ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2002
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ С УПРАВЛЕНИЕМ — СРАВНИТЕЛЬНЫЙ ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

Г.Н.Яковенко

Московский физико-технический институт,
Кафедра теоретической механики,
Институтский пер., 9, г. Долгопрудный,
Московская обл., 141700, Россия
e–mail: yakovenko_g@mtu-net.ru

Аннотация

Система обыкновенных дифференциальных уравнений порождает однопараметрическую группу сдвигов вдоль решений и допускает множество преобразований симметрии, которое не вкладывается в конечнопараметрическую группу. У системы с управлением, как правило, обратная картина: множество преобразований сдвигов вдоль решений имеет функциональную мощность, а единственным преобразованием симметрии является тождественное. Обсуждается класс групповых систем, для которых, несмотря на функциональную мощность множества решений, преобразования сдвигов принадлежат конечнопараметрической группе. Обсуждается также подкласс групповых систем — L–системы, допускающих группу преобразований, количество параметров у которой совпадает с размерностью пространства состояний.

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–00697) и Совета Программ поддержки ведущих научных школ (грант 00–15–96137).

Функции, участвующие в дальнейших построениях, если специально не оговорено, считаются достаточно гладкими. Рассуждения, определения, утверждения — локальны: справедливы в некоторой области пространства состояний или пространства (время–состояние).

Глава I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения в нормальном виде. Группа сдвигов вдоль решений

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \varphi(t, x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$\dot{x}$ — производная от x по независимой переменной t. Введем некоторые связанные с системой (1.1) понятия. Предполагаем, что в некоторой области система (1.1) удовлетворяет условиям существования и единственности решений, т.е. через начальную точку (t_0, x_0), принадлежащую области, проходит единственное решение

$$x = f(t, t_0, x_0). \tag{1.2}$$

Для вектор–функции $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ выполняется тождество

$$f(t_0, t_0, x_0) = x_0,$$

из которого следует равенство

$$\det \left\| \left. \frac{\partial f^i(t, t_0, x_0)}{\partial x_0^k} \right|_{t=t_0} \right\| = 1,$$

а на некотором интервале $t \in [t_0, t_1]$ справедливо условие

$$\det \left\| \frac{\partial f^i(t, t_0, x_0)}{\partial x_0^k} \right\| \neq 0. \tag{1.3}$$

Введем оператор дифференцирования по t в силу системы (1.1)

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \varphi^k(t, x) \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.4}$$

Если подходить к оператору (1.4) как к инфинитезимальному оператору однопараметрической группы [1, 2], то для построения соответствующей оператору (1.4) группы требуется решить автономную систему (независимая переменная a — групповой параметр)

$$\begin{aligned} \frac{dt}{da} &= 1, & t(0) &= t_0, \\ \frac{dx}{da} &= \varphi(t,\,x), & x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

С учетом обозначения (1.2) решение имеет вид

$$\begin{aligned} t &= t_0 + a, \\ x &= f(t_0 + a,\, t_0,\, x_0). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Группа (1.5) есть однопараметрическое семейство преобразований, переносящих каждую начальную точку $(t_0,\, x_0)$ вдоль проходящего через эту точку решения в текущую точку $(t,\, x)$. Как видно из (1.5), групповой параметр a совпадает с интервалом $a = t - t_0$ изменения независимой в системе (1.1) переменной t.

Определение 1.1. Однопараметрическая группа преобразований (1.5) называется **группой сдвига** пространства $\mathbb{R}^{n+1}(t,\, x)$ вдоль решений системы (1.1). Входящая в (1.5) функция $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ определена общим решением (1.2) системы (1.1).

Если система (1.1) является автономной ($\partial\varphi/\partial t = 0$)

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

то ее общее решение (1.2) имеет вид [3]

$$x = f(t - t_0,\, x_0), \tag{1.7}$$

а группа сдвигов (1.5) —

$$\begin{aligned} t &= t_0 + a, \\ x &= f(a,\, x_0). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Отметим, что в автономном случае группа (1.8) преобразует переменные t и x независимо друг от друга (ср. с (1.5)). Множество преобразований $x = f(a,\ x_0)$ само по себе является группой, порожденной оператором

$$X_0 = \sum_{k=1}^{n} \varphi^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.9}$$

Приведем еще один класс систем, для которых группа сдвигов (1.5) преобразует переменные t и x независимо друг от друга:

$$\dot{x} = \varphi(x)u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1. \tag{1.10}$$

Переход к новой независимой переменной $s = \int u(t)dt = \psi(t)$ придает системе (1.10) автономный вид (1.6), и в переменных s, x системе соответствует группа сдвигов (1.8):

$$\begin{aligned} s &= s_0 + a, \\ x &= f(a,\, x_0). \end{aligned}$$

Возврат к исходной переменной t приводит к группе сдвигов

$$\begin{aligned} t &= f^0(a,\, t_0) = \psi^{-1}(a + \psi(t_0)), \\ x &= f(a,\, x_0) \end{aligned} \tag{1.11}$$

вдоль решений системы (1.10). Как и в случае системы (1.6), множество преобразований $x = f(a,\, x_0)$ является группой, порожденной оператором (1.9). Отметим, что при естественном обобщении системы (1.10)

$$\dot{x} = \varphi_1(x)u^1(t) + \varphi_2(x)u^2(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u^1 \in \mathbb{R}^1, \quad u^2 \in \mathbb{R}^1 \tag{1.12}$$

ситуация усложняется. Операторы X_1 и X_2, построенные при помощи функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ (см. (1.9)), порождают две однопараметрические группы $x = f_{1,2}(a_{1,2},\, x_0)$ преобразований. Но эти преобразования могут вкладываться в некоторую конечнопараметрическую группу (см. раздел 6) — группу сдвигов вдоль решений системы (1.12), а может, что типичнее, — нет (см. пример 5.1).

Пример 1.1. Линейная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.13}$$

обладает общим решением (1.2)

$$x = \Phi(t,\, t_0)x_0, \tag{1.14}$$

где $\Phi(t,\, t_0)$ — переходная матрица системы. Общее решение (1.14) порождает группу сдвигов (1.5)

$$\begin{aligned} t &= t_0 + a, \\ x &= \Phi(t_0 + a,\, t_0)x_0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

вдоль решений системы (1.13). В автономном случае ($A = \mathrm{const}$) общее решение принимает вид (1.7)

$$x = e^{A(t-t_0)}x_0, \tag{1.16}$$

а группа сдвигов — вид (1.8)

$$\begin{aligned} t &= t_0 + a, \\ x &= e^{Aa}x_0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения в нормальном виде. Группа симметрий

Систему (1.1) запишем более подробно

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t,\, x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований пространства $\mathbb{R}^{n+1}(t,\, x)$ ($\tau \in \mathbb{R}^1$ — групповой параметр) [1, 2]

$$\begin{aligned} \hat{t} &= g^0(t,\, x,\, \tau), \\ \hat{x} &= g\ (t,\, x,\, \tau). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Группе соответствует оператор

$$Y = \xi(t,\, x)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \eta^k(t,\, x)\frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{2.3}$$

где функции $\xi(t,\, x)$ и $\eta^k(t,\, x)$ связаны с уравнениями группы (2.2) следующим образом

$$\xi(t,\, x) = \left.\frac{\partial g^0(t,\, x,\, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}, \qquad \eta^k(t,\, x) = \left.\frac{\partial g^k(t,\, x,\, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}. \tag{2.4}$$

Для обратного перехода — от оператора (2.3) к группе (2.2) — нужно составить автономную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{t}}{d\tau} &= \xi(\hat{t},\, \hat{x}), \\ \frac{d\hat{x}^k}{d\tau} &= \eta^k(\hat{t},\, \hat{x}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

и решить ее при начальных условиях

$$\begin{aligned}\hat{t}(0) &= t, \\ \hat{x}(0) &= x.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Определение 2.1. Группа (2.2) называется **группой симметрий — допускаемой группой** — системы (2.1), если замена переменных (2.2) в системе (2.1) приводит к системе

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \varphi(\hat{t},\, \hat{x}) \tag{2.7}$$

с такой же вектор–функцией $\varphi(\hat{t},\, \hat{x})$ в правой части, что и в (2.1). Оператор (2.3), соответствующий группе симметрий (2.2), называется **оператором симметрий — допускаемым оператором** — системы (2.1).

Из определения 2.1 следует, что если взять любое решение $x = f(t)$ системы (2.1), применить к нему какое–нибудь преобразование группы симметрий (2.2), из уравнения $\hat{t} = g^0(t,\, f(t),\, \tau)$ выразить $t = t(\hat{t},\, \tau)$ и подставить в $\hat{x} = g(t,\, f(t),\, \tau)$, то результат вычислений $\hat{x}(\hat{t},\, \tau)$ будет удовлетворять такой же по виду системе (2.5), как и исходная (2.1), т.е. любое решение системы (2.1) в результате преобразований группы (2.2) переходит в решение той же системы.

Для получения условий, связывающих правую часть $\varphi(t,\, x)$ системы (2.1) и функции $\xi(t,\, x)$, $\eta^k(t,\, x)$, определяющие группу симметрий (2.2), представим систему (2.7) в виде $d\hat{x} = \varphi(\hat{t},\, \hat{x})d\hat{t}$, применим к обеим частям этого соотношения оператор $(\partial/\partial\tau)|_{\tau=0}$, воспользуемся обозначениями (2.4) и начальными условиями (2.6), разделим полученное равенство на dt, после раскрытия производных по dt приходим к результату [1, 2]

$$\frac{\partial\eta^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \varphi^k \frac{\partial\eta^i}{\partial x^k} = \xi\frac{\partial\varphi^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \eta^k \frac{\partial\varphi^i}{\partial x^k} + \varphi^i \left(\frac{\partial\xi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \varphi^k \frac{\partial\xi}{\partial x^k} \right). \tag{2.8}$$

С использованием обозначения $[X_0,\, Y]$ для коммутатора операторов (1.4) и (2.3) равенству (2.8) можно придать более компактный вид

$$[X_0,\, Y] = (X_0\xi)X_0. \tag{2.9}$$

Опишем всю совокупность операторов симметрий (2.3), допускаемых системой (2.1). При помощи соотношений (2.8), (2.9) легко проверяются следующие утверждения.

Предложение 2.1. Совокупность операторов симметрий (2.3) является алгеброй Ли: если операторы Y_1 и Y_2 удовлетворяют (2.9), то операторы $c_1Y_1 + c_2Y_2$ (c_1, $c_2 = \mathrm{const}$) и $[Y_1, Y_2]$ также удовлетворяют (2.9).

Предложение 2.2. При любой функции $\xi(t, x)$ оператор $\xi(t, x)X_0$, где X_0 определен равенством (1.4), допускается системой (2.1), т.е. оператор $Y = \xi(t, x)X_0$ удовлетворяет соотношению (2.9).

Группа (2.2), соответствующая оператору $\xi(t, x)X_0$, "тиражирует"решения, перемещая каждое решение вдоль него же.

Рассмотрим частный случай групп симметрий (2.2)

$$\begin{aligned} \hat{t} &= t, \\ \hat{x} &= g\ (t, x, \tau). \end{aligned} \tag{2.10}$$

— независимая переменная t преобразуется тождественно. Таким группам соответствует оператор (2.3) с $\xi(t, x) = 0$ (см. (2.4))

$$Y^* = \sum_{k=1}^{n} \theta^k(t, x) \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{2.11}$$

Условия симметрии (2.8), (2.9) при $\xi(t, x) = 0$ принимают вид

$$\frac{\partial \theta^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \varphi^k \frac{\partial \theta^i}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^{n} \theta^k \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k}, \tag{2.12}$$

$$[X_0, Y^*] = 0. \tag{2.13}$$

Из предложений 2.1 и 2.2 следует

Предложение 2.3. Каждой группе симметрий (2.2) можно сопоставить группу симметрий (2.10) с тождественным преобразованием переменной t. Соответствующие группам симметрий (2.2) и (2.10) операторы (2.3), (2.11) связаны соотношением $Y^* = Y - \xi(t, x)X_0$, где X_0 — оператор (1.4). Для коэффициентов операторов это соотношение влечет равенство $\theta^k = \eta^k - \xi\varphi^k$.

