

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ В ОКРЕСТНОСТИ ИНВАРИАНТНОЙ КРИВОЙ БИФУРКАЦИИ ХОПФА

Н.Б.АМПИЛОВА

Санкт-Петербургский государственный университет
198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2. СПбГУ
Математико-механический факультет
Кафедра дифференциальных уравнений

Введение. Рассмотрим отображение T расширенной плоскости $R^2 \cup \infty$ в себя:

$$T : \begin{cases} x_1 = (1 - \lambda)x + \lambda\mu y(1 - y), \\ y_1 = (1 - \lambda)y + \lambda\mu x(1 - x), \end{cases} \quad (1)$$

где λ, μ – вещественные параметры. Предполагается, что ∞ является неподвижной точкой, тогда T непрерывно.

Система (1) была исследована в работах [1, 2]. В частности, было показано, что область притяжения к бесконечно удаленной точке U лежит вне круга

$$D : (x - r)^2 + (y - r)^2 \leq 2r^2, \quad (2)$$

где $r = 0.5(1 - \lambda + \lambda\mu)/\lambda\mu$.

Также были получены оценки значений параметров λ, μ , при которых в окрестности внедиагональной неподвижной точки возникает инвариантная кривая.

Известно [3], что дальнейшее изменение параметра приводит к появлению на этой кривой периодических точек, причем одновременно существуют две орбиты: устойчивая и неустойчивая. Результаты компьютерного моделирования при значениях параметров $\lambda = 0.512603$, $\mu = 4.11$ показывают существование 7–периодической орбиты.

Предлагаемый численный метод нахождения периодической орбиты заключается в построении начального приближения и последующем его уточнении с помощью метода Ньютона.

1. Построение начального приближения

Рассмотрим отображение $F(z) = T^k(z) - z$ в области расположения точек периодической орбиты периода k . Легко понять, что эта область лежит в области D .

Предложение 1. При выполнении условий $\lambda < 1, \mu > 0$ производная отображения $F(z) = T^k(z) - z$ в области D удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 2d(\alpha + \beta)^k$, где $\alpha = 1 - \lambda$, $\beta = \lambda\mu$, $d = 2\sqrt{2}(1 - \lambda + \lambda\mu)/\lambda\mu$.

Доказательство. Нам нужно показать, что существует константа L , такая, что для любых точек $z_1, z_2 \in D$ выполняется неравенство

$$\|DF(z_1) - DF(z_2)\| \leq L\|z_1 - z_2\|. \quad (3)$$

Пусть $z_i = (x_i, y_i)$ и $\|z_1 - z_2\| = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$. Для любых точек z_1, z_2 из области D справедливо неравенство $\|z_1 - z_2\| \leq 2\sqrt{2}r$. Заметим далее, что

$$DF(z_i) = DT^k(z_i) - I = DT(z_i^{k-1})DT(z_i^{k-2}) \dots DT(z_i) - I,$$

где $z_i^1 = T(z_i)$, $z_i^2 = T^2(z_i)$, \dots , $z_i^{k-1} = T^{k-1}(z_i)$. Тогда

$$\|DF(z_1) - DF(z_2)\| \leq \|A - I\| + \|I - B\|, \quad (4)$$

где $A = DT(z_1^{k-1}) \dots DT(z_1)$, $B = DT(z_2^{k-1}) \dots DT(z_2)$. Заметим, что в силу (1) для любой точки $z_i = (x_i, y_i)$ справедливо равенство

$$DT(z_i) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda\mu(1 - 2y_i) \\ \lambda\mu(1 - 2x_i) & 1 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для $z_i \in D$ можно написать $x_i, y_i \in [0, 2\sqrt{2}r]$. Тогда $|\lambda\mu(1 - 2t)| < \lambda\mu$, где $t = \{x_i, y_i\}$. Рассмотрим матрицу

$$A_{max} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda\mu \\ \lambda\mu & 1 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что $\|DT(z_i)\| \leq \|A_{max}\|$. Вычислим A_{max}^n . Используя введенные обозначения, можно записать (6) следующим образом

$$A_{max} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I + \beta I_1, \quad (7)$$

