ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2002
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Динамические системы на многообразиях

АТТРАКТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

А.В.ЛЕБЕДЕВ

Кафедра дифференциальных уравнений
Математико-механический факультет
Санкт-Петербургский государственный университет
Библиотечная пл., д. 2.,Петродворец
Санкт-Петербург, 198504, Россия
e-mail: Andrey.Lebedev@pobox.spbu.ru

Аннотация.

Изучены качественные свойства глобальных аттракторов для двух классов конечномерных динамических систем, связанных с параболическим уравнением. Для полудинамической системы, порожденной дискретизацией параболического уравнения, получены достаточные условия образования динамической системы, оценены размеры и хаусдорфова размерность аттрактора. Для динамической системы, порожденной ограничением системы Чэфи-Инфанте в критическом случае на инерциальное многообразие, доказана полиномиальная оценка скорости сходимости траекторий к аттрактору в

терминах начального приближения, а также получена оценка отклонения аттрактора возмущенной системы от аттрактора невозмущенной системы в терминах величины возмущения системы.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование структуры в целом бесконечномерных динамических и полудинамических систем – бурно развивающаяся область современной математики [11], [19]. Особенно важны и интересны для исследования так называемые эволюционные системы, порожденные уравнениями в частных производных. При этом особое внимание уделяется структуре глобальных аттракторов таких систем [1], [16], [9]. Кроме вопроса о структуре аттракторов, интенсивному изучению был подвергнут вопрос о зависимости аттракторов от возмущения системы [10], [11]. Наряду с исследованием самих бесконечномерных эволюционных систем, изучаются два класса конечномерных динамических и полудинамических систем, порождаемых либо дискретизацией соответствующего уравнения в частных производных, либо ограничением эволюционного уравнения на конечномерное положительно инвариантное многообразие (так называемое инерциальное многообразие) [8], [18]. Наиболее развитой областью теории бесконечномерных эволюционных систем является теория систем, порожденных параболическим уравнением в частных производных [12].

Общая теория дискретизаций параболических уравнений начала развиваться после публикации работы О. А. Ладыженской [4], посвященной глобальной устойчивости разностных схем для таких уравнений. Для некоторых схем было доказано существование глобальных аттракторов и были оценены их размеры и хаусдорфова размерность. Исследование динамических систем, порожденных полными дискретизациями параболических уравнений, было продолжено в работах различных авторов, отметим, например, работу Т. Эйролы и С. Ю. Пилюгина [7]. Во всех упомянутых исследованиях дискретизация по временной переменной t использовала простейший метод – метод Эйлера.

Одной из важнейших характеристик глобального аттрактора динамической системы является скорость притяжения траекторий. В последние годы многих исследователей [5] привлекает изучение качественных свойств траекторий и аттракторов систем дифференциальных уравнений, возникающей при ограничении на инерциальное многообразие эволюционной системы, соответствующей так называемой задаче Чэфи-Инфанте [6]. В одномерной задаче Чэфи-Инфанте изучается нелинейная полугруппа, порожденная краевой задачей Дирихле для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + bu - f(u),$$

где $b > 0$ – параметр, а нелинейность f принадлежит к классу функций, типичным представителем которых является $f(u) = u^3$. Известно [12], что все неподвижные точки порожденной полугруппы $S(t)$ гиперболические, а сама она структурно устойчива тогда и только тогда, когда $b \neq m^2$, $m = 1, 2, \ldots$ Поэтому для построения полной теории задачи Чэфи-Инфанте представляет особый интерес изучение критического случая $b = m^2$. Исследование в этом направлении было начато в работах И. Н. Костина [14], [13], в которых исследуются возмущения глобального аттрактора в критическом случае. Таким образом, на примере задачи Чэфи-Инфанте были получены первые оценки скорости приближения к аттрактору бесконечномерной полугруппы, которая не является структурно устойчивой. Было показано, что при некоторых дополнительных предположениях скорость притяжения полиномиальна.

Изучение бесконечномерных систем, подобных тем, что были рассмотрены И. Н. Костиным, было продолжено в работах А. А. Корнева [2], [3]. Во всех упомянутых работах для случая одной негиперболической точки покоя была доказана полиномиальная оценка скорости притяжения к глобальному аттрактору порожденной полудинамической системы. Также были получены результаты о непрерывной зависимости аттрактора возмущенной системы от параметра. Но метод, использованный в этих работах, не позволял получить достаточной информации о скорости приближения к аттрактору отдельных точек фазового пространства, так как все полученные оценки оперируют окрестностями аттрактора системы.

