ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2002
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Моделирование динамических систем

АЛГОРИТМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА В СЛУЧАЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Н.Б.Ампилова, Е.Петренко

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29
Санкт-Петербургский Государственный Технический Университет
Кафедра “Высшая математика”

1 Введение

Пусть $f : \tilde{C} \to \tilde{C}$, где $\tilde{C} = C \cup \infty$, отображение комплексной плоскости с бесконечно удалённой точкой в себя. В нашем случае это полином степени 2.

Определение 1 *Неподвижной точкой отображения f называется точка x_0 такая, что $f(x_0) = x_0$.*

Определение 2 *Точка x_0 называется точкой периода k для отображения f, если $f^k(x_0) = x_0$ и $\forall i \leq k-1$ $f^l(x_0) \neq x_0$, где $f^k(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(x)\ldots))$.*

Заметим, что неподвижная точка для f является неподвижной точкой и для f^l (при любом $l > 0$). Обратное неверно.

Определение 3 *Последовательность точек* $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ *называется положительной траекторией или орбитой точки* x *под действием* f.

Для k-периодической точки x_0 ее орбита представляет собой множество точек $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\}$ (цикл периода k).

Определение 4 *Пусть* x_0 *периодическая точка периода* n. *Собственным значением точки* x_0 *для отображения* f *называется комплексное число*

$$\lambda = (f^n)'(x_0)$$

По правилам дифференцирования сложной функции, мы получаем, что это число одинаково для любой точки цикла.

Периодическая или неподвижная точка x_0 называется:

- **притягивающей**, если $0 < |\lambda| < 1$,
- **отталкивающей**, если $|\lambda| > 1$,
- **сверхпритягивающей**, если $\lambda = 0$,
- **нейтральной**, если $|\lambda| = 0$.

Нейтральные точки в свою очередь тоже можно классифицировать. Пусть $|\lambda| = 1$ и λ - собственное значение точки x_0 для отображения f, тогда его можно переписать в виде

$$\lambda = e^{2\pi i\alpha},\ \alpha \in [0, 1]$$

Неподвижная точка x_0 называется параболической, если $\alpha \in Q$.

Определение 5 *Бассейном притяжения точки* x_0 *для отображения* f *называется множество*

$$A_f(x_0) = \{x \in \tilde{C}, f^k(x) \to x_0,\ k \to \infty\}$$

Бассейн притяжения цикла - есть объединение бассейнов притяжения всех точек этого цикла.

Определение 6 *Множеством Жюлиа называется граница всех бассейнов притяжения неподвижных и периодических точек для данного отображения.*

Определение 7 *Наполненным Множеством Жюлиа называется множество* $K_f = \{x \in \tilde{C}, |\lim_{k\to\infty}| < \infty\}$*, т.е. множество тех точек, траектории которых не содержат бесконечно удал■нной точки.*

Известно [2], что если x_0 - параболическая периодическая точка для отображения f, то она принадлежит множеству Жюлиа для этого отображения.

2 Алгоритмы построения множества Жюлиа

2.1 Алгоритм построения наполненного множества Жюлиа

Нетрудно заметить, что множество Жюлиа довольно сложно описать аналитически. Алгоритмы компьютерного моделирования позволяют получить некоторый положительный результат, который, впрочем, не всегда совпадает с желаемым.

Построение наполненного множества Жюлиа является более простой задачей. Разработанный нами алгоритм построения опирается на следующие утверждения:

1. Неподвижные и периодические точки принадлежат множеству Жюлиа (используется программа построения неподвижных и периодических точек)

2. Если за некоторое конечное число итераций точка не выйдет за пределы квадрата в 10 раз большего рассматриваемой области, то тогда она считается принадлежащей к искомому множеству.

Пример построения наполненного множества Жюлиа для отображения с параболической неподвижной точкой приведен ниже.