где $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Для матриц I, I_1 справедливы соотношения

$$\begin{aligned} I \times I &= I, \\ I \times I_1 &= I_1, \\ (I_1)^{2l} &= I, \\ (I_1)^{2l+1} &= I_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Из равенства (7) получаем $A_{max} = U + V$, где $U = \alpha I, V = \beta I_1$. Так как матрицы I и I_1 коммутируют, верно соотношение

$$(U + V)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i U^i V^{n-i}. \quad (9)$$

Из формул (8) следует соотношение

$$U^i V^j = \begin{cases} \alpha^i \beta^j I, & i - \text{любое, } j - \text{четное,} \\ \alpha^i \beta^j I_1, & i - \text{любое, } j - \text{нечетное.} \end{cases} \quad (10)$$

Рассмотрим подробнее вид матрицы (9).

1. Случай $n = 2l$. Используя соотношения (10), легко понять, что слагаемые в сумме (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned} C_n^0 U^0 V^n &= \beta^n I, \\ C_n^1 U V^{n-1} &= C_n^1 \alpha \beta^{n-1} I_1, \\ C_n^2 U^2 V^{n-2} &= C_n^2 \alpha^2 \beta^{n-2} I, \\ C_n^3 U^3 V^{n-3} &= C_n^3 \alpha^3 \beta^{n-3} I_1, \\ \dots &= \dots \\ C_n^n U^n V^0 &= \alpha^n I. \end{aligned}$$

Тогда элементы искомой матрицы A_{max}^n будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \beta^n + C_n^2 \alpha^2 \beta^{n-2} + C_n^4 \alpha^4 \beta^{n-4} + \dots + \alpha^n, \\ a_{22} &= a_{11}, \\ a_{12} &= C_n^1 \alpha \beta^{n-1} + C_n^3 \alpha^3 \beta^{n-3} + \dots + C_n^{n-1} \alpha^{n-1} \beta, \\ a_{21} &= a_{12}. \end{aligned} \tag{11}$$

2. Случай $n = 2l + 1$. Аналогичные выкладки показывают, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} C_n^0 U^0 V^n &= \beta^n I_1 \\ C_n^1 U V^{n-1} &= C_n^1 \alpha \beta^{n-1} I \\ C_n^2 U^2 V^{n-2} &= C_n^2 \alpha^2 \beta^{n-2} I_1 \\ C_n^3 U^3 V^{n-3} &= C_n^3 \alpha^3 \beta^{n-3} I \\ \dots &= \dots \\ C_n^n U^n V^0 &= \alpha^n I. \end{aligned}$$

В этом случае элементы искомой матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= C_n^1 \alpha \beta^{n-1} + C_n^3 \alpha^3 \beta^{n-3} + \dots + C_n^{n-1} \alpha^{n-1} \beta + \alpha^n, \\ a_{22} &= a_{11}, \\ a_{12} &= C_n^2 \alpha^2 \beta^{n-2} + C_n^4 \alpha^4 \beta^{n-4} + \dots + \beta^n, \\ a_{21} &= a_{12}. \end{aligned} \tag{12}$$

В обоих рассмотренных случаях $\|A - I\| \leq \|A_{max}^k - I\|$. Из соотношений (11), (12) и того, что числа $\alpha, \beta > 0$, следует, что любой элемент матрицы $A_{max}^k - I$ не превосходит числа $(\alpha + \beta)^k$. Норма матрицы $\|B - I\|$ оценивается аналогично. Обозначим

$d = 2\sqrt{2}r$. В силу того, что точки z_1, z_2 лежат в области, определяемой (2), найдется число s , для которого $\|z_1 - z_2\|s = d$. Из неравенства (4) и в силу неравенства $d > 1$ окончательно получаем

$$\begin{aligned} \|DF(z_1) - DF(z_2)\| &\leq 2(\alpha + \beta)^k \leq 2d(\alpha + \beta)^k \leq \\ &\leq 2s(\alpha + \beta)^k \|z_1 - z_2\| \leq 2d(\alpha + \beta)^k \|z_1 - z_2\|. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Предложение 2. Производная отображения T в области существования периодической орбиты удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 2\lambda\mu$.

