой работе мы рассматриваем дифференциальные подстановки для систем (1) не выше второго порядка. При этом мы считаем, что функции u', v' в (5), удовлетворяют системе уравнений того же самого вида, что и функции u, v

$$u'_t = u'_3 + f'(u', v', u'_1, v'_1, u'_2, v'_2),\ v'_t = g'(u', v', u'_1, v'_1), \tag{6}$$

где f', g' — неопределенные функции.

Для вычисления дифференциальных подстановок, мы дифференцируем равенства (5) по t

$$D_t(u - \varphi_1) = 0,\ D_t(v - \varphi_2) = 0, \tag{7}$$

и заменяем производные u_t, v_t из уранений (1), а производные u'_t, v'_t подставляем из уравнений (6). Кроме того, переменные u, v исключаются из (7) при помощи равенств (5), а дифференциальные следствия равенств (5) $u_i = D_x^{(i)}(\varphi_1)$, $v_i = D_x^{(i)}(\varphi_2)$ позволяют исключить все переменные u_i, v_i. В результате мы получаем систему из двух уравнений содержащую только переменные u'_i, v'_i. При решении этой системы мы считаем, что все u'_i, v'_i независимы (это соответствует отсутствию дифференциальных связей в системе). Уравнения (7) содержат переменные более высокого порядка, чем порядок переменных в функциях φ_1, φ_2, f', g'. Поэтому уравнения расщепляются по переменным высшего порядка и мы получаем большое число дифференциальных уравнений для определения функций φ_1, φ_2, f', g'.

Простейшие из этих уравнений записываются в виде:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial v'_2} = 0, \ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v'_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u'_2} = 0, \ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial {u'}_2^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial {u'}_2^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial {v'}_2^2} = 0.$$

Далее приходится решать большое число простых дифференциальных уравнений, возникающих из (7). Эта работа была проделана при помощи компьютера с использыванием системы Maple и пакета Jet [5].

При записи окончательных результатов мы обозначаем неизвестные функции как u, v во всех системах.

2 Системы класса Ито

Здесь мы приводим результаты вычислений для системы Ито (2). Для удобства запишем эту систему через переменную $v' = v^2$

$$u_t = u_3 + 3uu_1 + v_1, \ v_t = uv_1 + 2vu_1, \tag{8}$$

штрихи опущены для краткости.

Из (8) можно получить следующие системы ($k = 0$ или ± 1):

$$u_t = u_3 + \frac{3}{2}u_1^2 + v_1^2, \ v_t = u_1 v_1. \tag{9}$$

$$u_t = u_3 + 3uu_1 + 2v_1 v_2, \ v_t = uv_1. \tag{10}$$

$$u_t = u_3 + 3u_1 v + 2uv_1 + v_1 v_2 - 2v^2 v_1, \ v_t = u_1 + vv_1. \tag{11}$$

$$u_t = u_3 + (2v_1 + 3u_1)(u + v) + v_1(1 - k\, e^{2v} + v_2), \tag{12}$$

$$v_t = (u + v)v_1 + u_1. \tag{13}$$

Связи между системами (8) — (13) можно представить так:

$$
\begin{tikzcd}
 & & (8) \arrow[dl, leftrightarrow, "B"'] \arrow[dd, leftrightarrow, "A"] \arrow[dr, "E"] & \\
(10) \arrow[r, leftrightarrow, "D"] & (9) \arrow[dr, leftrightarrow, "C"'] & & (13) \\
 & & (11) \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$A : (u, v) = (v', u' - {v'}^2 - v'_2);$$

$$B : (u, v) = (u'_1, {v'}^2_1);$$

$$C : (u, v) = (u'_3 + {u'}^2_1 + {v'}^2_1, u'_1),\ (C = A^{-1} \circ B);$$

$$D : (u_1, v) = (u', v');$$

$$E : (u, v) = (u' + v', \frac{1}{2}(1 + {v'}^2_1 - k\, e^{2v}) - v'_2 + u' + v');$$

$$F : (u, v) = (u' + v', \frac{1}{2}(1 + {v'}^2_1 - k\, e^{2v}) + u'_2 + u' + v' + (u' + v')^2).$$

3 Системы класса Дринфельда-Соколова

В этом разделе мы приводим результаты вычислений для систем Дринфельда-Соколова (3) и (4).