Для построения настоящего множества Жюлиа нужно применять другие алгоритмы, один из них называется метод сканирования границы [1]. Мы предлагаем свой алгоритм, являющийся улучшением Метода Сканирования Границ.

2.2 Построение множества Жюлиа. Алгоритм МСГ (Метод сканирования границы)

Обозначим J_f множество Жюлиа для отображения f.

Если f имеет хотя бы одну притягивающую неподвижную точку a, или притягивающий цикл $a = (a_i)_{i \in I}$, $|I| < \infty$, с бассейном притяжения $A(a)$, тогда по одному из свойств множества Жюлиа имеем $J_f = \partial A(a)$. Если есть несколько притягивающих точек, скажем, a и b, тогда выполняется равенство $\partial A(a) = J_f = \partial A(b)$.

Выбираем квадратную решётку, покрывающую некоторую область в $\tilde{C}$, в которой нужно получить изображение множества Жюлиа. Пусть B - произвольная ячейка решётки. Предположим, что $B \cup J_f \neq \emptyset$, тогда B должна содержать точки из бассейнов притяжения некоторых неподвижных притягивающих точек. На этом простом свойстве и основывается данный алгоритм приближённого построения множества Жюлиа.

Обозначим N_{max} максимальное количество итераций, которые проделываются для каждой точки, ε - погрешность построения.

Пусть N_{max} и $0 < \varepsilon \ll 1$, фиксированы, и пусть c_1, c_2, c_3, c_4 - вершины ячейки B. Тогда нужно проверить выполнение одной из следующих ситуаций:

1. все вершины принадлежат одному и тому же бассейну;
2. вершины принадлежат разным бассейнам.

Если выполнено первое, то ячейка B закрашивается, скажем, б елым цветом, а иначе - чёрным. Для этого следует численно определить, принадлежат ли точки определённому бассейну притяжения.

Для произвольной точки x проверим, существует ли $k \leq N_{max}$ $|f^k(x) - a| < \varepsilon$, где $|a|$ - некоторая неподвижная притягивающая точка. Если удалось найти такое k, то x принадлежит бассейну притяжения точки a. (Следует заметить, что данное утверждение верно с учетом ошибки вычислений, которая зависит от выбора N_{max} и ε, и соотношения между ними.)

Нетрудно видеть, что для получения качественных результатов требуется удачно подобрать значения N_{max} и ε и требуется довольно точно находить неподвижные точки рассматриваемого отображения.

Наибольшие трудности при построении множеств Жюлиа вызывает существование параболической неподвижной точки. Заметим, что существенной проблемой при моделировании искомого множества является сравнительно низкая точность приближённых машинных вычислений. Именно с этой проблемой столкнулись авторы [1].

Рассмотрим отображение

$$f(x) = x^2 + \lambda x,\ \lambda = e^{\frac{2\pi}{20}i} \tag{1}$$

В этом случае $x_0 = 0$ является параболической неподвижной точкой. Поскольку $\lambda^{20} = 1$, то множество Жюлиа подходит к точке $x_0 = 0$ с 20 различных направлений (между 20 лепестками). Для построения множества Жюлиа в [1] был применен "подходящим образом отрегулированный алгоритм МСГ". Но в результате точка $x_0 = 0$ не попала в множество Жюлиа. Это можно объяснить тем, что, начиная с некоторого места (при очень маленьких x) число $x^2 = x$ в арифметике машины, в результате чего получается новая неподвижная точка.

