ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2002
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Моделирование динамических систем

О ГЛОБАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Д.А. Мизин

Санкт-Петербургский Государственный
Политехнический Университет
e-mail: math@math.hop.stu.neva.ru

Аннотация.

Одной из важных задач теории динамических систем является разработка конструктивных методов для исследования глобальной структуры траекторий системы. В.А.Плисс в монографии "Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений"(1977) ввел понятие "множества, порождающее периодические решения". По-видимому, это множество совпадает с множеством цепно-рекуррентных траекторий, которое определено C.Conley (Isolated Invariant set and Morse Index, Reg. Conf. Series in Math. Amer. Math. Soc., v. 38, 1978). Классические работы 60-80 годов [3, 4, 5, 8, 9, 10, 11] показали, что глобальная динамика системы существенно определяется связями между компонентами цепно-рекуррентного множества. В настоящей статье мы даем теоретическое обоснование компьютерно-ориентированного метода вычисления структурной матрицы динамической системы. Структурная матрица описывает ориентированный граф, у которого вершины $\{i\}$ соответствуют компонентам

цепно-рекуррентного множества. Каждое ребро $i \to j$ соответствует траекториям, которые имеют α-предельное множество в Q_i и ω-предельное множество в Q_j, т.е. ребра $\{i \to j\}$ соответствуют связям $\{Q_i \to Q_j\}$. По структурной матрице можно судить не только о количестве компонент и связях между ними, но и о структуре аттракторов и их областей притяжения. Основное предположение - конечное число компонент цепно-рекуррентного множества. Предложенный метод не требует никакой предварительной информации, все необходимые вычисления проводятся стандартными численными методами.

Определения.

Пусть M - компактное метрическое пространство с метрикой ρ. Рассмотрим дискретную динамическую систему, порожденную гомеоморфизмом $f : M \to M$.

Определение 1 *Бесконечная в обе стороны последовательность точек $\{x_i, -\infty < i < +\infty\}$ называется ε-траекторией, если расстояние между образом $f(x_i)$ и x_{i+1} меньше чем ε:*

$$\rho(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$$

для любого i. Если при этом последовательность $\{x_i\}$ является периодической, то она называется ε-периодической траекторией, а точки x_i называются ε-периодическими.

Определение 2 *Точка x называется цепно-рекуррентной, если x есть ε-периодическая для любого положительного ε, то есть, существует периодическая ε-траектория, проходящая через x. Цепно-рекуррентным множеством, Q, называется множество всех цепно-рекуррентных точек.*

Известно, что цепно-рекуррентное множество инвариантное, замкнутое и содержит возвращающиеся траектории всех типов, таких как периодические, гомоклинические и другие.

Определение 3 *Подмножество $\Omega \subset Q$ называется компонентой цепно-рекуррентного множества, если любые две точки из Ω могут быть соединены периодической ε-траекторией для любого $\varepsilon > 0$.*

Из определения 3 следует, что цепно-рекуррентное множество Q может быть представлено в виде объединения непересекающихся инвариантных замкнутых компонент Q_i:

$$Q = \bigcup_i Q_i$$

Пусть $T(x) = \{f^n(x),\ n \in \mathbf{Z}\}$ будет траектория, проходящая через точку x, $T^+(x) = \{f^n(x),\ n \in \mathbf{Z}^+\}$ положительная полутраектория, и $T^-(x) = \{f^n(x),\ n \in \mathbf{Z}^-\}$ отрицательная полутраектория, где $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^+$ и $\mathbf{Z}^-$ есть множества целых чисел, положительных целых чисел и отрицательных целых чисел соответсвенно. Будем говорить, что точка y принадлежит ω-предельному множеству точки x, $\omega(x)$, если существует последовательность целых $n_k \to \infty$ таких, что $f^{n_k}(x) \to y$, то есть,

$$\omega(x) = \bigcap_{n>0} cl f^n(T^+(x)),$$

где clA означает замыкание множества A. Аналогично, α-предельное множество точки x, $\alpha(x)$, есть множество предельных точек отрицательной полутраектории

$$\alpha(x) = \bigcap_{n<0} cl f^n(T^-(x)).$$

Определение 4 *Пусть $\{Q_1, Q_2, Q_3, ..\}$ – компоненты цепно-рекуррентного множества динамической системы. Будем говорить, что между компонентами Q_i и Q_j есть связь $Q_i \to Q_j$, если существует точка x такая, что $\alpha(x) \subset Q_i$, $\omega(x) \subset Q_j$.*

Рассмотрим граф Γ с множеством вершин $\{i\}$, соответствующих компонентам Q_i, и с множеством ребер $i \to j$ в том и только в том случае, если существует связь $Q_i \to Q_j$.

Определение 5 *Так построенный граф Γ будем называть структурным графом динамической системы, а соответствующую матрицу переходов $A = (a_{ij})$ – структурной матрицей динамической системы f, $a_{ij} = 1$, если существует ребро $i \to j$, иначе $a_{ij} = 0$.*

По определению, структурный граф и его матрица переходов являются топологическим инвариантом динамической системы. Размер структурной матрицы есть $q \times q$, где q – число компонент цепно-рекуррентного множества. Основной результат этой статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 1 *Если динамическая система имеет конечное число компонент цепно-рекуррентного множества, то существует конечный алгоритм для построения структурной матрицы.*

Символический образ.