Справедливо и обратное утверждение

Предложение 2.4. Каждой группе симметрий (2.10) с тождественным преобразованием переменной t можно сопоставить совокупность групп симметрий (2.2). Соответствующие группам симметрий операторы (2.11), (2.3) связаны соотношением $Y = Y^* + \xi(t,\, x)X_0$, где $\xi(t,\, x)$ — произвольная функция.

Совокупность операторов симметрий Y^*, удовлетворяющих условиям (2.12), (2.13), определяется полным набором $w^1(t,\, x),\, \dots,\, w^n(t,\, x)$ функционально независимых первых интегралов системы (2.1):

$$X_0 w^i = \frac{\partial w^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \varphi^k(t,\, x)\frac{\partial w^i}{\partial x^k} = 0, \quad i = \overline{1,\, n}, \tag{2.14}$$

$$\det \left\| \frac{\partial w^i(t,\, x)}{\partial x^k} \right\| \neq 0, \tag{2.15}$$

$$\{X_0 w = 0\} \Rightarrow \{w = F(w^1,\, \dots,\, w^n)\}. \tag{2.16}$$

Если известно общее решение (1.2) системы (2.1) (системы (1.1)), то в качестве такого набора $w^1(t,\, x),\, \dots,\, w^n(t,\, x)$ можно взять результат решения системы (1.2) относительно x_0: $w^i(t,\, x) = x_0^i = f^i(t_0,\, t,\, x)$. Дифференцирование тождества $w^i(t,\, f(t,\, t_0,\, x_0)) \equiv x_0^i$ по t приводит к условию (2.14) для первого интеграла. Дифференцирование тождества $f^i(t,\, t_0,\, w(t,\, x)) \equiv x^i$ по x^k приводит к факту взаимообратности матриц $\|\partial f^i/\partial x_0^j\|$ и $\|\partial w^j/\partial x^k\|$, а с учетом (1.3) к условию (2.15) функциональной независимости первых интегралов w^i.

Приведем с доказательством результат, определяющий все множество групп симметрий (2.10) с тождественным преобразованием переменной t.

Предложение 2.5. Совокупность операторов симметрий (2.11) (t преобразуется тождественно) представляется выражением

$$Y^* = \sum_{j,k=1}^{n} F^j(w^1,\, \dots,\, w^n)\theta_j^k(t,\, x)\frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{2.17}$$

где $w^1(t,\, x),\, \dots,\, w^n(t,\, x)$ — функционально независимые первые интегралы системы (2.1), матрица $\|\theta_j^k(t,\, x)\|$ является обратной к матрице $\|\partial w^j/\partial x^k\|$, $F^1,\, \dots,\, F^n$ — произвольные функции своих аргументов.

○ Введем обозначения $\zeta_k^j = \partial w^j/\partial x^k$ и $\theta_j^k(t,\, x)$ для элементов матрицы обратной к $\|\zeta_k^j\|$, т.е. выполняется

$$\sum_{j=1}^{n} \zeta_k^j \theta_j^l = \delta_k^l. \tag{2.18}$$

Продифференцируем (2.14) по x^l, полученный результат умножим на $\theta_i^\alpha \theta_\beta^l$, просуммируем по индексам i и l, с учетом (2.18) и следствия из него

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \zeta_k^j}{\partial z} \theta_j^l + \zeta_k^j \frac{\partial \theta_j^l}{\partial z} \right) = 0 \tag{2.19}$$

(z — одна из переменных t, x^1, …, x^n) получим

$$\frac{\partial \theta_\beta^\alpha}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \varphi^k \frac{\partial \theta_\beta^\alpha}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^{n} \theta_\beta^k \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^k}. \tag{2.20}$$

Сравнение этого результата с (2.12) приводит к выводу, что операторы

$$Y_\beta^* = \sum_{k=1}^{n} \theta_\beta^k(t,\, x) \frac{\partial}{\partial x^k}, \qquad \beta = \overline{1,\, n}, \tag{2.21}$$

допускаются системой (2.1). Так как вследствие (2.15), (2.18) справедливо неравенство $\det \|\theta_\beta^k\| \neq 0$, то для произвольного оператора $Y^* = \sum \theta^i \partial/\partial x^i$ найдутся такие функции $F^j(t,\, x)$, что выполняются соотношения

$$\theta^i = \sum_{j=1}^{n} F^j \theta_j^i, \qquad Y^* = \sum_{j=1}^{n} F^j Y_j^*. \tag{2.22}$$

Подстановка (2.22) в (2.13) приводит с учетом $[X_0,\, Y_j^*] = 0$, (2.15) и (2.18) к эквивалентному (2.13) уравнению $X_0 F^j = 0$, т.е. для операторов симметрий функции $F^j(t,\, x)$ в (2.22) — первые интегралы системы (2.1), что и доказывает с учетом (2.16) требуемый результат (2.17). $\otimes$

Предложение 2.6. Множество преобразований симметрии, определенных операторами (2.17), нельзя вложить в конечнопараметрическую группу.

$\bigcirc$ Для доказательства требуется показать, что множество операторов (2.17) не вкладывается в конечномерную алгебру Ли. Рассмотрим один из операторов симметрий (2.21), например, Y_1^* и введем бесконечную серию операторов симметрий (в силу предложения 2.5)

$$\widetilde{Y}_m = (w)^m Y_1^*, \qquad m = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,$$

где w — один из первых интегралов, участвующих в построении операторов симметрий (2.17), $(w)^m$ — w в степени m. Серия операторов $\widetilde{Y}_m$ не вкладывается в конечномерное линейное векторное пространство, иначе для некоторого номера $m = M > 0$ с постоянными c_k, $c_M \neq 0$ выполнялось бы равенство

$$\sum_{k=0}^{M} c_k \widetilde{Y}_k = 0$$

и ему эквивалентное

$$\sum_{k=0}^{M} c_k (w)^k = 0$$

следствием которого является соотношение $w \equiv \mathrm{const}$, противоречащее условию (2.15) функциональной независимости первых интегралов. Так как серия операторов $\widetilde{Y}_m$ не вкладывается в конечномерное линейное векторное пространство, то — и в конечномерную алгебру Ли. $\bigotimes$

Объединение результатов предложений 2.4 — 2.6 приводит к окончательному результату этого пункта.

Теорема 2.1. Множество однопараметрических групп симметрий (2.2) системы (2.1) определяется множеством операторов симметрий (2.3)

$$Y = \xi(t,\, x) X_0 + \sum_{j,k=1}^{n} F^j(w^1,\, \ldots,\, w^n) \theta_j^k(t,\, x) \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{2.23}$$

где X_0 — оператор (1.4), $\xi(t,\, x)$ и $F^j(w^1,\, \ldots,\, w^n)$ — произвольные функции своих аргументов, $w^1(t,\, x),\, \ldots,\, w^n(t,\, x)$ — функционально независимые первые интегралы системы (2.1), матрица $\|\theta_j^k(t,\, x)\|$ является обратной к матрице $\|\partial w^j / \partial x^k\|$. Множество преобразований симметрии, определенных при помощи (2.5), (2.6) операторами (2.23), нельзя вложить в конечнопараметрическую группу.

Пример 2.1. Для линейной системы (1.13) из примера 1.1 по общему решению (1.14) вычисляется полный набор первых интегралов

$$w^j(t,\, x) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k^j(t_0,\, t) x^k, \qquad j = \overline{1,\, n}, \tag{2.24}$$

где Φ_k^j — элементы переходной матрицы Φ, вместо t_0 можно подставить любое число. В соответствии с теоремой 2.1 по первым интегралам (2.24) вычисляется матрица $\|\partial w^j / \partial x^k\| = \|\Phi_k^j(t_0,\, t)\|$ и ей обратная $\|\theta_j^k(t,\, x)\| = \|\Phi_j^k(t,\, t_0)\|$. Формула (2.23) определяет всю совокупность операторов симметрий линейной системы (1.13)

$$\begin{aligned} Y = \xi(t,\, x)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j,k=1}^{n} a_j^k(t) x^j \frac{\partial}{\partial x^k}\right) + \\ + \sum_{j,k=1}^{n} F^j(w^1,\, \ldots,\, w^n)\Phi_j^k(t,\, t_0)\frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned} \tag{2.25}$$

с произвольными функциями $\xi(t,\, x)$ и $F^j(w^1,\, \ldots,\, w^n)$.

3. Обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешимые относительно старших производных

Предполагается, что система дифференциальных уравнений ($(x^k)^{(l)}$ — l–тая производная по t от переменной x^k

$$\begin{gathered} F^i(t,\, x^1,\, \dot{x}^1,\, \ddot{x}^1,\, \ldots,\, (x^1)^{(m_1)},\, \ldots,\, x^n,\, \dot{x}^n,\, \ddot{x}^n,\, \ldots,\, (x^n)^{(m_n)}) = 0, \\ i = \overline{1,\, n}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

разрешима относительно старших производных

$$\begin{aligned} (x^1)^{(m_1)} &= \varphi^1(t,\, x^1,\, \dot{x}^1,\, \ddot{x}^1,\, \ldots,\, (x^1)^{(m_1-1)},\, \ldots, \\ &\qquad x^n,\, \dot{x}^n,\, \ddot{x}^n,\, \ldots,\, (x^n)^{(m_n-1)}), \\ &\ \vdots \\ (x^n)^{(m_n)} &= \varphi^n(t,\, x^1,\, \dot{x}^1,\, \ddot{x}^1,\, \ldots,\, (x^1)^{(m_1-1)},\, \ldots, \\ &\qquad x^n,\, \dot{x}^n,\, \ddot{x}^n,\, \ldots,\, (x^n)^{(m_n-1)}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Уравнения (3.2) стандартным образом — переходом к новым переменным

$$\begin{gathered} y^1 = x^1,\, y^2 = \dot{x}^1,\, \ldots,\, y^{m_1} = (x^1)^{(m_1-1)},\, \ldots,\, y^M = (x^n)^{(m_n-1)}, \\ M = \sum_{i=1}^{n} m_i \end{gathered} \tag{3.3}$$

— приводятся к нормальному виду

$$\begin{aligned} \dot{y}^1 &= y^2, \\ \dot{y}^2 &= y^3, \\ &\ \vdots \\ \dot{y}^{m_1} &= \varphi^1(t,\, y), \\ &\ \vdots \\ \dot{y}^M &= \varphi^n(t,\, y). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Для системы (3.4) в нормальном виде справедливы все результаты предыдущих пунктов: системе соответствует однопараметрическая группа преобразований пространства $\mathbb{R}^{M+1}(t,\, y)$ — группа сдвигов вдоль решений; система допускает множество однопараметрических групп симметрий, которое не вмещается ни в одну конечнопараметрическую группу. Такой же вывод можно сделать для изначальной системы (3.1) (и системы (3.2)), если дозволено преобразовывать переменные

$$t,\, x^1,\, \dot{x}^1,\, \ddot{x}^1,\, \ldots,\, (x^1)^{(m_1-1)},\, \ldots,\, x^n,\, \dot{x}^n,\, \ddot{x}^n,\, \ldots,\, (x^n)^{(m_n-1)}$$

как независимые. Иначе обстоит дело, если “правила игры” разрешают преобразовывать лишь переменные $t,\, x^1,\, x^2,\, \ldots,\, x^n$, а эти преобразования однозначно индуцируют преобразования производных.