Иной подход, использованный в работе И. Н. Костина и С. Ю. Пилюгина [15], позволил доказать экспоненциальную оценку скорости сходимости в терминах начального приближения и оценить расстояние между глобальными аттракторами возмущенной и невозмущенной систем для градиентоподобных динамических систем, порожденных задачей Чэфи-Инфанте в некритическом случае.

Цель работы. Изучить качественные свойства глобальных аттракторов для двух классов конечномерных динамических систем, порожденных дискретизациями параболических уравнений и ограничением соответствующих эволюционных систем на инерциальные многообразия.

Для полудинамической системы, порожденной дискретизацией параболического уравнения, получить достаточные условия образования динамической системы, условия диссипативности и оценить размеры и хаусдорфову размерность аттрактора.

Для динамической системы, порожденной ограничением системы Чэфи-Инфанте в критическом случае на инерциальное многообразие, доказать полиномиальную оценку скорости сходимости траекторий к аттрактору в терминах начального приближения, а также получить оценку отклонения аттрактора возмущенной системы от аттрактора невозмущенной системы в терминах величины возмущения системы.

Общая методика исследования. В работе использованы методы качественной теории динамических систем и дифференциальных уравнений, а также ряд методов функционального анализа и линейной алгебры.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

1. Впервые изучены качественные свойства динамических и полудинамических систем, порожденных дискретизацией задачи Дирихле для параболического уравнения методом Адамса произвольного порядка.

   (a) Получены достаточные условия образования динамической системы.

   (b) Получены достаточные условия диссипативности порожденной полудинамической системы и оценка сверху диаметра глобального аттрактора этой системы.

   (c) Получены равномерные по шагу дискретизации оценки хаусдорфовой размерности глобального аттрактора этой системы как в случае малой, так и в случае большой константы Липшица нелинейности.

2. Получены новые результаты о поведении траекторий градиентоподобной системы дифференциальных уравнений, порожденной ограничением системы Чэфи-Инфанте на инерциальное многообразие в случае критического значения параметра.

   (a) Доказана глобальная полиномиальная оценка скорости сходимости траекторий к аттрактору в терминах величины начального приближения.

(b) Получена логарифмическая оценка отклонения аттрактора возмущенной системы от аттрактора невозмущенной системы в терминах величины возмущения системы.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные результаты могут быть использованы для построения условий диссипативности, а также оценок количественных характеристик глобальных аттракторов полудинамических систем, порожденных дискретизациями уравнений в частных производных. Методы доказательств, использованные в работе, могут найти применение в построении как локальных, так и глобальных оценок скоростей притяжения траекторий динамических систем к глобальному аттрактору.

Апробация работы. Основные результаты были изложены на следующих конференциях и семинарах.

1. Третья международная научно-практическая конференция “Дифференциальные уравнения и их применения” (Санкт-Петербург, 2000).
2. Международный семинар “Patterns and waves: theory and applications” (Санкт-Петербург, 2002).
3. Санкт-Петербургский семинар по дифференциальным уравнениям (руководитель – чл.-корр. РАН В. А. Плисс), Санкт-Петербург, 2002.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [1 - 4], приведенных в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертация содержит 92 страницы машинописного текста и состоит из введения, двух глав, разделенных на 11 параграфов, и списка литературы из 38 наименований.

Краткое содержание работы

Глава 1 посвящена исследованию полудинамической системы, порожденной дискретизацией параболического уравнения. Рассматривается параболическое уравнение вида

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad t > 0, \quad x \in (0, 1), \tag{1}$$

с краевыми и начальными условиями

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad t > 0, \quad x \in (0,1). \tag{2}$$

Предполагается, что нелинейность f удовлетворяет условию Липшица с константой δ и условию

$$xf(x) \leq a_0 + a_1 x^2, \text{ где } a_0 > 0, \quad 0 < a_1 < \pi^2.$$

Рассмотрим следующую разностную аппроксимацию параболического уравнения (1). Возьмем $h > 0$, натуральное число N и положим $d = \frac{1}{N+1}$. Назовем величину h шагом по времени, а величину d – шагом по пространству. Будем аппроксимировать значение функции $u(t,x)$ в точках $t = nh$, $x = md$ $(0 \leq m \leq N+1, \ n \geq 0)$ числами v_m^n, удовлетворяющими системе разностных уравнений, которую мы опишем ниже. Граничные условия (2) исходной задачи естественным образом порождают граничные условия дискретной задачи:

$$\begin{aligned} &v_0^n = v_{N+1}^n = 0, \ \ n \geq 0, \\ &v_m^0 = u_0(md), \quad 1 \leq m \leq N. \end{aligned}$$

Вектор

$$v^n = \begin{pmatrix} v_1^n \\ \cdots \\ v_N^n \end{pmatrix}$$

назовем *слоем* по времени.