Для построения множества Жюлиа был применен алгоритм МСГ (метод сканирования границ). Следует заметить, что для использования данного алгоритма пришлось сначала решить задачу приближенного поиска неподвижных и периодических точек. Был реализован алгоритм для нахождения этих точек для данного отображения. Если точка периодическая или неподвижная, то существует $k \leq N_{max} |f^k(a) - a| < \varepsilon$. Можно заметить, что в результате получалось около 3000 точек, при довольно маленьких значениях ε и довольно больших значениях N_{max}. Далее был непосредственно реализован алгоритм МСГ. Результаты работы алгоритма были неудовлетворительными. Можно заметить, что в среднем получалось около 3000 неподвижных и периодических точек (этот феномен объяснён выше). Но, несмотря на это, результаты построения были довольно плохими, т.е. множество Жюлиа выглядело как несколько разбросанных по плоскости точек. Это можно объяснить лишь недостаточным количеством настоящих неподвижных и периодических точек, а следовательно, несовершенством алгоритма их нахождения и низкой точностью вычислений. Было видно, что алгоритм требует доработки. В результате мы получили алгоритм "Улучшенный МСГ" и применили его к исследуемому отображению.

2.3 Алгоритм Улучшенный МСГ

Фиксируем некоторое подмножество комплексной плоскости, на котором требуется построить множество Жюлиа, фиксируем некоторую сеть на этом подмножестве. Узлы этой сети рассматриваем как пиксели на экране (т.е. каждому пикселю сопоставлена лишь одна точка). Предположим, что нам известно множество неподвижных и периодических точек. Фиксируем

ε_x, ε_y, N_{max}. Здесь ε_x и ε_y - это погрешности (по оси OX и OY). Для определённости можно считать, что $\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} = \varepsilon$. Алгоритм перебирает все точки сети. Каждая точка итерируется N_{max} раз. Потом алгоритм проверяет, не принадлежит ли результат итерации бассейну притяжения одной из неподвижных точек. Для проверки этого факта используется следующий критерий:

$$x_0 \in A_f(a) \Longleftrightarrow \mathbf{Re}(x_0 - a) < \varepsilon_x \vee \mathbf{im}(x_0 - a) < \varepsilon_y$$

Использование такой метрики позволяет уменьшить погрешность вычислений.

Нетрудно видеть, что для этого алгоритма тоже нужно знать неподвижные и периодические точки данного отображения. Эта проблеме была решена следующим образом.

Обозначим данный алгоритм как функцию $A\ P \rightarrow Q$, где P - множество неподвижных и периодических точек данного отображения, а Q - результат работы алгоритма. Тогда рассмотрим последовательность множеств: $\{K_n\}_{n=0}^{n_{max}}$, где K_0 - произвольное не пустое множество неподвижных и периодических точек данного отображения, а $K_i = A(K_{i-1})$, $\forall i \geq 1$, поскольку число неподвижных и периодических точек является инвариантом для данного отображения.

Алгоритм применялся несколько раз. Как неподвижные точки для итерации k рассматривался результат работы итерации $k-1$. Начальное приближение к множеству неподвижных и периодических точек было построено с помощью математического пакета DERIVE. Без особых затруднений удалось найти 2 неподвижных точки и 2 периодические (периода 2).

Можно выписать значения этох точек явно:

Формула, $\lambda = e^{\frac{2\pi}{20}i}$	Приближенное Значение
$x = 0$	$x = 0$
$x = 1 - \lambda$	$x = 0,0489434 - 0,309017i$
$x = -\sqrt{1+\lambda}\frac{\sqrt{1+\lambda}-\sqrt{\lambda-3}}{2}$	$x = -0,979266 + 0,087067i$
$x = -\sqrt{1+\lambda}\frac{\sqrt{1+\lambda}+\sqrt{\lambda-3}}{2}$	$x = -0,971789 + 1,166080i$

Действительно, это метод позволил получить хорошие результаты. Можно считать, что если некоторая точка за N_{max} итераций попала в окрестность не неподвижной или периодической точки, а в окрестность точки, по-

Рис. 1: Наполненное множество Жюлиа для отображения 1. Число итераций $N_{max} = 10000$.

лученной на предыдущей итерации, то с большой вероятностью за $2N_{max}$ итераций эта точка притянется к множеству "неподвижных точек" прошлой итерации, и т.д.

В результате этих простых преобразований удалось довольно качественно построить множество Жюлиа для отображения с параболической неподвижной точкой.