Рассмотрим ситуацию на примере одного уравнения второго порядка

$$\ddot{x} = \varphi(t,\, x,\, \dot{x}). \tag{3.5}$$

Введение дополнительной переменной $y = \dot{x}$ “нормализует”уравнение (3.5)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \varphi(t,\, x,\, y). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Система (3.6) имеет общее решение (1.2)

$$\begin{aligned} x &= f^x(t,\, t_0,\, x_0,\, y_0), \\ y &= f^y(t,\, t_0,\, x_0,\, y_0) \end{aligned} \tag{3.7}$$

и группу сдвигов (1.5)

$$\begin{aligned} t &= t_0 + a, \\ x &= f^x(t_0 + a,\, t_0,\, x_0,\, y_0), \\ y &= f^y(t_0 + a,\, t_0,\, x_0,\, y_0) \end{aligned} \tag{3.8}$$

пространства $\mathbb{R}^3(t,\, x,\, y)$ вдоль этого решения. Положение меняется, если потребовать, чтобы вдоль решений переменные x преобразовывались независимо от переменных y, т.е. первое равенство в общем решении (3.7) имеет вид $x = f^x(t,\, t_0,\, x_0)$. В силу первого уравнения системы (3.6) для второго равенства в (3.7) выполняется $f^y = \dot{f}^x(t,\, t_0,\, x_0)$, т.е. в преобразовании переменных y начальные данные y_0 также не участвуют: $y = f^y(t,\, t_0,\, x_0)$, что противоречит тождеству $y_0 = f^y(t_0,\, t_0,\, x_0,\, y_0)$ и условию (1.3). Таким образом, преобразований сдвигов вдоль решений, в которых переменная x преобразуется независимо ($x = f^x(t,\, t_0,\, x_0)$) не существует.

Рассмотрим преобразования симметрии для уравнения (3.5) и системы (3.6). Если переменные t, x, y, преобразуются как независимые, то в соответствии с теоремой 2.1 множество операторов симметрий системы (3.6) имеет функциональную мощность, и они порождают множество однопараметрических групп симметрий, которое не вкладывается в конечнопараметрическую группу. Если же отыскивается группа симметрий

$$\begin{aligned} \hat{t} &= g^0(t,\, x,\, \tau), \\ \hat{x} &= g^x(t,\, x,\, \tau) \end{aligned} \tag{3.9}$$

уравнения (3.5) (переменная $\dot{x} = y$ в преобразованиях на участвует), то ей соответствует группа симметрий

$$\begin{aligned} \hat{t} &= g^0(t,\, x,\, \tau), \\ \hat{x} &= g^x(t,\, x,\, \tau), \\ \hat{y} &= g^y(t,\, x,\, y,\, \tau) \end{aligned} \tag{3.10}$$

системы (3.6), где преобразование $\hat{y} = g^y(t,\, x,\, y,\, \tau)$ вычисляется с использованием первого уравнения системы (3.6) (см. условие симметрии (2.7))

$$\begin{aligned} \hat{y} = g^y(t,\, x,\, y,\, \tau) = \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \frac{\dfrac{d\hat{x}}{dt}}{\dfrac{d\hat{t}}{dt}} = \frac{\dfrac{dg^x(t,\, x,\, \tau)}{dt}}{\dfrac{dg^0(t,\, x,\, \tau)}{dt}} = \\ = \frac{\dfrac{\partial g^x(t,\, x,\, \tau)}{\partial t} + \dfrac{\partial g^x(t,\, x,\, \tau)}{\partial x} y}{\dfrac{\partial g^0(t,\, x,\, \tau)}{\partial t} + \dfrac{\partial g^0(t,\, x,\, \tau)}{\partial x} y}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Пусть группе (3.9) соответствуют коэффициенты $\xi(t,\, x)$, $\eta(t,\, x)$ инфинитезимального оператора (2.3) (см. (2.4)). Переход к группе (3.10) добавляет коэффициент $\lambda(t,\, x,\, y)$ для преобразования $\hat{y} = g^y(t,\, x,\, y,\, \tau)$. Вычисление с учетом (3.11) приводит к результату

$$\begin{aligned} \lambda(t,\, x,\, y) = \left.\frac{\partial g^y(t,\, x,\, y,\, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \\ = \frac{\partial \eta(t,\, x)}{\partial t} + y\frac{\partial \eta(t,\, x)}{\partial x} - y\left(\frac{\partial \xi(t,\, x)}{\partial t} + y\frac{\partial \xi(t,\, x)}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

К Софусу Ли восходит утверждение

Теорема 3.1 [1, 4, 5]. Уравнение (3.5) допускает не более, чем восьмипараметрическую группу симметрий (3.9) ($\tau \in \mathbb{R}^8$). Система (3.6) допускает не более, чем восьмипараметрическую группу симметрий (3.10) (правые части уравнений группы связаны равенством (3.11)).

Приведем два крайних с симметрийной точки зрения примера уравнений (3.5). Для нахождения группы симметрий (вычисления далее опущены) требуется составить для системы (3.6) условия симметрии (2.8) ($\eta^1 = \eta$, $\eta^2 = \lambda$), заменить λ в соответствии с уравнением (3.12), приравнять расположенные в правой и левой частях коэффициенты при одинаковых степенях переменной y, решить полученные дифференциальные уравнения относительно $\xi(t, x)$ и $\eta(t, x)$, решение содержит не более восьми произвольных постоянных, каждой постоянной соответствует оператор симметрий (2.3) и однопараметрическая группа симметрий, вычисленная при помощи (2.5), (2.6), суперпозиция приводит к многопараметрической группе симметрий.

Пример 3.1 [1, 4, 5]. Уравнение

$$\ddot{x} = 0 \tag{3.13}$$

допускает максимально возможную (по условию теоремы 3.1) восьмипараметрическую группу симметрий (3.9), которая вычисляется при помощи (2.5), (2.6) по операторам симметрий

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_4 = t\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_5 = x\frac{\partial}{\partial t},$$
$$Y_6 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_7 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_8 = tx\frac{\partial}{\partial t} + x^2\frac{\partial}{\partial x}.$$

Любой другой оператор симметрий, определяющий группу симметрий (3.9), есть линейная комбинация приведенных операторов с постоянными коэффициентами. Отметим, что если переменная t не преобразуется, то уравнение (3.5) допускает трехпараметрическую группу, определенную операторами Y_2, Y_3 и Y_6. Приведем для сравнения общий вид оператора симметрий системы (3.6) (с $\varphi(t, x, y) \equiv 0$) при условии, что переменные t, x, y преобразуются независимо. Система $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$ имеет первые интегралы $w^1 = x - ty$, $w^2 = y$ и в соответствии с условием теоремы 2.1 допускает оператор симметрий (2.23)

$$Y = \xi(t,\, x,\, y)\frac{\partial}{\partial t} + \{y\xi(t,\, x,\, y) + F^1(w^1,\, w^2) + tF^2(w^1,\, w^2)\}\frac{\partial}{\partial x} + \\ + F^2(w^1,\, w^2)\frac{\partial}{\partial y}$$

с произвольными функциями $\xi(t,\, x,\, y)$, $F^1(w^1,\, w^2)$, $F^2(w^1,\, w^2)$ своих переменных. Например, при $\xi = 0$, $F^1 = w^2$, $F^2 = 0$ оператор $y\partial/\partial x$ генерирует группу симметрий $\hat{t} = t$, $\hat{x} = x + y\tau$, $\hat{y} = y$ системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$.

Пример 3.2. Вычисления приводят к выводу, что уравнение

$$\ddot{x} = t^2 + x^2 + \dot{x}^2 \tag{3.14}$$

допускает только тривиальную группу симметрий (3.9): $\hat{t} = t$, $\hat{x} = x$. Такая ситуация типична для произвольного уравнения (3.5). Так же, как и в предыдущем примере, если погрузить уравнение (3.14) в систему (3.6) и дозволить преобразовывать переменные t, x, y независимо, то множество преобразований симметрии не вместится ни в какую конечномерную группу.

С другими примерами групп симметрий (3.9) уравнения (3.5) можно познакомиться в [4].

Глава II. СИСТЕМЫ С УПРАВЛЕНИЕМ

4. Регулярные системы с управлением. Первые интегралы

Рассматривается динамическая система с управлением

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r, \tag{4.1}$$

где $x = (x^1,\, ...,\, x^n)$ — вектор, описывающий состояние динамической системы, $u = (u^1,\, ...,\, u^r)$ — управление. Система (4.1) изучается локально — в некоторой D–области пространства $\mathbb{R}^{n+1}(t, x)$. В процессе построения разных конструкций D–область может сужаться. Допустимые управления $u(t)$ считаем измеримыми и принимающими значения из заданного постоянного множества $U \subset \mathbb{R}^r$. Для содержательности дальнейших построений предполагается, что множество U дает возможность создать, по крайней мере две разные правые части у системы (4.1).

Процедура исследования системы (4.1) на регулярность состоит из двух этапов: выделение базисных операторов и пополнение этой системы операторов. Опишем эти этапы, предполагая сначала, что построение проводится в некоторой фиксированной точке $(t,\, x)$ D–области.

Введем оператор полного дифференцирования по времени t в силу системы (4.1)

$$X(u) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{4.2}$$

и рассмотрим этот оператор как семейство, параметризованное u: придавая управлению u различные постоянные допустимые значения $u \in U$, получаем различные операторы семейства. Выделим в этом семействе базис, т.е. подставим в (4.2) такие допустимые управления u_0, u_1, ..., u_p, что операторы

$$X_j = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \varphi_j^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad j = \overline{0,\, p}, \tag{4.3}$$

где $\varphi_j^i(t, x) = \varphi(t, x, u_j)$, линейно несвязаны [1, 6], а подстановка в (4.2) любого другого допустимого управления приводит к оператору, который линейно связанно выражается через операторы $X_0,\, X_1,\, \ldots,\, X_p$:

$$X(u) = \sum_{j=0}^{p} f^j(t, x, u) X_j. \tag{4.4}$$

Так как управление u входит в формулы (4.2), (4.4) только своими значениями (отсутствуют производные $\dot{u}$, $\ddot{u}$ и т.д.), то при любом допустимом управлении $u(t)$ оператор $X(u(t))$ линейно выражается через конечное число операторов X_j, не зависящих от управления:

$$X(u(t)) = \sum_{j=0}^{p} f^j(t, x, u(t)) X_j. \tag{4.5}$$

Определение 4.1. Линейно несвязанную систему операторов (4.3) назовем **B–системой** в точке t, x (или в D–области), если, во-первых, для каждого оператора X_j найдется такое допустимое управление $u \in U$, что выполняется $X_j = X(u_j)$, где $X(u)$ семейство операторов (4.2) дифференцирования по t в силу системы (4.1); во-вторых, при любых допустимых управлениях $u \in U$ между операторами (4.2) и (4.3) справедлива линейная связь (4.4).

Вследствие линейной несвязности для количества $p + 1$ операторов в B–системе (4.3) выполняется $p \leq n$.

После выделения базиса (4.3) система $X_0,\, X_1,\, \ldots,\, X_p$ пополняется [1, 6], в результате чего строится полная система, состоящая из B–системы (4.3) и операторов

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} \varphi_k^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad k = \overline{p+1,\, m}, \tag{4.6}$$

вычисленных в процессе пополнения. Операторы (4.6) есть результат некоторой последовательности вычисления коммутаторов $[\cdot,\cdot]$ операторов (4.3), поэтому у них отсутствует дифференцирование по независимой переменной t, т.е. матрица коэффициентов операторов X_0, X_1, $\ldots$, X_p, X_{p+1}, $\ldots$, X_m имеет вид

$$J = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \varphi_0^1 & \cdots & \varphi_p^1 & \varphi_{p+1}^1 & \cdots & \varphi_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0^n & \cdots & \varphi_p^n & \varphi_{p+1}^n & \cdots & \varphi_m^n \end{array} \right\|. \tag{4.7}$$

По определению полной системы [1, 6] для J выполняется

$$\mathrm{rank} J = m + 1. \tag{4.8}$$

Определение 4.2. Полную систему операторов (4.3), (4.6) назовем **F–системой** в точке t, x (или в D–области), если (4.3) — B–система, а операторы (4.6) — добавляются в процедуре пополнения.

Описанная процедура вычисления F–системы в точке t, x — корректна и содержит конечное число шагов: из построения и из условия (4.8) следует $p \le m \le n$. При разных же значениях t, x разные управления u могут создавать B–систему (4.3), и к операторам (4.6) могут приводить разные последовательности вычисления коммутаторов, вследствие чего, в частности, возможна потеря непрерывности у элементов $\varphi_l^i(t,x)$ матрицы (4.7).