Доказательство. Обозначим $z = (x, y)$. В силу (1)

$$DT(z) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda\mu(1 - 2y) \\ \lambda\mu(1 - 2x) & 1 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда

$$\|DT(z_1) - DT(z_2)\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda\mu(y_2 - y_1) \\ 2\lambda\mu(x_2 - x_1) & 0 \end{pmatrix} \right\| \leq 2\lambda\mu\|z_1 - z_2\|. \quad (14)$$

Предложение доказано.

Пусть $F(z) = T^k(z) - z$. Тогда, как известно, нахождение неподвижной точки отображения T^k (или периодической точки периода k для отображения T) равносильно решению уравнения $F(z) = 0$.

Построим на множестве D сетку с шагом h . Затем для любой точки сетки z проверим выполнение условия $|(T^k(z) - z)| < \varepsilon$, где k – заданный период, а ε не меньше шага h . Точки сетки, для которых выполняется это условие, являются приближениями к периодическим. Обозначим полученное множество P . Нетрудно понять, что оно содержит первые приближения к корням уравнения $F(z) = 0$.

Для получения более точных значений корней мы воспользуемся методом Ньютона.

Справедлива следующая теорема [4].

Т е о р е м а 2.1. Пусть V, W — открытые множества в R^n . Предположим, что $\varphi : V \rightarrow W$ дифференцируемое отображение и его производная $D\varphi$ удовлетворяет условию Липшица с константой L . Пусть оператор $D\varphi$ обратим в некоторой точке $x_0 \in V$ и выполнено неравенство $KRL < 0.25$, где $K = \|(D\varphi(x_0))^{-1}\|$, $R = \|(D\varphi(x_0))^{-1}\varphi(x_0)\|$. Пусть шар $D = \{x : \|x - x_0\| \leq 2R\}$ лежит в V . Тогда существует единственное решение x^* уравнения $\varphi(x) = 0$ и $\|x_n - x^*\| \leq R/2^{n-1}$, где

$$x_{n+1} = x_n - (D\varphi(x_0))^{-1}\varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В силу доказанных выше предложений, производные отображений T и T^k удовлетворяют условию Липшица. В нашем случае $DF(z_0) = DT^k(z_0) - I$. Исключим из множества P точки, в которых метод Ньютона не определен (т.е. множество точек z , для которых $|DT^k(z) - I| = 0$). Поскольку исходное отображение T определяет полином второй степени, искомое

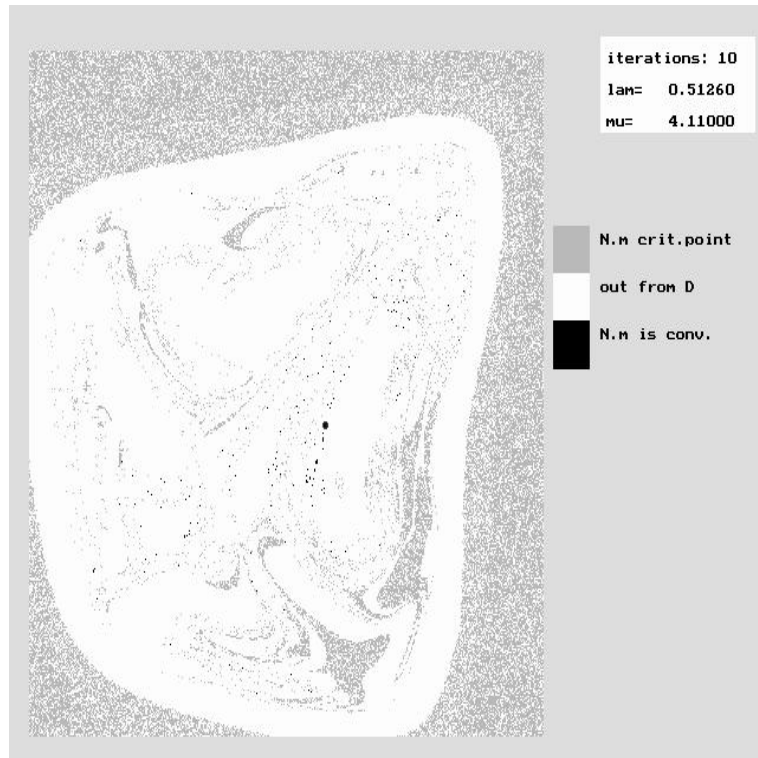


Рис. 1: "Область сходимости" метода Ньютона.