Из (3) можно получить следующие системы:

$$u_t = u_3 + 2u_1 v + u v_1,\ v_t = 2u u_1. \tag{14}$$

$$u_t = u_3 - \frac{3}{4}\,\frac{u_2^2}{u_1} + v_2 u_1,\ v_t = u. \tag{15}$$

$$u_t = u_3 - \frac{3}{4}\,\frac{u_2^2}{u_1} + v_1 u_1,\ v_t = u_1. \tag{16}$$

$$u_t = w_2 + 2(w(u + \frac{1}{2}v))_x - 3w^2,\ v_t = 6w^2;\ w = u_1 - (u + \frac{1}{2}v)^2. \tag{17}$$

$$\begin{gathered} u_t = u_3 + \frac{1}{v}(v_2 u_1 + 3u_2 v_1) + \frac{1}{v^2}(u_1 v_1^2 + c_1 u_1) + \frac{2}{3} u v v_1 + v_1 u^2, \\ v_t = \frac{1}{3} u_1 v^2. \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} u_t = u_3 - 2v^3 v_1 - \frac{2}{v^2}(u u_1 - 2u_1 v_1^2) - \frac{1}{v}(2u_1 v_2 + 3v_1 u_2), \\ v_t = -\frac{u_1}{v}. \end{gathered} \tag{19}$$

$$u_t = u_3 + \frac{3}{2}\frac{u_1 v_1^2}{v^2} - \frac{2u_1(v_2 - u^2) + 3u_2 v_1 + c_1 u_1}{2v} + \\ + c_2(2v^2 u_1 + 3uvv_1),\ v_t = 2uu_1. \tag{20}$$

$$u_t = u_3 + \frac{3}{2}\frac{u_1 v_1^2}{v^2} - \frac{2u_1(v_2 - u^2) + 3u_2 v_1}{2v} + \frac{c_1^2}{2v}(uv_1 - 2vu_1) + \\ + \frac{c_1}{2v^2}(3uv_1^2 - 2v(u_1 v_1 + uv_2 - u^3)) - c_2 u, \\ v_t = 2uu_1 + 2c_1 u^2 - 2c_2 v. \tag{21}$$

Система (4) обладает дифференциальными связями со следующими системами:

$$u_t = u_3 + u_1 v + uv_1,\ v_t = u_1. \tag{22}$$

$$u_t = u_3 + u_1 v_2,\ v_t = u. \tag{23}$$

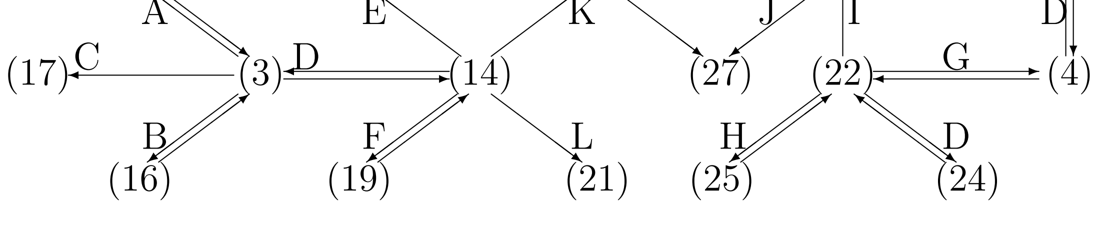
$$u_t = u_3 + u_1 v_1 + uv_2,\ v_t = u. \tag{24}$$

$$u_t = u_3 + vv_1 + u_1\frac{u - v_2}{v},\ v_t = u_1. \tag{25}$$

$$u_t = u_3 - u_1\frac{3(v_2 + c_1) + u}{3v} - u_1 v^2 - 3uvv_1,\ v_t = -\frac{1}{3}u_1. \tag{26}$$

$$u_t = u_3 + \frac{3}{2}\frac{u_1 v_1^2}{v^2} - \frac{2u_1(v_2 - u^2) + 3u_2 v_1}{2v} + c_2(2v^2 u_1 + 3uvv_1), \\ v_t = 2uu_1. \tag{27}$$

Ниже приведена диаграмма иллюстрирующая связь систем (3), (4) и (14) — (27).