Определение 4.3 [7, 8]. Система (4.1) называется **регулярной** в D–области, если в каждой точке t, x D–области выполнены следующие условия:

- один и тот же набор постоянных допустимых управлений u_0, $\ldots$, u_p выделяет B–систему (4.3);
- одна и та же последовательность коммутаторов приводит к F–системе X_0, X_1, $\ldots$, X_p, X_{p+1}, $\ldots$, X_m, содержащей одно и то же количество m операторов.

В дальнейших построениях участвует еще одна полная система.

Определение 4.4. Ft–системой называется результат

$$\frac{\partial}{\partial t},\, X_0,\, X_1,\, \ldots,\, X_m,\, X_{m+1},\, \ldots,\, X_M$$

пополнения системы операторов $\partial/\partial t$, X_0, X_1, …, X_m, где X_0, X_1, …, X_m — операторы F-системы.

Введем для системы (4.1) понятия решения и первого интеграла.

Определение 4.5. Решением системы (4.1) называется пара вектор-функций $x(t)$, $u(t)$ ($u(t)$ — допустимое управление), которая при подстановке ее в систему (4.1) приводит к тождеству.

Определение 4.6 [7, 8, 9]. Первым интегралом системы с управлением (4.1) называется функция $w(t,x)$, которая на любом решении $x(t)$, $u(t)$ системы (4.1) сохраняет постоянное значение

$$w(t,x(t)) = w(t_0,\, x_0) = \mathrm{const}.$$

Определение 4.7. Стационарным первым интегралом системы с управлением (4.1) называется первый интеграл $w(x)$, не зависящий от времени t.

Определение 4.8. Интегральным базисом первых интегралов (стационарных первых интегралов) называется такой набор функционально независимых первых интегралов $w^1(t,x)$, …, $w^Q(t,x)$ $(w^1(x),\, \ldots,\, w^q(x))$, что для любого другого первого интеграла $w(t,x)$ $(w(x))$ справедливо с некоторой функцией $F(\cdot,\ldots,\cdot)$ равенство

$$w(t,x) = F(w^1(t,x),\, \ldots,\, w^Q(t,x)) \quad (w(x) = F(w^1(x),\, \ldots,\, w^q(x))).$$

Определение 4.9. Первый интеграл $w(t,x)$ $(w(x))$ называется **нетривиальным**, если для него выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial w(t,x)}{\partial x^i} \right)^2 \neq 0.$$

Теорема 4.1 [7, 8, 9]. Функция $w(t,x)$ является первым интегралом системы (4.1) в том и только в том случае, если она есть решение полной системы

$$X_0 w = 0, \quad X_1 w = 0,\, \ldots,\, X_m w = 0, \tag{4.9}$$

где $X_0, \ldots, X_m$ — F-система (4.3), (4.6), соответствующая регулярной системе (4.1). Интегральный базис первых интегралов состоит из $n-m$ функций.

◯ Из определения 4.6 следует, что функция $w(t,x)$ является первым интегралом тогда и только тогда, когда при любом допустимом управлении $u(t)$ тождественно выполняется равенство

$$\frac{dw}{dt} = X(u(t))w = \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(t,x,u(t))\frac{\partial w}{\partial x^i} = 0. \qquad (4.10)$$

Покажем что для тождественности (4.10) необходимо и достаточно выполнение равенств (4.9). Действительно, если тождество (4.10) справедливо для любых допустимых управлений $u(t)$, то оно справедливо и для базисных управлений $u_0, u_1, \ldots, u_p$, т.е. выполняется

$$X_0 w = 0, \ldots, X_p w = 0;$$

справедливость равенств $X_{p+1}w = 0, \ldots, X_m w = 0$ следует из того, что операторы $X_{p+1}, \ldots, X_m$ строятся коммутированием (возможно неоднократным) операторов $X_0, X_1, \ldots, X_p$, поэтому выполняется [1, 6]

$$[X_k,\, X_l]w = X_k X_l w - X_l X_k w = 0,$$

$$[X_i,\, [X_k,\, X_l]]w = X_i[X_k,\, X_l]w - [X_k,\, X_l]X_i w = 0$$

и т.д. Обратно, если функция $w(t,x)$ удовлетворяет системе (4.9), то вследствие (4.5) она будет удовлетворять при любом $u(t)$ соотношению (4.10). Указанное в формулировке теоремы количество функционально независимых первых интегралов следует из полноты системы (4.9) [1, 6]. ⊗

Из формулировки теоремы вытекает

Следствие.Если количество уравнений в полной системе (4.9) равно $n+1$, где n — размерность регулярной системы (4.1), то нетривиальные первые интегралы отсутствуют.

Теорема 4.2 [7, 8, 9]. Функция $w(x)$ является стационарным первым интегралом системы (4.1) в том и только в том случае, если $w(x)$ есть решение полной системы

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \;\; X_0 w = 0, \ldots, X_m w = 0, \ldots, X_M w = 0, \qquad (4.11)$$

где $\partial w/\partial t$, $X_0, \ldots, X_M$ — Ft–система: результат пополнения системы $\partial w/\partial t$, $X_0, \ldots, X_m$, ($X_0, \ldots, X_m$ — F-система). Интегральный базис стационарных первых интегралов содержит $n - M$ функций.

○ Так как система (4.9) входит в систему (4.11), любое решение системы (4.11) является первым интегралом. Первое уравнение $\partial w/\partial t = 0$ в (4.11) гарантирует независимость решений от t. Количество $n - M$ функционально независимых первых интегралов следует из полноты системы (4.11) [1, 6]. ⊗

В следующих примерах проведено исследование на регулярность и проиллюстрирована техника вычисления первых интегралов.

Пример 4.1. Рассматривается система (x, y, u — скаляры)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin u + x\cos u, \\ \dot{y} &= \cos u, \qquad u \in U. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Для множества U допустимых значений естественно предположить

$$U \subset [0, 2\pi),$$

т.е. для любого допустимого управления u выполняется

$$0 \le u < 2\pi. \tag{4.13}$$

Системе (4.12) соответствует оператор (4.2)

$$X(u) = \frac{\partial}{\partial t} + (sinu + xcosu)\frac{\partial}{\partial x} + cosu\,\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.14}$$

В силу предположения о том, что множество U состоит по крайней мере из двух разных управлений, возможны два альтернативных варианта.

I. Множеству U принадлежат три разных управления u_0, u_1, u_2. Для определенности с учетом (4.13) предполагаем

$$0 \le u_0 < u_1 < u_2 < 2\pi. \tag{4.15}$$

Подстановка u_0, u_1, u_2 в (4.14) приводит к операторам

$$\begin{aligned} X_0 &= X(u_0) = \frac{\partial}{\partial t} + (\sin u_0 + x\cos u_0)\frac{\partial}{\partial x} + \cos u_0\,\frac{\partial}{\partial y}, \\ X_1 &= X(u_1) = \frac{\partial}{\partial t} + (\sin u_1 + x\cos u_1)\frac{\partial}{\partial x} + \cos u_1\,\frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= X(u) = \frac{\partial}{\partial t} + (\sin u_2 + x\cos u_2)\frac{\partial}{\partial x} + \cos u_2\,\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Вычисления для матрицы J, составленной из коэффициентов операторов X_0, X_1, X_2, дают результат

$$\det\, J = 4\sin\frac{u_2-u_1}{2}\sin\frac{u_1-u_0}{2}\sin\frac{u_0-u_2}{2}.$$

При условии (4.15) выполняется $\det\, J \neq 0$, т.е. операторы X_0, X_1, X_2 — линейно несвязаны, а так как их количество совпадает с размерностью пространства $\mathbb{R}^3(t,\, x,\, y)$, то при любом другом управлении $u \in U$ оператор $X(u)$ линейно связанно выразится через операторы (4.16). Через операторы (4.16) выразится и каждый коммутатор $[X_i,\, X_k]$, $\;i, j = 0, 1, 2$. Таким образом, если множество U содержит по крайней мере три разных управления, то система (4.12) является регулярной во всем пространстве $\mathbb{R}^3(t,\, x,\, y)$, а система операторов (4.16) — B-система и F-система. Первые интегралы в этом случае отсутствуют.

II. Пусть множество U допустимых значений состоит из двух управлений u_0, u_1 (при условии (4.15)), и соответствующие операторы X_0, X_1 из (4.16) линейно несвязаны — являются B-системой. Вычисление коммутатора приводит к результату

$$[X_0,\; X_1] = \sin(u_0 - u_1)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.17}$$

Для матрицы J_1, составленной из коэффициентов операторов X_0, X_1 и $[X_0,\, X_1]$, выполняется

$$\det\, J_1 = 2\sin^2\frac{u_0-u_1}{2}\sin\frac{u_0+u_1}{2}\cos\frac{u_0-u_1}{2}.$$

Вследствие (4.15) справедливо неравенство

$$\sin\frac{u_0-u_1}{2} \neq 0,$$

поэтому возможны только два случая, приводящие к вырожденности матрицы J_1 и к тому, что B-система X_0, X_1 есть F-система.

а) Случай

$$\sin\frac{u_0+u_1}{2} = 0$$

с учетом (4.15) реализуется множеством

$$U = \{u_0 = \alpha \neq 0; \quad u_1 = 2\pi - \alpha\}. \tag{4.18}$$

Системе (4.12) соответствует B-система (она же F-система)

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\partial}{\partial t} + (\quad \sin\alpha + x\cos\alpha)\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial y}, \\ X_1 &= \frac{\partial}{\partial t} + (-\sin\alpha + x\cos\alpha)\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

Решив систему $X_0 w = 0,\ X_1 w = 0$, приходим к гарантированному теоремой 4.1 первому интегралу системы (4.12)

$$w = y - t\cos\alpha. \tag{4.20}$$

b) Случай

$$\cos\frac{u_0 - u_1}{2} = 0$$

с учетом (4.15) реализуется множеством

$$U = \{u_0 = \beta - \frac{\pi}{2};\quad u_1 = \beta + \frac{\pi}{2};\quad \frac{\pi}{2} \le \beta < 3\frac{\pi}{2}\}. \tag{4.22}$$

Системе (4.12) соответствуют B- и F-системы

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\partial}{\partial t} - (\cos\beta - x\sin\beta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin\beta\,\frac{\partial}{\partial y}, \\ X_1 &= \frac{\partial}{\partial t} + (\cos\beta - x\sin\beta)\frac{\partial}{\partial x} - \sin\beta\,\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Решение полной системы $X_0 w = 0,\ X_1 w = 0$, приводит к стационарному первому интегралу

$$w = (\cos\beta - x\sin\beta)e^{-y}. \tag{4.24}$$

Если же двухточечное множество U отличается от (4.18) и (4.22), то F-системой для (4.12) являются операторы X_0, X_1 из (4.16) и коммутатор (4.17), нетривиальные первые интегралы отсутствуют.

Пример 4.2. Уравнение Риккати ($x \in \mathbb{R}^1$, на управления u^i ограничений нет)

$$\dot{x} = u^1 + 2u^2 x + u^3 (x)^2. \tag{4.25}$$

Соотношение $X(u) = f^0 X_0 + f^1 X_1$ (см. (4.4)) для операторов (4.2), (4.3)

$$\begin{aligned} X(u) &= \frac{\partial}{\partial t} + (u^1 + 2u^2 x + u^3 (x)^2)\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_0 &= X(u^1 = 0,\ u^2 = 0,\ u^3 = 0) = \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_1 &= X(u^1 = 1,\ u^2 = 0,\ u^3 = 0) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \tag{4.26}$$

выполняется с коэффициентами

$$f^0 = 1 - f^1, \qquad f^1 = u^1 + 2u^2 x + u^3 (x)^2. \tag{4.27}$$

Так как для коммутатора справедливо равенство $[X_0, X_1] = 0$, линейно несвязанные операторы X_0, X_1 являются B- и F-системами. Уравнение (4.25) в соответствии с определением 4.3 — регулярная система и в силу следствия из теоремы 4.1 первые интегралы у уравнения с управлением (4.25) отсутствуют.