Дискретизацию по пространственной переменной x получим из стандартной аппроксимации второй производной

$$u_{xx}(nh, md) \approx \frac{1}{d^2} \left(v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n \right),$$

а по временной переменной применим интерполяционный (неявный) метод Адамса произвольного порядка $p \geq 2$. Описанная дискретизация приводит к бесконечной системе разностных уравнений

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{h} = \sum_{k=1}^{p} c_{pk}(Av^{n+2-k} + f(v^{n+2-k})), \quad n \geq p, \quad 1 \leq m \leq N, \tag{3}$$

где c_{pk} – коэффициенты метода Адамса порядка p, отображение f – естественное распространение нелинейности f на пространство $\mathbf{R}^N$, а квадратная матрица A возникает из аппроксимации второй производной. Первый член начальных данных v^0 для системы (3) определяется из начальных данных задачи для параболического уравнения, а остальные $p-2$ члена получены, возможно, иным приближенным методом.

В § 2 исследуется вопрос о разрешимости рекуррентного соотношения (3) относительно v^{n+1}. Доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для любого натурального числа N и для всех h, удовлетворяющих неравенству*

$$h < \frac{1}{c_{p1}\left(|A| + \delta\right)}, \tag{4}$$

рекуррентное соотношение (3) разрешимо относительно v^{n+1} и задает липшицеву дискретную полудинамическую систему.

Обозначим через φ полудинамическую систему, возникающую при описанной дискретизации.

В § 3 найдены достаточные условия возникновения динамической системы из рекуррентного соотношения (3). Эти условия оказываются принципиально различными для случаев $p = 2$ и $p \geq 3$.

Лемма 3.1. *Пусть $p = 2$. Если выполнено условие (4), то рекуррентное соотношение (3) задает липшицеву дискретную динамическую систему.*

Лемма 3.2. *Пусть $p \geq 3$. Если выполнены условие (4) и условие*

$$\delta < \frac{|c_{pp}|\,\eta}{\sum\limits_{k=3}^{p} |c_{pk}|},$$

где величина $\eta = \eta(N)$ определяется формулой

$$\eta = \left|A^{-1}\right|^{-1} = \frac{4}{d^2}\sin^2\frac{\pi d}{2},$$

то рекуррентное соотношение (3) задает липшицеву дискретную динамическую систему.

В § 4 изучаются условия диссипативности полудинамической системы φ, а также строится оценка сверху для диаметра глобального аттрактора этой системы.

Теорема 4.1. *Если для натурального числа N выполнено условие*

$$a_1 < \eta(N), \tag{5}$$

то найдется такое $h_0 = h_0(N) > 0$, что при всех $0 < h < h_0$ полудинамическая система φ диссипативна по Левинсону.

Известно [17], что любая диссипативная полудинамическая система имеет глобальный аттрактор. В § 4 доказывается, что аттрактор $\mathcal{A}$ полудинамической системы φ лежит в замкнутом ограниченном множестве W^{p-1}, являющемся декартовой степенью замкнутого шара

$$W(h) = \left\{ x \in \mathbf{R}^N : \quad |x|^2 \leq \frac{a_0}{\eta - a_1} + k(h)h \right\},$$

где $k(h)$ – функция, обладающая свойством $\lim\limits_{h \to 0} k(h) > 0$.

§ 5 посвящен нахождению равномерной по всем достаточно малым шагам дискретизации оценки хаусдорфовой размерности аттрактора $\mathcal{A}$ полудинамической системы φ. Доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1) Если константа Липшица нелинейности f удовлетворяет неравенству

$$\delta < \pi^2,$$

то для любого натурального числа N, удовлетворяющего условию (5), найдется такое $h_1 = h_1(N) > 0$, что при всех $0 < h < h_1$ полудинамическая система φ обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}$, хаусдорфова размерность которого не превосходит 1.

2) Если выполнено неравенство

$$\delta \geq \pi^2,$$

то для любого натурального числа N, удовлетворяющего условию (5), найдется такое $h_1 = h_1(N) > 0$, что при всех $0 < h < h_1$ полудинамическая система φ обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}$, хаусдорфова размерность которого не превосходит наименьшего из натуральных чисел k, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{2}{3}(k+1)(2k+1) > \delta + 1.$$

Глава 2 посвящена исследованию динамической системы, порожденной ограничением бесконечномерной полугруппы, соответствующей задаче Чэфи-Инфанте в критическом случае, на ее инерциальное многообразие. Для этого выделен и исследован класс градиентоподобных систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x), \ F \in C^1 \left(\mathbf{R}^n\right),$$

и порожденных ими гладких динамических систем, удовлетворяющих семи условиям (A)-(G), сформулированным в § 1 и § 2 главы 2.