уравнение имеет степень $2k$. Следовательно, нам нужно найти $2k$ корней уравнения $F(z) = 0$. В исследуемой ситуации это означает, что на инвариантной кривой существуют две k -периодические орбиты, одна – седловая, вторая – устойчивая.

Выберем произвольную точку из множества P и построим для нее итерационный процесс Ньютона. Если он сходится, то проверяем тип устойчивости полученной точки. Нам достаточно найти по одной точке из каждой орбиты, тогда вся орбита получается последовательными итерациями отображения T . Заметим, что далеко не все точки из множества P являются начальными приближениями для метода Ньютона. Рисунок 1 иллюстрирует "область сходимости" метода Ньютона к одной из точек периодической орбиты. Число итераций равно 10. Показаны точки, в которых метод Ньютона не определен, точки, уходящие за пределы области D под действием итерационного процесса и точки, которые могут быть взяты за начальное приближение к выделенной точке орбиты. Они нарисованы черным цветом, а выбранная точка орбиты обозначена черным кругом.

3. Уточнение периодических орбит

Пусть φ – диффеоморфизм в R^n , ε – заданное число. Бесконечная

последовательность $\{x_k, k \in N\}$ называется ε -траекторией в R^n , если для любого k выполняется неравенство $\text{dist}(\varphi(x_k), x_{k+1}) < \varepsilon$. Если последовательность $\{x_k\}$ – периодическая, т. е. $x_{k+p} = x_k$ для некоторого $p \in N$, то она называется p -периодической ε -траекторией или (p, ε) -траекторией φ .

Пусть $\{x_1, \dots, x_p\}$ – первое приближение к p -периодической орбите нашего отображения T . Ее можно рассматривать, как (p, ε) -траекторию T , где ε – точность нахождения точки периодической орбиты с помощью метода Ньютона. Обозначим через V_i шар радиуса a_i с центром в точке x_i , $i = 1, \dots, p$. Положим $D = \bigcup_{i=1}^p V_i$. Тогда справедлива следующая теорема [5].

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполнены следующие условия.

1. $D\varphi$ удовлетворяет условию Липшица с константой L на множествах V_i , $i = 1, \dots, p$.
2. Отображение $C = A_p A_{p-1} \dots A_1 - I$ обратимо, где $A_i = D\varphi(x_i)$, $i = 1, \dots, p$.
3. Для любого i верно неравенство

$$a_i \geq 2K \frac{a^p - 1}{a - 1} \equiv \sigma,$$

где $K = \max_i |(A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_p \dots A_i - I)^{-1}|$, $a = \max_D |D\varphi(x)|$.

4. $LK^2 \left(\frac{a^p - 1}{a - 1} \right) \varepsilon < 0.25$.

Тогда существует единственная периодическая траектория $\{y_1, \dots, y_p\}$ диффеоморфизма φ такая, что $|x_i - y_i| < \sigma$, $i = 1, \dots, p$.

По доказанному выше, производная исходного отображения удовлетворяет условию Липшица на области D с константой $2\lambda\mu$. Построим уточненные орбиты, пользуясь приведенной теоремой.

В таблицах 1 и 2 приведены соответственно первые приближения к орбитам и уточненные значения. Построенные орбиты показаны на рисунке 2.