5. Системы с управлением. Сдвиги вдоль решений

Подстановка конкретной функции $u(t)$ превращает систему с управлением (4.1) в конкретную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) со всеми вытекающими последствиями разделов 1 и 2. В частности, конкретной функции $u(t)$ соответствует однопараметрическая группа (1.5) сдвигов вдоль решений $x(t)$. Но так как множество допустимых управлений имеет функциональную мощность, множество преобразований сдвигов, определенных разными управлениями $u(t)$, как правило, не вмещается в конечнопараметрическую группу. Убедимся в этом на примере.

Пример 5.1. Пусть управление u в системе

$$\dot{x} = x^3 + u, \quad x \in R^1, \quad u \in U \subset R^1, \tag{5.1}$$

может принимать только два значения: $u = 0$, $u = 1$, — с возможностью переключения. Покажем, что две однопараметрические группы сдвигов — вдоль решений систем $\dot{x} = x^3$ и $\dot{x} = x^3 + 1$ — не вкладываются в конечнопараметрическую группу. Такое вложение возможно в том и только в том случае, когда соответствующие системам операторы (1.4)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} + x^3 \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (x^3 + 1)\frac{\partial}{\partial x}$$

дополняются до конечномерной алгебры Ли. Последовательное коммутирование операторов X_1, X_2

$$X_3 = [X_2, X_1] = 3x^2 \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_4 = [X_3, X_1] = 3x^4 \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_5 = [X_3, X_4] = 18x^5 \frac{\partial}{\partial x}, \ldots, X_m = [X_3, X_{m-1}] = b_m x^m \frac{\partial}{\partial x}, \ldots$$

$$b_m = 3(m-3)b_{m-1} > 0, \ m > 5, \ b_5 = 18$$

приводит к выводу, что каждый вновь вычисленный оператор X_m не выражается линейно (с постоянными коэффициентами) через предыдущие, поэтому бесконечная цепочка операторов $X_k,\ k = 1, 2, \ldots$ не погружается в конечномерную алгебру Ли, а преобразования, генерируемые операторами X_1, X_2, не вмещаются в конечнопараметрическую группу.

6. Групповые системы

Введем класс систем, восходящий к Софусу Ли [10, 11], для которых, несмотря на функциональную мощность множества допустимых управлений $u(t)$, множество преобразований сдвигов вдоль решений принадлежит конечнопараметрической группе.

Определение 6.1. Система

$$\dot{x}^k = \sum_{l=1}^{r} \varphi_l^k(x) u^l(t), \qquad k = \overline{1, n}, \qquad u \in U \subset R^r \tag{6.1}$$

называется **групповой**, если для функций $\varphi_l^k(x)$ выполнены условия

$$\operatorname{rank} \|\varphi_l^k(x)\| = \min\{n, r\}, \tag{6.2}$$

$$\left\{ \sum_{l=1}^{r} c^l \varphi_l^k(x) = 0, \quad c^l = \text{const} \right\} \Rightarrow \{c^l = 0, \quad l = \overline{1, r}\}, \tag{6.3}$$

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} C_{ij}^k X_k, \quad C_{ij}^k = \text{const}, \quad i, j, k = \overline{1, r}, \tag{6.4}$$

где обозначено

$$X_l = \sum_{k=1}^{n} \varphi_l^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}, \qquad l = \overline{1, r}, \tag{6.5}$$

$[X_i, X_j]$ — коммутатор операторов (6.5).

Равенство (6.4) показывает, что множество операторов $\sum\limits_{k=1}^{r} u^k X_k$, $u^k = \text{const}$ есть алгебра Ли с базисом X_k и структурными постоянными C_{ij}^k [1].

Термин *групповая система* оправдан тем, что каждой системе (6.1) ставится в соответствие r–параметрическая группа

$$x^k = g^k(x_0^1, \ldots, x_0^n, v^1, \ldots, v^r), \qquad k = \overline{1, n}, \tag{6.6}$$

уравнения которой по базису (6.5) соответствующей алгебры Ли можно вычислить, например, следующим способом [1]: каждому оператору X_l система уравнений $dx^i/dv^j = \varphi^i_j(x)$, $x(0) = x_0$ ставит в соответствие решение $x = g_j(x_0^1, \ldots, x_0^n, v^j)$ — однопараметрическую группу преобразований; r-параметрическая группа (6.6) — суперпозиция этих групп. Группе (6.6) соответствует алгебра Ли с базисом (6.5) и структурными постоянными C^k_{ij}, определенными в (6.4).

Пример 6.1 Уравнению Риккати (4.25) из примера 4.2

$$\dot{x} = u^1 + 2u^2 x + u^3 (x)^2, \quad x \in R^1, \quad u \in U \subset R^3, \tag{6.7}$$

соответствуют операторы (6.5)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} \tag{6.8}$$

(обозначения для X_i в (4.26) и (6.8) не совпадают). Условие (6.4) выполнено при структурных постоянных C^k_{ij} $(i < j)$: $C^1_{12} = 2$, $C^2_{13} = 1$, $C^3_{23} = 2$, т.е. уравнение (6.7) — групповая система. По операторам (6.8) вычисляется группа (6.6)

$$x = \frac{x_0 e^{2v^2}}{1 - x_0 v^3} + v^1. \tag{6.9}$$

Определение 6.2. *L*–**система**

$$\dot{x}^k = \sum_{l=1}^{n} \varphi^k_l(x) u^l, \qquad k = \overline{1, n}, \qquad u \in U \subset R^n \tag{6.10}$$

это групповая система при $r = n$.

Принадлежность к L-системам инвариантна по отношению к неособенному преобразованию $\tilde{x} = f(x)$ переменных состояния. Действительно, в переменных $\tilde{x}$ система (6.10) имеет такую же структуру

$$\dot{\tilde{x}}^k = \sum_{l=1}^{n} \tilde{\varphi}^k_l(\tilde{x}) u^l, \qquad k = \overline{1, n}, \tag{6.11}$$

где обозначено

$$\tilde{\varphi}^k_l(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^i} \varphi^i_l(x) \bigg|_{x \to \tilde{x}}.$$

Нетрудно убедиться в том, что функции $\tilde{\varphi}_l^k(\tilde{x})$ удовлетворяют условиям (6.2) – (6.4), причем с теми же постоянными C_{ij}^k в (6.4), что в переменных x. Если системы (6.10), (6.11), связанные неособенным преобразованием $x \leftrightarrow \tilde{x}$, считать эквивалентными, то каждому классу эквивалентности соответствуют постоянные C_{ij}^k:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dot{x}^k & = & \sum\limits_{l=1}^{n} \varphi_l^k(x) u^l \\ & \Big\updownarrow & x \leftrightarrow \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}}^k & = & \sum\limits_{l=1}^{n} \tilde{\varphi}_l^k(\tilde{x}) u^l \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \{C_{ij}^k\}. \tag{6.12}$$

Соответствие — взаимно однозначно: по структурным постоянным C_{ij}^k в некоторых переменных вычисляется базис $X_1, \ \ldots \ , X_n$ алгебры Ли, по операторам X_l определяется представитель класса эквивалентности (6.12) с возможностью заменой переменных перейти к другому представителю. Приведем один из вариантов построения по постоянным C_{ij}^k матрицы $\|\varphi_l^k(x)\|$, определяющей правые части L-системы (6.10) и коэффициенты операторов (6.5) [12]. Рассматривается аналитическая функция

$$B(v) = \frac{v}{e^v - 1} = 1 - \frac{1}{2}v + \frac{1}{6}v^2 - \ldots \tag{6.13}$$

и матрица $H = \|h_k^i(x)\|$ с элементами $h_k^i(x) = \sum\limits_{l=1}^{n} C_{kl}^i x^l$. В качестве матрицы $\|\varphi_l^k(x)\|$ принимается функция $B(H)$ от матрицы H. Набор C_{ij}^k являет собой пример инвариантной математической модели динамической системы. По этому набору можно исследовать те свойства системы, которые сохраняются при заменах переменных: управляемость, структура оптимального управления и т.д. Алгебраическая структура, определяемая C_{ij}^k, позволяет строить в соответствующем классе эквивалентности (6.12) представители специального вида: линейного, билинейного, двухуровневого, блочного и т.д.

Рассмотрим еще один способ вычисления для групповой системы (6.1) соответствующей группы (6.6). Строится r-мерная L-система

$$\dot{v}^k = \sum_{l=1}^{r} \tilde{\varphi}_l^k(v) u^l, \qquad k = \overline{1, r}, \tag{6.14}$$

для которой условие (6.4) выполняется с такими же постоянными

$$C_{ij}^k, \qquad i,\, j,\, k = \overline{1, r},$$

как и для для групповой системы (6.1). Вычисление матрицы $\tilde{\varphi}_l^k(v)$ в (6.14) можно провести, например, взяв за основу функцию (6.13). Если для групповой системы (6.1) выполняется $n = r$, то в качестве системы (6.14) можно принять еще один экземпляр системы (6.1). Группа (6.6) есть решение системы уравнений

$$\frac{\partial x^i}{\partial v^k} = \sum_{l=1}^{r} \varphi_l^i(x) \tilde{\psi}_k^l(v), \qquad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, r}, \quad x(0) = x_0, \tag{6.15}$$

где $\varphi_l^i(x)$ — функции из (6.1), $\tilde{\psi}_k^l(v)$ — матрица обратная к матрице $\|\tilde{\varphi}_l^k(v)\|$ из (6.14):

$$\|\tilde{\psi}_k^l(v)\| = \|\tilde{\varphi}_l^k(v)\|^{-1}. \tag{6.16}$$

Проверка показывает, что вследствие совпадения постоянных C_{ij}^k для $\varphi_l^i(x)$ и $\tilde{\varphi}_l^k(v)$, система (6.15) вполне интегрируема.

Следующая теорема утверждает, что преобразование сдвига, соответствующее любой паре $\{u(t),\ s\}$, принадлежит r-параметрической группе (6.6).

Теорема 6.1 [11]. Сопоставим паре $\{u(t),\ s\}$ преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ — сдвиги вдоль решений $x(t)$ групповой системы (6.1): из точек $x(0) = x_0$ в точки $x(s)$. Преобразование $x_0 \leftrightarrow x(s)$ принадлежит группе (6.6), т.е. каждой паре $\{u(t),\ s\}$ соответствует такой набор параметров $v^1, \ldots, v^r$, что преобразование (6.6) и преобразование $x \leftrightarrow x(s)$ совпадают.

◯ Управление $u(t)$, принадлежащее паре $\{u(t),\ s\}$, подставим в групповую систему (6.1) и в вспомогательную L-систему (6.14). В предположении, что $v = 0$ определяет в уравнениях (6.6) группы тождественное преобразование, найдем решение $v(t)$ системы (6.14) при начальных данных $v(0) = 0$. Подстановка решения $v(t)$ в уравнения (6.6) приводит к функциям

$$x(t) = g(x_0, v(t)), \tag{6.17}$$

для которых выполняется

$$x(0) = g(x_0, v(0)) = g(x_0, 0) = x_0. \tag{6.18}$$

С учетом (6.14) — (6.16) покажем, что вектор–функция (6.17) есть решение групповой системы (6.1):

$$\dot{x}^i(x_0, v(t)) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x^i}{\partial v^k} \dot{v}^k = \sum_{j,k,l=1}^{r} \varphi_l^i(x) \tilde{\psi}_k^l(v) \tilde{\varphi}_k^l(v) u^j(t) =$$

$$= \sum_{j,l=1}^{r} \varphi_l^i(x) \delta_j^l u^j(t) = \sum_{l=1}^{r} \varphi_l^i(x) u^l(t).$$

Таким образом, сдвиг $x_0 \leftrightarrow x(s)$ вдоль решений системы (6.1), соответствующий паре $\{u(t),\ s\}$, есть преобразование

$$x = g(x_0^1, \ldots, x_0^n, v^1(s), \ldots, v^r(s)),$$

группы (6.6), заданное параметрами $v^1(s), \ldots, v^r(s)$. $\otimes$

Из теоремы 6.1, к примеру, следует, что преобразование сдвига пространства $\mathbb{R}^1(x)$ за время s вдоль решений уравнения Риккати (6.7), в которую подставлено произвольное допустимое управление $u(t)$, есть представитель трехпараметрической группы (6.9).