Приведем конструкцию символического образа [7]. Пусть

$$C = \{M(1), .., M(n)\}$$

- конечное покрытие компакта M замкнутыми множествами. Множества $M(i)$ назовем ячейками покрытия.

Определение 6 *Пусть G есть ориентированный граф, имеющий n вершин, при этом номер вершины i соответствует ячейке $M(i)$. Вершины i и j связаны ориентированным ребром $i \to j$ если, и только если, $M(j) \cap f(M(i)) \neq \emptyset$. Так построенный граф G называется символическим образом отображения f относительно покрытия C.*

Обозначим через $Ver(G)$ множество вершин графа G. Ориентированный граф G можно рассматривать как многозначное соответствие $G : Ver \to Ver$ между

вершинами. Такой граф G однозначно определяется матрицей переходов $\Pi = (\pi_{ij})$, которая имеет размеры $n \times n$. Элемент $\pi_{ij} = 1$, если существует ориентированное ребро $i \to j$, в противном случае $\pi_{ij} = 0$. Много полезной информации о свойствах динамической системы можно получить, исследуя ее символический образ. Ясно, что символический образ зависит от покрытия C. Варьируя покрытие C, мы можем менять символический образ. Естественно рассматривать символический образ как конечную аппроксимацию отображения f. Эта аппроксимация будет более точной при более мелком покрытии.

Определение 7 *Последовательность $\omega = \{z_k\}$ вершин графа G называется допустимым путем (или просто - путем), если для любого k граф G содержит ребро $z_k \to z_{k+1}$. Путь называется периодическим, если последовательность $\{z_k\}$ является периодической.*

Пусть $d = diam(C) := \sup_{M(i) \in C}(diam M(i))$, а q есть наибольший диаметр образов $f(M(i))$, i=1,..,n. Определим следующим образом число r.

Пусть ячейка $M(k)$ не пересекается с образом $f(M(i))$. Положим

$$r_{ik} := \rho(f(M(i)), M(k)) = \min(\rho(x, y) : x \in f(M(i)), y \in M(k)).$$

Определение 8 *Нижней границей символического образа G называется минимальное значение среди всех r_{ik} и обозначается r.*

Заметим, что так как множество $\{(i, k)\}$ состоит из конечного числа элементов, то $r > 0$. Существует естественная связь между допустимыми путями на символическом образе G и $\varepsilon-$траекториями отображения f (теорема об отслеживании):

Теорема 2 *[7]*

1. *Если последовательность $\{z_k\}$ есть путь на символическом образе G и $x_k \in M(z_k)$, то последовательность $\{x_k\}$ есть ε-траектория гомеоморфизма f для любого $\varepsilon > q + d$. В частности, если последовательность $\{z_k\}$ есть периодический путь на G, то последовательность $\{x_k\}$ есть ε-периодическая траектория.*

2. *Если последовательность $\{z_k\}$ есть путь на символическом образе G, то существует последовательность $\{x_k\}$, $x_k \in M(z_k)$, которая есть ε-траектория гомеоморфизма f для каждого $\varepsilon > d$.*

3. *Если последовательность $\{x_k\}$ есть ε-траектория гомеоморфизма f, $\varepsilon < r$ и $x_k \in M(z_k)$, то последовательность $\{z_k\}$ есть допустимый путь на символическом образе G. В частности, если последовательность $\{x_k\}$ есть ε-периодическая траектория, то последовательность $\{z_k\}$ есть периодический путь на G.*

Определение 9 *Вершина символического образа называется возвратной, если существует периодический путь, проходящий через нее. Две возвратные вершины i и j называются эквивалентными, если существует периодический допустимый путь, проходящий через вершины i и j.*

Обозначим через $P(d)$ объединение ячеек $M(i)$ для которых вершины i являются возвратными:

$$P(d) = \{\bigcup M(i) : i\text{-возвратные}\}.$$

Заметим, что множество $P(d)$ вообще говоря зависит от покрытия C. Однако, в последующем для нас будет важна зависимость P только от наибольшего диаметра d.

Теорема 3 *[7]*

1. *Множество $P(d)$ является замкнутой окрестностью цепно-рекуррентного множества.*

2. *Цепно-рекуррентное множество Q совпадает с пересечением множеств $P(d)$ для всех положительных d:*
$$Q = \bigcap_{d>0} P(d).$$

Возвратные вершины однозначно определяются ненулевыми диагональными элементами матрицы переходов Π^m, $m \leq n$, где n есть число ячеек покрытия. Согласно определению 9, множество возвратных вершин разбивается на несколько классов эквивалентности $\{H_k\}$ эквивалентных возвратных вершин. Ясно, что каждый периодический путь ω находится в некотором классе, который однозначно определяется по ω.