Далее мы приводим результаты компьютерного моделирования указанного отображения. Число N_{max} было взято равным 10000, такое значение даёт возможность получить довольно точное приближение.

В завершение следует сказать несколько слов о природе "чёрных квадратов". Из свойств множества Жюлиа мы знаем, что неподвижные и пе-

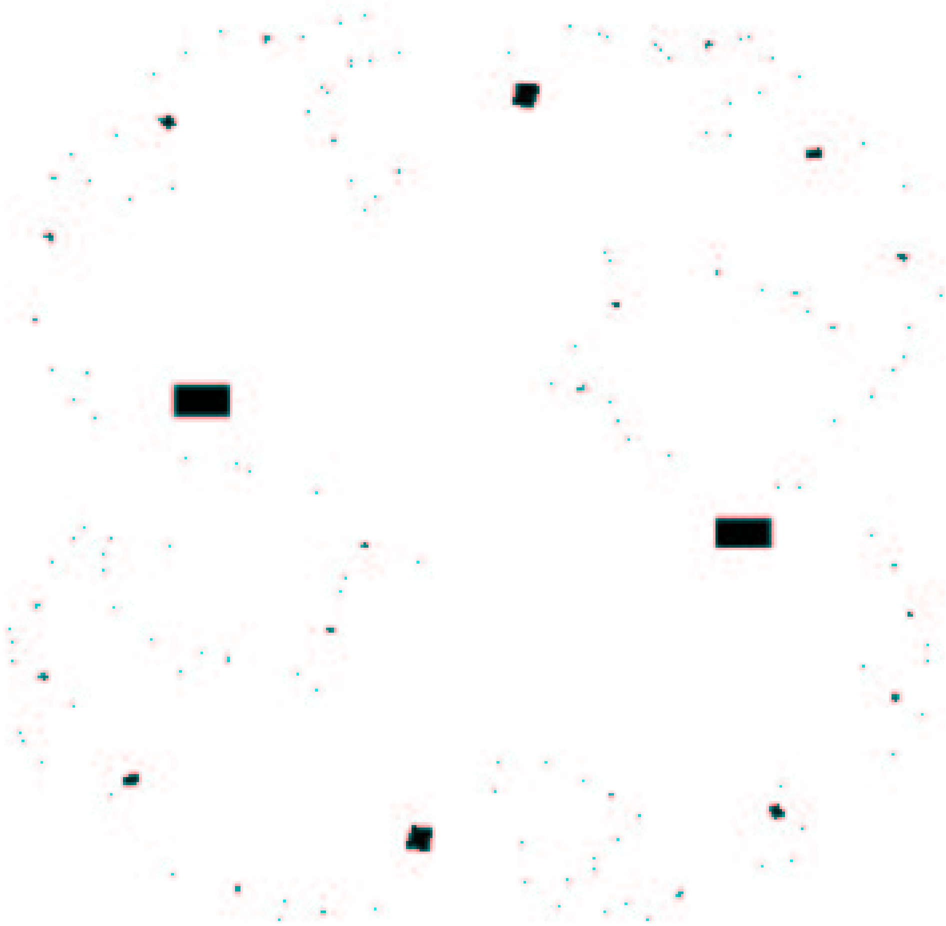

Рис. 2: Множество Жюлиа для отображения 1 после 4 итераций нашего алгоритма. Можно заметить, что уже отчётливо проявляется граница бассейнов притяжения.

Рис. 3: Приближение к множеству Жюлиа после десяти итераций нашего алгоритма.