7. Системы с управлением. Симметрии по состоянию

Вводится понятие группы симметрий по состоянию. В определении участвует однопараметрическая группа преобразований (τ — групповой параметр)

$$\hat{x} = \hat{x}(t, x, \tau) \tag{7.1}$$

с инфинитезимальным оператором

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \theta^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \theta^i = \left. \frac{\partial \hat{x}^i(t, x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}. \tag{7.2}$$

Отметим две особенности группы (7.1): переменные t и u преобразуются тождественно; преобразования группы не зависят от управления u.

Определение 7.1 [13]. Неособенное преобразование $\hat{x} = \hat{x}(t, x)$ называется **преобразованием симметрии по состоянию** системы (4.1), если замена переменных в (4.1) приводит к системе

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \varphi(t, \hat{x}, u) \tag{7.3}$$

с такими же функциями $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot)$ в правой части, что и у исходной системы (4.1). Однопараметрическая группа (7.1) называется **группой симметрий**

по состоянию системы (4.1) — или допускается системой (4.1), — если любое ее преобразование есть симметрия по состоянию. Оператор (7.2), соответствующий группе, называется **оператором симметрий по состоянию**. Определение — группа симметрий по состоянию — используется и для многопараметрических групп.

Название — симметрии по состоянию — оправдано тем, что преобразуются только переменные состояния x. Следуя определению решения 4.5 системы (4.1), группу симметрий по состоянию можно характеризовать следующим переводом решений в решения: $\{x(t), u(t)\} \longrightarrow \{\hat{x}(t), u(t)\}$, т.е. группа (7.1) является группой симметрий для каждой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получающейся подстановкой в (4.1) конкретного управления $u(t)$. Условия (2.12), (2.13) для группы симметрий системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяют условие (использованы операторы (4.2), (7.2))

$$\forall u(t),\ [X(u(t)), Y] = 0 \tag{7.4}$$

для группы симметрий по состоянию (7.1) системы (4.1). Условие (7.4) можно получить независимо, если продифференцировать результат (7.3) замены переменных (7.1) по групповому параметру τ, положить затем $\tau = 0$ и раскрыть полную производную $d\theta^i(t,x)/dt = X(u(t))\theta^i(t,x)$. В операторе Y отсутствует дифференцирование по времени t (см. (7.2)), поэтому формула, полученная после раскрытия коммутатора в (7.4), будет содержать только значения вектор-функции $u(t)$ и не содержать значений производных $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t), \ldots$, это обстоятельство позволяет записать условие (7.4) в эквивалентном виде

$$\forall u,\ [X(u), Y] = 0 \tag{7.5}$$

— использован оператор (4.2) с постоянными управлениями u.

Теорема 7.1. **[13]** Регулярная система (4.1) допускает группу симметрий по состоянию (7.1), т.е. выполнено условие (7.4) (или (7.5)), тогда и только тогда, когда справедливы уравнения

$$[X_k, Y] = 0, \qquad k = \overline{0, m}, \tag{7.6}$$

$$Y f^j = 0, \qquad j = \overline{0, p}, \tag{7.7}$$

где X_k — операторы (4.3), (4.6) F-системы, f^j — функции в линейной связи (4.4), Y — оператор (7.2) группы (7.1).

◯ *Необходимость* ($\Rightarrow$). Пусть справедливо условие симметрии (7.4) (или (7.5)). Подстановка в (7.4) (или в (7.5)) базисных управлений u_k,

$k = \overline{0,p}$, доказывает справедливость (7.6) при $k = \overline{0,p}$. Доказательство равенств (7.6) при $k > p$ проводится по индукции. Оператор X_k при $k > p$ вычисляется в процессе процедуры пополнения и является коммутатором $X_k = [X_i, X_l]$ двух операторов X_i, X_l, $i, l < k$, для которых уравнение (7.6) предполагается справедливым. Справедливость уравнения (7.14) для X_k следует из тождества Якоби [1]

$$[X_k, Y] = [[X_i, X_l], Y] = [[X_i, Y], X_l] - [[X_l, Y], X_i] = 0.$$

Для доказательства (7.7) подставим разложение (4.4) в (7.5) (или (4.5) в (7.4)), раскроем коммутатор

$$\begin{gathered}[X(u), Y] = [\sum_{j=0}^{p} f^j X_j, Y] = \\ = \sum_{j=0}^{p} f^j [X_j, Y] - \sum_{j=0}^{p} (Y f^j) X_j = - \sum_{j=0}^{p} (Y f^j) X_j\end{gathered} \tag{7.8}$$

— учтено выполнение для X_j, $j = \overline{0,p}$, уравнения (7.6). Равенство (7.7) следует из того, что операторы X_j, $j = \overline{0,p}$, -системы линейно несвязаны.

Достаточность ($\Leftarrow$) — уравнения (7.6), (7.7) влекут выполнение условий (7.4) или (7.5) — доказывает цепочка равенств (7.8). $\bigotimes$

Замечание 7.1. При вычислении операторов симметрий можно в уравнениях (7.6) вместо операторов X_k F-системы (1.3), (1.6) использовать операторы сильно эквивалентной системы [6]

$$X_i^* = \sum_{k=0}^{m} a_i^k X_k, \quad a_i^k = \mathrm{const}, \quad \det \|a_i^k\| \neq 0, \quad i, k = \overline{0,m}.$$

Теорема 7.2. Совокупность операторов симметрий по состоянию (7.2) является алгеброй Ли: если операторы Y_1 и Y_2 удовлетворяют условию (7.4) (или (7.5)), то операторы $aY_1 + bY_2$ (a, $b = \mathrm{const}$) и $[Y_1,\, Y_2]$ также удовлетворяют (7.4) ((7.5)).

$\bigcirc$ Для доказательства используются свойства коммутатора [1]:

$$\forall u \in U, \quad [X(u), aY_1 + bY_2] = a[X(u), Y_1] + b[X(u), Y_2] = 0,$$

$$\forall u \in U, \quad [X(u), [Y_1, Y_2]] = [Y_1, [X(u), Y_2]] - [Y_2, [X(u), Y_1]] = 0.$$

Так как в операторах Y отсутствует дифференцирование по t (см. (7.2)), то замена u на $u(t)$ на результат вычисления влияния не оказывает. $\bigotimes$

Определение 7.2 [13, 14]. Алгебру Ли — множество операторов Y симметрий по состоянию, удовлетворяющих одному из эквивалентных условий (7.4), (7.5), — назовем алгеброй A_0 системы (1.1).

В отличие от систем обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде, у которых множество операторов симметрий всегда имеет функциональную мощность (см. теорему 2.1), у системы с управлением (4.1) возможны разные ситуации. Крайний случай: алгебра A_0 состоит из единственного оператора $Y = 0$, а группа симметрий — из тождественного преобразования. Другой крайний случай: множество операторов симметрий не вмещается ни в одну конечномерную алгебру Ли. Особое положение занимают системы с пустым интегральным базисом первых интегралов. Предположение об отсутствии у регулярной системы (4.1) нетривиальных первых интегралов формализуется следующим образом

$$\{\forall u(t) \in U,\ X(u(t))w = 0\} \Rightarrow \{w \equiv \mathrm{const}\}, \tag{7.9}$$

где $X(u(t))$ — семейство операторов (4.5).

Теорема 7.3 [13, 14]. Пусть регулярная система (4.1) не имеет нетривиальных первых интегралов, т.е. выполнено требование (7.9). Тогда алгебра A_0 операторов Y симметрий по состоянию конечномерна, и ее размерность q не превосходит размерности n пространства состояний системы (4.1): $0 \leq q \leq n$.

◯ Предположим противное утверждению теоремы: алгебра A_0 содержит операторы

$$Y_j = \sum_{i=1}^{n} \theta^i_j(t, x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad j = \overline{1, n+1}, \tag{7.10}$$

для которых выполняется

$$\{\sum_{i=1}^{n+1} c^j Y_j = 0, \quad c^j = \mathrm{const}\} \Rightarrow \{c^j = 0, \quad j = \overline{1, n+1}\}, \tag{7.11}$$

$$[X(u),\, Y] = 0, \qquad j = \overline{1, n+1}. \tag{7.12}$$

Пусть в некоторой области прямоугольная $n \times (n+1)$ матрица $\|\theta^i_j(t, x)\|$ коэффициентов операторов (7.10) имеет общий ранг q: $1 \leq q \leq n$ ($q = 0$ противоречит условию (7.11)). Предполагаем, что ранговый минор образован коэффициентами операторов $Y_1, \ldots, Y_q$, откуда следует справедливость, во-первых, условия

$$\{\sum_{k=1}^{q} \zeta^k(t,x) Y_k = 0\} \Rightarrow \{\zeta^k(t,x) \equiv 0, \quad k = \overline{1,q}\}, \tag{7.13}$$

во-вторых, равенств

$$\exists \zeta_l^k(t,x), \qquad Y_l = \sum_{k=1}^{q} \zeta_l^k(t,x) Y_k, \qquad l = \overline{q+1,\, n+1}. \tag{7.14}$$

Обе части равенства (7.14) прокоммутируем с оператором $X(u)$. В силу (7.12) приходим к уравнению

$$\sum_{k=1}^{q} \{X(u) \zeta_l^k(t,x)\} Y_k = 0,$$

вследствие которого с учетом (7.13) получаем

$$X(u) \zeta_l^k(t,x) = 0,$$

т.е. $\zeta_l^k(t,x)$ — первые интегралы системы (4.1) (см. (4.10)). По условию (7.9) теоремы ζ_l^k — постоянные величины, и соотношения (7.14) определяют линейную зависимость между операторами $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$, что противоречит предположению (7.11). $\bigotimes$

Конечномерность алгебры Ли с базисом $Y_k,\ k = \overline{1,q}$, и принадлежность в соответствии с теоремой 7.2 коммутаторов $[Y_i, Y_j]$ базисных операторов к этой алгебре, в частности, означают, что для $[Y_i, Y_j]$ справедливы равенства

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{q} C_{ij}^k Y_k, \qquad i,\, j = \overline{1,q}, \tag{7.15}$$

где числа C_{ij}^k — структурные постоянные q-мерной алгебры Ли: алгебры A_0. По базисным операторам $Y_k,\ k = \overline{1,q}$, алгебры Ли вычисляется q-параметрическая группа [1]

$$\hat{x} = \hat{x}(t,x,\tau), \qquad \tau \in \mathbb{R}^q, \tag{7.16}$$

которой принадлежат все однопараметрические группы симметрий по состоянию (7.1) системы (4.1). Числа C_{ij}^k в (7.15) являются структурными постоянными и для группы (7.16).

Для выяснения в случае (7.9) размерности q алгебры A_0 и вычисления базисных операторов Y_k, $k = \overline{1,q}$, требуется исследовать систему (7.6), (7.7). Техника исследования продемонстрирована ниже на примере 7.1. Естественно ожидать, что регулярные системы (4.1) с нетривиальной алгеброй A_0 ($\dim A_0 \geq 1$) обладают специальными свойствами по сравнению с произвольными системами. Одно из таких свойств — декомпозиция системы (1.1) — определяется следующей теоремой (доказательство [13, 14] опущено).