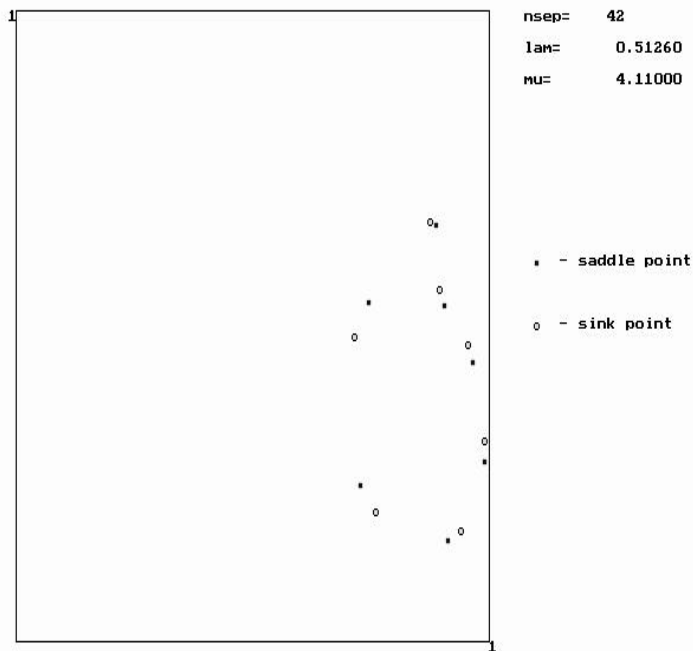


Рис. 2: 7-периодические орбиты в окрестности инвариантной кривой

Таблица 1

Первое приближение седловой орбиты		Первое приближение устойчивой орбиты	
x	y	x	y
0.912391624536223	0.160105567817306	0.894754262324649	0.556339195966324
0.728001818355833	0.246438011730560	0.956112937627579	0.469553283886238
0.746071666369410	0.537291231199655	0.990753158834290	0.317262174192534
0.887402910484926	0.661004435034576	0.939237135916475	0.173933695791150
0.904603773727284	0.532680706134007	0.760487726442444	0.205011303544961
0.965350638171502	0.441434780126280	0.714028936030814	0.483667137282152
0.989982515983677	0.285623800797494	0.874153158085516	0.665928497052353
0.912391619916745	0.160105562444139	0.894754280689455	0.556339182260344

Таблица 2

Седловая орбита периода 7		Устойчивая орбита периода 7	
x	y	x	y
0.912391615040759	0.160105560364150	0.874152967987909	0.665928384886275
0.728001813208850	0.246438019401378	0.894754248086580	0.556339741794211
0.746071672266959	0.537291240092729	0.956112801009135	0.469553573603168
0.887402912172150	0.661004433464394	0.990755555641944	0.317213132264479
0.904603775825471	0.532680702825706	0.939237432340894	0.173933953537148
0.965350639860169	0.441434775147776	0.760488225003084	0.205010880502697
0.989982515788768	0.285623795271109	0.714028653089086	0.483666383734544

Число ε для построения множества первых приближений P было выбрано равным шагу $h = 1/2000$. Точки, порождающие для седловой и

устойчивой орбит, были найдены методом Ньютона с точностью 10^{-8} . Таким образом, орбиту первого приближения можно рассматривать как ε -траекторию с $\varepsilon = 10^{-8}$. Именно это значение ε и рассматривается при получении оценок из теоремы 3.1. Метод Ньютона для орбит сходится в среднем за 4–5 итераций. Орбита найдена с точностью до 10^{-9} .

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 99-01-00683), программы поддержки ведущих научных школ (проект N 96-15-96209) и Министерства образования РФ (грант 97-0-1.8-50). Статья подготовлена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция"(проект N 2.1-326.53).

Литература

- [1] Ампилова Н.Б., Осипов А.В. Локальные бифуркации для полного отображения Гардини / Ред. ж. "Вестн. С.-Петербур. ун-та", сер. матем., мех., астрон. Деп. в ВИНТИ 14.06.96, N 1969–B96.
- [2] Ампилова Н.Б. Численное исследование поведения инвариантных кривых в окрестности неподвижных точек отображения Гардини / В сб.: Нелинейные динамические системы. Вып. 1. Изд. С.-Петербург. ун-та, СПб., 1997. С. 5–13.
- [3] D.Whitley. Discrete dynamical systems in dimensions one and two // Bull. London Math. Soc., 1983. **15**. P.177–217.
- [4] Колмогоров А.Н. Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.
- [5] G.Osipenko, I.Komarchev. Applied symbolic dynamics: construction of periodic trajectories // WSSIAA, Singapore, 1995. **4**. P. 573–587.