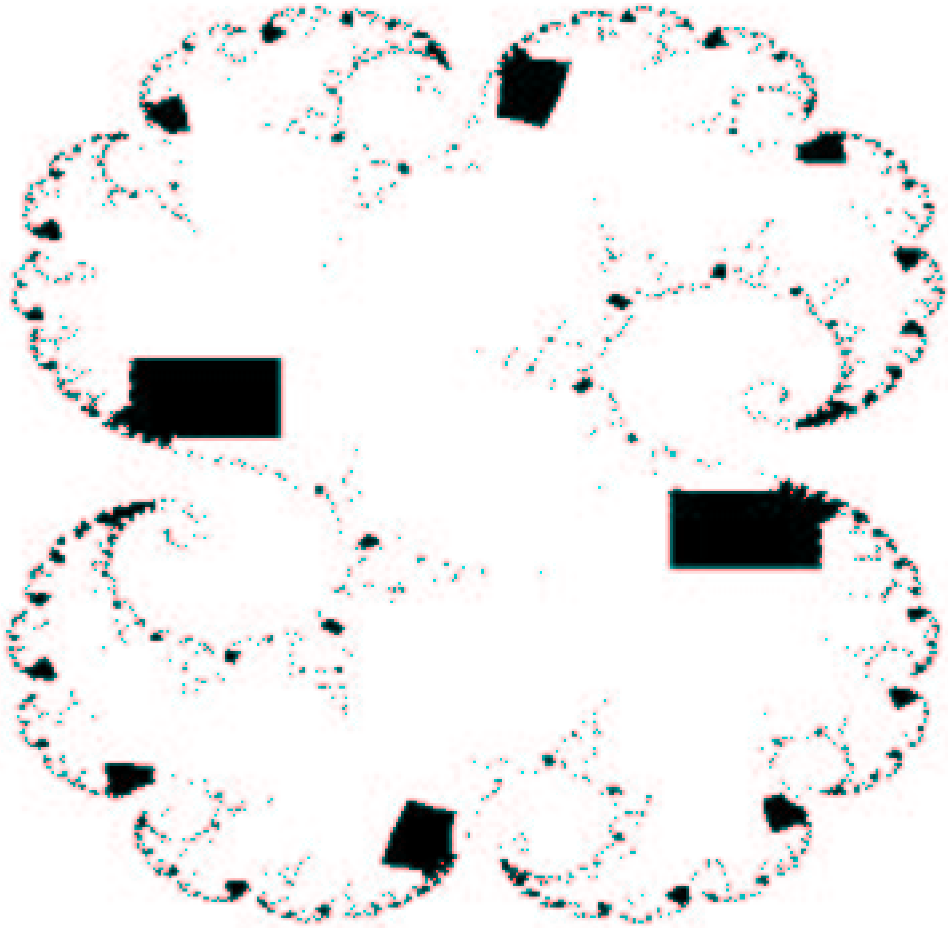

Рис. 4: К 13 итерации нашего алгоритма удалось получить хороший результат.

Рис. 5: Приближение к множеству Жюлиа после 25 итерации.

риодические точки принадлежат этому множеству. Следовательно, должны принадлежать и точки из первой итерации. Вокруг них должны образовываться лепестки (т.к. $\lambda^{20} = 1$). Но из-за низкого разрешения (число точек сети на исследуемой области конечно), эти лепестки прижимаются довольно плотно друг к другу, в результате получается "чёрный квадрат"и обильные закрашенные области на Рис.5.

Все изображения были получены с разрешением 640x480. Количество итераций N_{max} было выбрано равным 10 000.

3 Вывод

В итоге был разработан довольно совершенный алгоритм, позволяющий получить приближение к множеству Жюлиа с параболической неподвижной точкой. В процессе работы было установлено, что структура множества настолько сложна, что получить хорошие результаты можно только в очень маленькой окрестности, а на всём множестве это сделать невозможно. И при попытках получить приближение на всей области, результат локализации ухудшается, т.е. получается изображение, близкое к изображению наполненного множества Жюлиа (сравните Рис.1 и Рис.5).

Литература

[1] Х.О.Пайтген, П.Х.Рихтер. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М, 1993.

[2] Julia G.(1918) Sur l'iteration des fonctions rationneles. Journal de Math.Pure at Appl. 8:47-245.