(A) Существует ограниченная открытая область $G \subset \mathbf{R}^n$, в замыкании которой динамическая система φ имеет конечное число точек покоя.

(B) Для любого $t > 0$ справедливо включение $\varphi(t, \overline{G}) \subset G$, т.е. для любой точки x из замыкания области G и любого $t > 0$ выполнено включение $\varphi(t, x) \in G$.

(C) Система φ имеет гладкую функцию Ляпунова $V : \overline{G} \to \mathbf{R}$, производная которой в силу системы φ, т.е. функция

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial}{\partial t} V\left(\varphi(t, x)\right)\Big|_{t=0},$$

обладает свойством

$$\dot{V}(x) < 0$$

для любой точки $x \in \overline{G}$, не являющейся точкой покоя. Для любой точки покоя p верно равенство $\dot{V}(p) = 0$.

(D) Все, кроме одной, точки покоя динамической системы φ в области G, – гиперболические. Для негиперболической точки покоя p_0 матрица

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(p_0\right)$$

имеет одно нулевое собственное число, а остальные собственные числа имеют ненулевые вещественные части. Как известно [19], в этом случае точка покоя p_0 имеет одномерное центральное многообразие $W^c\left(p_0\right)$. Предполагаем, что

$$\varphi(t, x) \to p_0 \text{ при } t \to +\infty$$

для любой точки $x \in W^c\left(p_0\right)$.

(E) Значение функции Ляпунова на точках покоя удовлетворяет оценке

$$V\left(p_0\right) > V\left(p_i\right), \quad i = 1, \ldots, m,$$

где p_0 – негиперболическая, а $\left(p_i\right)_{i=1,\ldots,m}$ – все остальные точки покоя.

(F) Неустойчивое многообразие негиперболической точки покоя, а также устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических точек покоя динамической системы φ попарно трансверсальны.

Обозначим через $\mathcal{A}$ глобальный аттрактор системы φ.

(G) Для негиперболической точки покоя p_0 системы φ существуют такие окрестность U и числа $C > 0$ и $l > 0$, что для любой точки $x \in U$, для которой $\varphi(t, x) \in U$ при $0 < t < \tau$, справедлива оценка

$$\operatorname{dist}\left(\varphi\left(t,x\right),\mathcal{A}\right) \leq \left(Ct + \operatorname{dist}^{-l}\left(x,\mathcal{A}\right)\right)^{-1/l}$$

при $0 < t < \tau$.

В § 6 доказано, что все эти условия выполнены для ограничения бесконечномерной эволюционной системы, порожденной задачей Чэфи-Инфанте в критическом случае, на ее инерциальное многообразие.

В § 1 доказан ряд утверждений об основных качественных свойствах траекторий динамической системы φ, удовлетворяющей трем условиям (A)-(C).

В § 2 и далее предполагается, что система φ удовлетворяет всем семи условиям (A)-(G), описанным выше. Введено отношение “стрелка” на парах точек покоя системы φ, аналогичное соответствующему отношению для систем Купки-Смейла, и доказано несколько вспомогательных утверждений о поведении траекторий системы φ в окрестностях точек покоя.

В § 3 введено отображение сдвига для системы φ

$$S = \varphi(1, \cdot),$$

порождающее дискретную динамическую систему S. Для этой дискретной системы в § 3 доказана локальная экспоненциальная оценка скорости сходимости траекторий к аттрактору в окрестности гиперболической неподвижной точки.

В § 4 доказано основное утверждение главы 2 – глобальная полиномиальная оценка скорости сходимости траекторий системы φ к аттрактору в терминах величины начального приближения. Обозначим через $B_r(\mathcal{A})$ открытую r-окрестность аттрактора $\mathcal{A}$.

Теорема 4.1. *Существуют числа $r > 0$, $K \geq 1$, $C > 0$ и $l > 0$, такие что для любой точки $x \in B_r\left(\mathcal{A}\right)$ справедлива оценка*

$$\operatorname{dist}\left(\varphi\left(t,x\right),\mathcal{A}\right) \leq K\left(Ct + \operatorname{dist}^{-l}\left(x,\mathcal{A}\right)\right)^{-1/l}$$

при $t \geq 0$.