$A : (u, v) = (\sqrt{u_1'}, v_1');$ $\qquad$ $C : (u, v) = (\sqrt{6}(u_1' - (u' + \frac{1}{2}v')^2), v');$

$B : (u, v) = (\sqrt{u_1'}, v');$ $\qquad$ $D : (u, v) = (u', v_1');$

$$E:(u,v)=\left(u'v', \frac{u'v'}{3}-\frac{v_2'}{v'}+\frac{{v_1'}^2+c_1}{2v'^2}\right); \qquad G:(u,v)=(u_1',v_1');$$

$$F:(u,v)=\left(v', \frac{{v_1'}^2}{2v'^2}-\frac{v_2'}{v'}-\frac{u'}{v'^2}\right); \qquad H:(u,v)=\left(v', \frac{u'-v_2'}{v'}\right);$$

$$I:(u,v)=\left(u_1'+u'v', -\frac{3(v_2'+c_1)+u'}{3v'}-3v_1'-v'^2\right);$$

$$J:(u,v)=\left(\frac{3i}{\sqrt{v'}}\left[\frac{u_2'v'-u_1'v_1'}{v'}+2c_2u'v'\right], \frac{-iu'}{\sqrt{v'}}\right), \ (c_1=0);$$

$$K:(u,v)=\left(-\frac{i\sqrt{6}}{2\sqrt{v'}}\Big[u_1'+c_3u'v'\Big], \frac{3{v_1'}^2}{8v'^2}-\frac{2v_2'-2u'^2-c_1}{4v'}+c_2v'^2-\frac{3}{2}c_3v_1'\right);$$

$$L:(u,v)=\left(-\frac{i\sqrt{6}}{2\sqrt{v'}}\Big[u_1'+c_1u'\Big], \frac{3{v_1'}^2}{8v'^2}-\frac{v_2'-u'^2+c_1v_1'+c_1^2}{2v'}\right).$$

Здесь c_1, c_2 – произвольные константы, а $c_3^2=-2c_2$.

4 Заключение

Итак, мы привели более полный, чем в [1], список интегрируемых систем. Системы (13), (17) — (19), (25) и (26) публикуются нами впервые. Наличие дифференциальных связей говорит о полной интегрируемости каждой системы, так как интегрируемость систем (2), (3), (4) доказана в работах [3], [6].

При исследовании одной из систем опубликованной в [1] (алгоритм смотрите, например, в [7]):

$$u_t=w_2+6u_1e^u-\frac{1}{2}w(w^2-c), \ v_t=(2u_1^2+4v_1+v^2-c)e^u; \ (w=u_1-v),$$

для нее был получен оператор Лакса: $L=D^3+2\eta D+\eta_1-\xi(D+\frac{\xi}{4}D^{-1})$, где ξ – параметр, а $\eta=2e^u+w_1-w^2/2$. В оператор L входит только функция η, поэтому очевидно, что в результате подстановки:

$$u=\ln\frac{1}{2}(u'-v_x'+\frac{1}{2}v'^2), \ v=[\ln\frac{1}{2}(u'-v_x'+\frac{1}{2}v'^2)]_x-v',$$

эта система свелась к треугольному виду:

$$u_t=u_3+3uu_1+\frac{c}{2}u_1; \ v_t=u_2+u_1v-v_1^2+(u+\frac{1}{2}v^2)(2v_1-\frac{1}{2}(v^2-c)).$$

Благодарность

Авторы выражают благодарность Мешкову А. Г. за постановку задачи, обсуждение хода и результатов проведенного исследования.

Список литературы

[1] Kulemin I. V., Meshkov A. G. To the Classification of the Integrable Systems in 1+1 Dimensions.// Proc. Of the Second Int. Conf. Symmetry in Nonlinear Math. Phys. Kyiv, 1997, Part 1, p. 115-123.

[2] Ito M. Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation.// Physics Letters A, 1982, **91**, p. 335-338, .

[3] Дринфельд В. Г. и Соколов В. В., Труды семинара имени Соболева С. Л., Новосибирск, 1981.

[4] Соколов В. В. Устное сообщение.

[5] Meshkov A. G. Computer package for investigation of the completele integrability.// Proc. Of the Third Int. Conf. Symmetry in Nonlinear Math. Phys. Kyiv, 1999, Part 1, p. 35-46.

[6] Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К. Полная интегрируемость нелинейных систем Ито и Бении — Каупа: градиентный алгоритм и представление Лакса. // Теор. и мат. физ., 1986, **67**, № 3, с. 410-425.

[7] Balakhnev M. Ju., Kulemin I. V. and Meshkov A. G. New Evolution Completely Integrable System. // Proc. Of the Third Int. Conf. Symmetry in Nonlinear Math. Phys. Kyiv, 1999, Part 1, p. 68-72.