Теорема 7.4. Регулярная система (4.1) допускает q-параметрическую группу симметрий по состоянию (7.16) ($q \leq n$) с операторами Y_k, $k = \overline{1,q}$, в том и только в том случае, если неособенным преобразованием $x \leftrightarrow y$, z системе (4.1) можно придать вид

$$\dot{y}^i = \tilde{\varphi}^i(t, y, u), \quad i = \overline{1, n-q}, \tag{7.17}$$

$$\dot{z}^k = \sum_{l=1}^{q} \varphi_l^k(z) f^l(t, y, u), \quad k = \overline{1,q}, \tag{7.18}$$

причем для элементов $\varphi_l^k(z)$ квадратной матрицы $\|\varphi_l^k(z)\|$ выполняется

$$\det \|\varphi_l^k(z)\| \neq 0, \tag{7.19}$$

$$[Z_i, Z_j] = \sum_{k=1}^{q} C_{ij}^k Z_k, \qquad i,\, j = \overline{1,q}, \tag{7.20}$$

где обозначено

$$Z_l = \sum_{k=1}^{q} \varphi_l^k(z) \frac{\partial}{\partial z^k}, \qquad l = \overline{1,q}. \tag{7.21}$$

Числа C_{ij}^k совпадают со структурными постоянными группы симметрий (7.16) и соответствующей алгебры A_0. Процесс приведения системы (4.1) к виду (7.17), (7.18) эквивалентен процессу приведения преобразованием $x \leftrightarrow y$, z базисных операторов Y_j, $j = \overline{1,q}$, алгебры A_0 к виду

$$Y_l = \sum_{k=1}^{q} \theta_l^k(z) \frac{\partial}{\partial z^k}, \qquad l = \overline{1,q}, \quad z \in \mathbb{R}^q. \tag{7.22}$$

Пример 7.1. Системе (x, y — переменные состояния, u, v — управления при отсутствии ограничений, a, b — параметры)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ux + v + ax^2 + by^2, \\ \dot{y} &= u \end{aligned} \tag{7.23}$$

соответствует оператор (4.2)

$$X(u,v) = \frac{\partial}{\partial t} + (ux + v + ax^2 + by^2)\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y} \tag{7.24}$$

и операторы (4.3) B-системы

$$\begin{aligned} X_0 &= X(0,0) &= \frac{\partial}{\partial t} + (ax^2 + by^2)\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_1 &= X(1,0) &= \frac{\partial}{\partial t} + (x + ax^2 + by^2)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= X(0,1) &= \frac{\partial}{\partial t} + (1 + ax^2 + by^2)\frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Определитель матрицы, составленной из коэффициентов операторов (7.25), при любых значениях параметров a и b равен 1. Связь (4.4) выполняется при

$$f^0 = 1 - u - v, \quad f^1 = u, \quad f^2 = v. \tag{7.26}$$

Через операторы (7.25) линейно выражается не только оператор (7.24), но и любой оператор в пространстве переменных t, x, y, в том числе коммутаторы операторов (7.25), т.е. B-система (7.25) является и F-системой. Вследствие теоремы 4.1 нетривиальные первые интегралы у системы (7.23) отсутствуют, а вследствие теоремы 7.3 система (7.23) допускает конечномерную алгебру A_0 симметрий (конечнопараметрическую группу (7.16)), размерность которой зависит от выбора параметров a и b. Для вычисления коэффициентов $\theta(t,x,y)$, $\mu(t,x,y)$ оператора симметрий (7.2)

$$Y = \theta(t,x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \mu(t,x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{7.27}$$

сделаем переход к сильно эквивалентной (7.25) системе операторов (см. замечание 7.1)

$$\begin{aligned} X_0^* &= X_0 &= \frac{\partial}{\partial t} + (ax^2 + by^2)\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_1^* &= X_1 - X_0 &= x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2^* &= X_2 - X_0 &= \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Используем уравнения (7.6), (7.7) из утверждения теоремы 7.1. Уравнения (7.7) для коэффициентов (7.26) выполняются тождественно, т.е. условий на функции $\theta(t,x,y),\ \mu(t,x,y)$, определяющие операторы (7.27), не накладывают. Одно из уравнений $[X_2^*, Y]=0$ системы (7.6) имеет вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}=0,$$

что эквивалентно системе

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\mu}{\partial x}=0$$

и результату для коэффициентов оператора (7.27): $\theta(t,y),\ \mu(t,y)$. С учетом этого результата другое уравнение $[X_1^*,\,Y]=0$ системы (7.6) принимает вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}-\theta\frac{\partial}{\partial x}=0,$$

что эквивалентно системе

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\theta,\qquad \frac{\partial\mu}{\partial y}=0$$

и результату для коэффициентов оператора (7.27): $\theta=\nu(t)e^y,\ \mu(t)$. С учетом этого результата оставшееся уравнение $[X_0^*,\,Y]=0$ системы (7.6) принимает вид

$$\dot\mu(t)\frac{\partial}{\partial x}+\dot\nu(t)e^y\frac{\partial}{\partial y}-2\{ax\nu(t)e^y+by\mu(t)\}\frac{\partial}{\partial x}=0$$

(точка — производная по t), что эквивалентно системе

$$\dot\mu(t)-2\{ax\nu(t)e^y+by\mu(t)\}=0,\qquad \dot\nu(t)e^y=0,$$

которая после “расщепления”по переменным $t,\ x,\ y$ и очевидных сокращений приводит к требованию одновременного выполнения равенств

$$\dot\mu(t)=0,\qquad a\nu(t)=0,\qquad b\mu(t)=0,\qquad \dot\nu(t)=0,\tag{7.29}$$

В зависимости от значений параметров $a,\ b$ в (7.23) приведем решения этих уравнений. Приведем также группы симметрий по состоянию и системы (7.17), (7.18), к которым в силу утверждения теоремы 7.4 сводится соответствующей заменой переменных система (7.23).

1. $a\neq 0,\ b\neq 0$. Из (7.29) следует $\nu=0,\ \mu=0$, а с учетом $\theta=\nu e^y$ — в (7.27): $\theta=0,\ \mu=0$, т.е. алгебра симметрий состоит из единственного элемента $Y=0$, а группа симметрий (7.16) из единственного преобразования $\hat x=x,\ \hat y=y$.

2. $a = 0,\ b \neq 0$. Из (7.29) следует $\nu = C_1 = \text{const}$, $\mu = 0$, а с учетом $\theta = \nu e^y$ — в (7.27): $\theta = C_1 e^y,\ \mu = 0$, т.е. алгебра симметрий A_0 одномерна с базисным оператором
$$Y_1 = e^y \frac{\partial}{\partial x}. \tag{7.30}$$
По оператору вычисляется однопараметрическая группа симметрий (7.16)
$$\hat{x} = x + \tau_1 e^y, \qquad \hat{y} = y. \tag{7.31}$$
Замена переменных $x,\ y \leftrightarrow z = xe^y,\ y$ приводит систему к гарантированному теоремой 7.4 иерархическому виду (7.17), (7.18)
$$\begin{aligned} \dot{y} &= u, \\ \dot{z} &= (v + by^2)e^{-y} \end{aligned}$$
(в (7.18): $\varphi(z) = 1$). Замена $x,\ y \leftrightarrow z = xe^y,\ y$ вычисляется при переводе оператора (7.30) к выпрямленному виду $Z = \partial/\partial z$.

3. $a \neq 0,\ b = 0$. Из (7.29) следует $\nu = 0,\ \mu = C_2$, а в (7.27):
$$\theta = \nu e^y = 0, \qquad \mu = C_2,$$
т.е. алгебра симметрий A_0 одномерна с базисным оператором
$$Y_2 = \frac{\partial}{\partial y}. \tag{7.32}$$
По оператору вычисляется однопараметрическая группа симметрий (7.16)
$$\hat{x} = x, \qquad \hat{y} = y + \tau_2. \tag{7.33}$$
Система (7.23) при $b = 0$ без преобразования переменных имеет вид (7.17), (7.18): первое уравнение в (7.23) — уравнение (7.17), второе — (7.18) с $\varphi = 1$.

4. $a = 0,\ b = 0$. Объединяются случаи 2 и 3. Система (7.23) допускает двухмерную алгебру симметрий с базисом (7.30), (7.32). Алгебре соответствует двухпараметрическая группа симметрий (7.16)
$$\hat{x} = x + \tau_1 e^y, \qquad \hat{y} = y + \tau_2. \tag{7.34}$$
— суперпозиция двух групп (7.31) и (7.33). Переобозначением переменных $z_1 = x$, $z_2 = y$ системе (7.23) придается вид (7.17), (7.18) (уравнения (7.17) отсутствуют)
$$\begin{pmatrix} \dot{z}^1 \\ \dot{z}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Как и утверждает теорема 7.4, структурные постоянные алгебры A_0 с базисом $Y_1,\ Y_2$, группы симметрий (7.34) и постоянные в (7.20) совпадают: $C^2_{21} = -C^2_{12} = 1$.

Пример 7.2. Для того, чтобы убедиться в том, что уравнение Риккати (4.25) из примера 4.2 допускает только тривиальную симметрию $\hat{x} = x$, достаточно для оператора симметрий $Y = \theta(x)\partial/\partial x$ записать одно из условий (7.7) (см. (4.27)):

$$\{Yf^1 = 2\theta(u^2 + u^3 x) \equiv 0\} \Rightarrow \{\theta = 0\} \Rightarrow \{Y = 0\}.$$

8. Симметрии групповых системы

Групповые системы (см. определение 6.1), несмотря на ярко выраженную групповую структуру, могут допускать группу симметрий по состоянию (см. определение 7.1), состоящую только из тождественного преобразования. Этот факт подтверждается примером 7.2. Иначе обстоит дело с L–системами (см. определение 6.2). Теорему 7.4 для случая, когда количество параметров в группе симметрий по состоянию совпадает с размерностью пространства состояний ($q = n$) можно сформулировать следующим образом.

Теорема 8.1 [11, 13]. Регулярная n-мерная система с управлением (4.1) допускает n-параметрическую группу симметрий по состоянию (7.16) в том и только в том случае, если (4.1) является L–системой — групповой системой (6.1) при $r = n$. Выбором базисных операторов Y_l в алгебре симметрии A_0 или операторов X_l, определяющих L–систему (см. (6.1), (6.5)), можно добиться совпадения структурных постоянных C^k_{ij} у группы симметрий (7.16) и у группы сдвигов вдоль решений (6.6).

Произвольной групповой системе (6.1) можно поставить в соответствие (неоднозначно) L-систему, а значит и группу симметрий.

Теорема 8.2. [13] Пусть для групповой системы (6.1) выполняется

$$n > r.$$

Тогда пространство состояний $\mathbb{R}^n(x)$ расслаивается на инвариантные поверхности системы (6.1)

$$w^1(x) = c^1,\ \ldots,\ w^{n-r}(x) = c^{n-r}. \tag{8.1}$$

Существует несобенная замена переменных

$$x^1,\ \ldots,\ x^n \leftrightarrow z^1,\ \ldots,\ z^r,\ w^1,\ \ldots,\ w^{n-r},$$

которая ставит в соответствие групповой системе (6.1) L-систему

$$\dot{z}^k = \sum_{l=1}^{r} \bar{\varphi}_l^k(z)u^l, \qquad k = \overline{1,r}, \tag{8.2}$$

определяющую поведение групповой системы (6.1) на каждой инвариантной поверхности (8.1).

◯ Интегральный базис $w^1(x)$, …, $w^{n-r}(x)$ полной системы

$$X_l w = 0, \qquad l = \overline{1,r},$$

образованной операторами (6.5), определяет инварианты группы (6.6), инвариантные поверхности (8.1) и замену переменных

$$x^1, \ldots, x^n \leftrightarrow z^1, \ldots, z^r, w^1, \ldots, w^{n-r},$$

приводящую к системе

$$\begin{aligned} \dot{z}^k &= \sum_{l=1}^{r} \bar{\varphi}_l^k(z)u^l, & k &= \overline{1,r}, \\ \dot{w}^i &= 0, & i &= \overline{1,n-r}, \end{aligned}$$

эквивалентной (8.2). Переменные w^i, возможно входящие в правые части уравнений для z^k, на каждой инвариантной поверхности (8.1) заменяются постоянными числами. ⊗

Теорема 8.3 [13]. Пусть для групповой системы (6.1) выполняется

$$n < r.$$

Тогда добавлением к (6.1) уравнений

$$\dot{x}^{n+i} = \sum_{l=1}^{r} \varphi_l^{n+i}(x)u^l, \qquad i = \overline{1,r-n}, \tag{8.3}$$

можно добиться того, что расширенная система (6.1), (8.3) — L-система с теми же структурными постоянными C_{ij}^k, что и в (6.4).