Также в § 4 установлена существенность условия трансверсальности (условия (F)) для существования полиномиальной оценки скорости сходимости решений к аттрактору. Приведен пример двумерной системы, не удовлетворяющей условию трансверсальности, для которой не выполнена полиномиальная оценка скорости сходимости решений к аттрактору.

В § 5 рассмотрены аттракторы семейства возмущенных систем S_τ, $\tau \in T$, и получена оценка отклонения аттрактора возмущенной системы от аттрактора исходной системы S в терминах величины возмущения системы:

$$\operatorname{dist}(\mathcal{A}_\tau, \mathcal{A}) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \left(\frac{L-1}{2Ld(\tau)}\alpha^{1/l}\right)^{\frac{l}{l+1}}\right)\right)^{-1/l},$$

где A_τ – аттрактор возмущенной системы S_τ, $\mathcal{A}$ – аттрактор исходной системы S,

$$d(\tau) = \sup_{u\in G} \|S_\tau(u) - S(u)\|$$

– величина возмущения системы, а $\alpha > 0$, $l > 0$ и $L > 1$ – некоторые вещественные числа, не зависящие от τ.

Литература

[1] Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука. 1989.

[2] Корнев А. А. О неустойчивых многообразиях в окрестности существенно негиперболической точки // Докл. РАН. 2001. Т. 377, № 6. С. 743–745.

[3] Корнев А. А. Об аппроксимации аттракторов полудинамических систем // Матем. Сб., 2001. Т. 192, № 10. С. 19–32.

[4] Ладыженская О. А. Глобально устойчивые разностные схемы и их аттракторы // Препринт ЛОМИ Р-5-91, Ленинград. 1991.

[5] Пилюгин С. Ю. Отслеживание в задаче Чэфи-Инфанте // Алгебра и анализ. Вып. 4, 2000. Т. 12. С. 231–272.

[6] Chafee N., Infante E. A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type // Appl. Anal. 1974/1975. Vol. 4. P. 17–37.

[7] Eirola T., Pilyugin S. Yu. Pseudotrajectories generated by a discretization of a parabolic equation // J. Dynamics and Differential Equations. 1996. Vol. 8. P. 281–297.

[8] Foias C., Sell G. R., Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations // J. Differential Equations. 1988. № 73. P. 309–353.

[9] Hale J. K. Asymptotic behavior of dissipative systems. AMS. 1988. Math. Surv. and Monogr. Vol. 25.

[10] Hale J. K. Lower semicontinuity of attractors of gradient systems and applications // Ann. Mat. Pura ed Applicata. 1989. Vol. IV. P. 281–326.

[11] Hale J. K., Magalhaes L. T., Oliva W. M. An introduction to infinite dimensional dynamical systems – geometric theory. New York: Springer-Verlag. 1984. Appl. Math. Sci. Vol. 47.

[12] Henry D. B. Some infinite-dimensional Morse-Smale systems defined by parabolic partial differential equations // J. Differential Equations 1985. Vol. 59. P. 165–205.

[13] Kostin I. N. Lower semicontinuity of a non-hyperbolic attractor // J. London Math Soc. 1995. Vol. 52, № 2. P. 568–582.

[14] Kostin I. N. Rate of attraction to a non-hyperbolic attractor // Asymptotic Anal. 1998. № 16. P. 203–222.

[15] Kostin I. N., Pilyugin S. Yu. Uniform exponential stability of attractors for a family of systems // NoDEA. 2002.

[16] Ladyzhenskaya O. A. Attractors for semi-groups and evolution equations. Cambridge Univ. Press. Cambridge. 1991.

[17] Levinson N. Transformation theory of non-linear equations of the second order // Ann. Math. 1944. Vol. 45.

[18] Temam R. Infinite dimensional system in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag. 1998.

[19] Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Texts Appl. Math. 1990. Vol. 2. Springer-Verlag. New York.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Лебедев А. В. Динамическая система, порожденная многошаговой дискретизацией параболического уравнения // Сб.: "Нелинейные динамические системы". Вып. 3. 2000. С. 41–75.

[2] Лебедев А. В. Динамические системы, порожденные дискретизациями параболического уравнения интерполяционными методами Адамса произвольного порядка // Третья научно-практическая конференция "Дифференциальные уравнения и их применения". Изд. СПбГТУ. 2000. С. 168.

[3] Лебедев А. В. Полиномиальная оценка скорости сходимости решений к аттрактору в случае одной негиперболической точки покоя // Dep. 2002.

[4] Lebedev A. V. Polynomial rate of attraction to the global attractor // International Seminar "Patterns and Waves: Theory and Applications". St.Petersburg. 2002. C. 29.