◯ По структурным постоянным C_{ij}^k из условия (6.4) строится r-мерная L-система (6.14). По правым частям систем (6.1) и (6.14) с учетом (6.16) составляется вполне интегрируемая система (6.15) и находится какое-нибудь ее решение $x(v)$ (выполнение $x(0) = x_0$ не обязательно). Вследствие (6.2) и $n < r$ система (6.15) гарантирует справедливость равенства

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial x^i}{\partial v^k} \right\| = n,$$

т.е. функции $x^1(v), \ldots, x^n(v)$ — функционально независимы, и добавлением функций $x^{n+1}(v), \ldots, x^r(v)$ замену переменных $x^1(v), \ldots, x^r(v)$ можно сделать неособенной. Эта замена переведет L-систему (6.14) в некоторую L-систему, у которой с учетом (6.14) — (6.16) для первых n уравнений выполняется

$$\dot{x}^i(v) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x^i}{\partial v^k} \dot{v}^k = \sum_{j,k,l=1}^{r} \varphi_l^i(x) \tilde{\psi}_k^l(v) \tilde{\varphi}_k^l(v) u^j(t) =$$

$$= \sum_{j,l=1}^{r} \varphi_l^i(x) \delta_j^l u^j(t) = \sum_{l=1}^{r} \varphi_l^i(x) u^l(t), \qquad i = \overline{1,n}. \quad \bigotimes$$

Пример 8.1. Уравнению Риккати (см. примеры 4.2 и 7.2)

$$\dot{x} = u^1 + 2u^2 x + u^3 (x)^2 \tag{8.4}$$

соответствуют операторы (6.5)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = (x)^2 \frac{\partial}{\partial x}. \tag{8.5}$$

Так как для них выполняются условия (6.2) – (6.4) с постоянными (приводятся только ненулевые постоянные C_{ij}^k при $i < j$)

$$C_{12}^1 = 2, \qquad C_{13}^2 = 1, \qquad C_{23}^3 = 2, \tag{8.6}$$

то уравнение (8.4) — по определению 6.1 — групповая система и по теореме 8.3 добавлением двух уравнений может стать L-системой. Воспользуемся отличным от приведенного в доказательстве теоремы 8.3 способом. Дважды продолжим операторы (8.5) [1] ($x^1 = x,\ x^2 = \dot{x},\ x^3 = \ddot{x}$):

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1}, \\ \tilde{X}_2 &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \\ \tilde{X}_3 &= (x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + 2x^1 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + 2\{(x^2)^2 + x^1 x^3\} \frac{\partial}{\partial x^3}, \end{aligned} \tag{8.7}$$

получим при $x^2 \neq 0$ ($\det \|\varphi_l^i(x)\| = 2(x^2)^3$) L-систему, матрица которой $\|\varphi_l^i(x)\|$ совпадает с матрицей коэффициентов операторов $\tilde{X}_1,\ \tilde{X}_2,\ \tilde{X}_3$ (при продолжении операторы сохраняют свойство (6.4) с теми же постоянными C_{ij}^k). С целью дальнейшего упрощения — неособенной заменой переменных (в области $x^2 > 0$)

$$x = x^1, \quad y = \ln x^2, \quad z = x^3/(2x^2)$$

придаем операторам (8.7) вид

$$\begin{aligned} X_1^* &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_2^* &= 2x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_3^* &= (x)^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y} + e^y\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{8.8}$$

приходим к окончательному результату погружения уравнения Риккати в L-систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x & (x)^2 \\ 0 & 2 & 2x \\ 0 & 0 & e^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}, \tag{8.9}$$

у которой первое уравнение совпадает с уравнением Риккати (8.4), а структурные постоянные — с (8.6). Отметим, что уравнение Ньютона

$$m\ddot{s} = u(t) - \beta(\dot{s})^2,$$

определяющее одномерное движение управляемой точки при наличии сопротивления пропорционального квадрату скорости, погружается в систему (8.9) при следующей специализации переменных:

$$x = m\dot{s}, \quad y = -2s\beta/m, \quad u^1 = u(t), \quad u^2 = 0, \quad u^3 = -\beta/(m)^2.$$

L-система (8.9) допускает 3-параметрическую группу симметрий, коэффициенты операторов которой вычисляются как решение системы $[X_i^*, Y] = 0$ (см. (7.6)). Опустив вычисления, приведем базисные операторы алгебры A_0

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ Y_2 &= 2\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ Y_3 &= e^y\frac{\partial}{\partial x} + 2z\frac{\partial}{\partial y} + (z)^2\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Проверкой нетрудно убедиться в том, что операторы (8.10), во-первых, — базис алгебры Ли с структурными постоянными (8.6), во-вторых, выполнено условие (7.6) симметрии: $[X_i^*, Y_k] = 0$, i, $k = 1, 2, 3$. По операторам

(8.10) восстанавливается 3-параметрическая группа симметрий по состоянию (7.1) системы (8.9)

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= \frac{x+\tau_1(e^y - xz)}{1-\tau_1 z},\\
\hat{y} &= y+\tau_2\ln(1-\tau_1 z),\\
\hat{z} &= \frac{z(e^{\tau_3}-\tau_1\tau_2)+\tau_3}{1-\tau_1 z}
\end{aligned}
\qquad (8.11)
$$

— вычислены однопараметрические группы отдельно для каждого оператора Y_k из (8.10) и организована их суперпозиция.

Таким образом, уравнение Риккати (8.4), как следует из вычислений, приведенных в примере 7.2, допускает только тривиальную группу $\hat{x}=x$, но после добавления двух уравнений L-система (8.9) допускает 3-параметрическую группу (8.11).

Отметим одно из приложений группы симметрий (8.11). Для построения при известных функциях $u^1(t)$, $u^2(t)$, $u^3(t)$ общего решения уравнения (8.4) или системы (8.9) достаточно численно найти одно частное решение, а группа симметрий (8.11) "растиражирует"его в общее решение с произвольными постоянными τ_1, τ_2, τ_3.

9. Недоопределенные системы дифференциальных уравнений

В п. 3 рассматривалась система дифференциальных уравнений (3.1), состоящая из n уравнений, с n неизвестными функциями. Показывалось, что, если система алгебраически разрешима относительно старших производных, то система эквивалентно представляется уравнениями в нормальном виде. В настоящем пункте обсуждается случай, когда в системе (3.1) уравнений меньше, чем искомых функций. Такая ситуация приводит к понятию недоопределенной системы [15, 16]. Показывается , что недоопределенная система эквивалентно представляется системой с управлением (4.1). Ограничимся случаем одного уравнения

$$F(t,\, x^1,\, \dot{x}^1,\, \ddot{x}^1,\, \ldots,\, (x^1)^{(m_1)},\, \ldots,\, x^n,\, \dot{x}^n,\, \ddot{x}^n,\, \ldots,\, (x^n)^{(m_n)}) = 0. \qquad (9.1)$$

Большее количество уравнений влечет не принципиальные, а чисто технические трудности, связанные с громоздкостью обозначений. Предполагаем, что уравнение (9.1) разрешимо относительно одной из старших производных, например, $(x^n)^{(m_n)}$:

$$(x^n)^{(m_n)} = \varphi(t,\, x^1,\, \dot{x}^1,\, \ddot{x}^1,\, \ldots,\, (x^1)^{(m_1)},\, \ldots,$$
$$x^{n-1},\, \dot{x}^{n-1},\, \ddot{x}^{n-1},\, \ldots,\, (x^{n-1})^{(m_{n-1})},\, x^n,\, \dot{x}^n,\, \ddot{x}^n,\, \ldots,\, (x^n)^{(m_n-1)}). \tag{9.2}$$

Сделаем переход к новым переменным

$$\begin{gathered}
y^1 = x^1,\, y^2 = \dot{x}^1,\, \ldots,\, y^{m_1} = (x^1)^{(m_1-1)},\\
u^1 = (x^1)^{(m_1)},\, \ldots,\\
y^{M_1+1} = x^{n-1},\, y^{M_1+2} = \dot{x}^{n-1},\, \ldots,\, y^{M_1+m_{n-1}} = (x^{n-1})^{(m_{n-1}-1)},\\
u^{n-1} = (x^{n-1})^{(m_{n-1})},\\
y^{M_2+1} = (x^n),\, \ldots,\, y^{M_2+m_n} = (x^n)^{(m_n-1)},\\
M_1 = \sum_{i=1}^{n-2} m_i, \qquad M_2 = \sum_{i=1}^{n-1} m_i
\end{gathered} \tag{9.3}$$

— замена переменных аналогична (3.3), но старшие производные, кроме $(x^n)^{(m_n)}$, в отличие от (3.3) объявляются управлениями $u^1,\, \ldots,\, u^{n-1}$. В новых переменных (9.3) уравнение (9.2) приобретает вид системы с управлением (4.1):

$$\begin{array}{lcl}
\dot{y}^1 & = & y^2,\\
 & \vdots & \\
\dot{y}^{m_1-1} & = & y^{m_1},\\
\dot{y}^{m_1} & = & u^1,\\
 & \vdots & \\
\dot{y}^{M_1+1} & = & y^{M_1+2},\\
 & \vdots & \\
\dot{y}^{M_1+m_{n-1}-1} & = & y^{M_1+m_{n-1}},\\
\dot{y}^{M_1+m_{n-1}} & = & u^{n-1},\\
\dot{y}^{M_2+1} & = & y^{M_2+2},\\
 & \vdots & \\
\dot{y}^{M_2+m_n-1} & = & y^{M_2+m_n},\\
\dot{y}^{M_2+m_n} & = & \varphi(t,\, y,\, u).
\end{array} \tag{9.4}$$

Система (9.4) может быть подвергнута всем исследованиям, которые обсуждались в пунктах 4 — 8: является ли она регулярной, групповой, L – системой; каков характер преобразований сдвигов вдоль ее решений и преобразований симметрий по состоянию; — а также изучению других свойств управляемых систем, которые выходят за рамки настоящей работы.

Литература

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[2] Яковенко Г.Н. *Групповые свойства динамических систем. Конечномерный случай /* М.: Изд. МФТИ, 1994. 140 с.

[3] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — М.: Мир, 1970. 720 с.

[4] Ибрагимов Н.Х. *Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Знание, 1991. 48 с. (Новое в науке и технике. Сер. “Математика и кибернетика”; № 7).

[5] Ибрагимов Н.Х. *Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике//* УМН РАН. 1992. Т. 47, вып. 4 (286). С. 83-144.

[6] Яковенко Г.Н. *Полнота и алгебраическая полнота систем операторов//*Некоторые проблемы математики и их приложения к задачам физики и механики: Межвед. сб. науч. тр./МФТИ. М., 1995. С. 213-220.

[7] Яковенко Г.Н. *Групповой подход к управляемости и инвариантности динамических систем*//Кибернет. и вычисл. техн./Киев, 1978. Вып. 39. С. 26-39.

[8] Данилов Н.Ю., Павловский Ю.Н., Соколов В.И., Яковенко Г.Н. *Геометрические и алгебраические методы в теории управления.* — М.: МФТИ, 1999. — 156 с.

[9] Яковенко Г.Н. *Управление на группах Ли: первые интегралы, особые управления*//Кибернет. и вычисл. техн./Киев, 1984. Вып. 62. С. 10-20.

[10] Lie S. *Vorlesungen uber continuerliche Gruppen.* Leipzig: Teubner, 1893. 805 с.

[11] Яковенко Г.Н. *Принцип суперпозиций для нелинейных систем: Софус Ли и другие.* М.: Изд. МФТИ, 1997. 96 с.

[12] Кириллов А.А. *Элементы теории представлений.* М.: Наука, 1972. 336 с.

[13] Яковенко Г.Н. *Симметрии по состоянию в системах с управлением*//Прикладная механика и математика: Межвед. сб. науч. тр./ МФТИ. М., 1992. С. 155-176.

[14] Павловский Ю.Н., Яковенко Г.Н. *Группы, допускаемые динамическими системами*//Методы оптимизации и их приложения/Новосибирск: Наука, 1982. С. 155-189.

[15] Anderson I.M., Kamran M., Olver P.J. *Internal, External and Generalized Symmetries.* — Preprint, 9/4/90, 51 pp.

[16] Линчук Л.В. *Формальные операторы, допускаемые обобщенными дифференциальными уравнениями, и принцип факторизации* // Электронный журнал “Дифференциальные уравнения и процессы управления”— N 1, 2001. — С. 71–115. (http://www.neva.ru/journal).