Введем отношение квазипорядка между вершинами на символическом образе. Будем писать $i \prec j$ тогда и только тогда, когда существует допустимый путь вида
$$i = i_0, i_1, i_2, ..., i_m = j.$$
Следовательно, вершина i будет возвратной тогда и только тогда, когда $i \prec i$, и пара возвратных вершин i, j будет эквивалентной тогда и только тогда, когда $i \prec j \prec i$.

Утверждение 1 *[1] Вершины символического образа G могут быть перенумерованы таким образом, что*

- *эквивалентные вершины окажутся занумерованными подряд идущими целыми числами;*
- *новые номера вершин i, j выбраны таким образом, что $i < j$, если $i \prec j \not\prec i$.*

Другими словами, матрица переходов имеет при такой нумерации следующий вид
$$\Pi = \begin{pmatrix} (\Pi_1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & & \\ 0 & & (\Pi_k) & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & (\Pi_s) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где каждый диагональный блок Π_k либо отвечает одному из классов эквивалентности возвратных вершин H_k, либо соответствует некоторой невозвратной вершине и состоит из одного нуля. Следует отметить, что перенумерация, описанная в утверждении 1, определена не единственным образом.

По символическому образу G построим новый граф G^*, отождествляя эквивалентные вершины на G в одну. А именно, каждому классу эквивалентности H_k сопоставим на графе G^* вершину k, а ребро $k \to l$ будет означать, что существует допустимый путь из класса H_k в класс H_l, не проходящий через другие классы.

Определение 10 *Построенный выше граф G^* будем называть структурным графом символического образа G.*

Очевидно, матрица переходов для G^* имеет вид

$$\Pi^* = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где размер матрицы определяется числом классов эквивалентности возвратных вершин.

Вычисление структурной матрицы.

Последовательность символических образов. Пусть $C = \{M(i)\}$ есть замкнутое покрытие фазового пространства M, G - символический образ относительно покрытия C. Образуем новое покрытие NC посредством разбиения покрытия C, то есть каждая ячейка $M(i)$ подвергается разбиению снова. Пусть NG есть символический образ относительно покрытия NC. Обозначим через $m(i,k)$ ячейки покрытия NC, где $\cup_k m(i,k) = M(i)$ и запишем вершины нового символического образа в виде (i,k). Возникает естественное отображение $S : NG \to G$, которое все вершины (i,k) переводит в вершину i, то есть $S(i,k) = i$. Так как из $f(m(i,k)) \cap m(j,l) \neq \emptyset$ следует $f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset$, то отображение S ориентированную дугу $(i,k) \to (j,l)$ переводит на ориентированную дугу $i \to j$. Следовательно, отображение S

переводит ориентированный граф NG на ориентированный граф G, периодические пути в периодические пути и классы эквивалентности в классы эквивалентности. В частности, $S(NH_k) \subset H_k$, где $\{NH_k\}$ есть совокупность классов эквивалентных возвратных вершин на символическом образе NG. Таким образом, S можно рассматривать как отображение, сопоставляющее каждому пути на графе NG определенный путь на графе G, а именно, если $\omega = \{(i_n, j_n)\}$ – путь на NG, то $\gamma = S(\omega) := \{i_n\}$ есть путь на G. Заметим, что обратного отображения $\tilde{S} : G \to NG$ вообще говоря нет.

Обозначим через $R_k = \{\cup M(i), i \in H_k\}$ – носитель класса H_k.

Утверждение 2 *1. Если Q_k есть компонента цепно-рекуррентного множества и $Q_k \cap R_k \neq \emptyset$, то $R_k \supset Q_k$;*

2. Для каждой компоненты Q_k цепно-рекуррентного множества существует R_k такое, что $R_k \supset Q_k$;

3. Пусть $S(NH_k) \subset H_k$. Тогда R_k содержит ε- периодическую траекторию для любого $\varepsilon > diam(NC)$.

Доказательство. 1. Пусть $Q_k \cap R_k \neq \emptyset$, но $R_k \not\supset Q_k$. Следовательно, существует точка $x \in Q_k$, которая не содержится в R_k. Пусть $x \in M(i)$. Тогда $i \notin H_k$. Возьмем любую точку $y \in Q_k \cap R_k$. Тогда существует $j \in H_k$, что $y \in M(j)$. Так как точки x и y находятся в одной компоненте цепно-рекуррентного множества, то для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-периодическая траектория $\{x, .., y, .., x\}$. В частности, такая траектория существует и для $\varepsilon = r/2$, где r – нижняя грань символического образа G. Следовательно, по теореме об отслеживании, на символическом образе G существует периодический путь $\{i, .., j, ..i\}$, то есть вершины i и j находятся в одном классе эквивалентности, что противоречит условию $i \notin H_k$. Следовательно, $R_k \supset Q_k$.

2. Пусть Q_k – компонента цепно-рекуррентного множества. Возьмем любые две точки x, y из компоненты Q_k. Согласно определению 3, для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-периодическая траектория $\{x_k\}$ через них проходящая. Из теоремы об отслеживании следует, что на символическом образе существует периодический путь $\{z_k\}$, $M(z_k) \ni x_k$. Этот путь

однозначно определяет класс эквивалентности H_k, носитель R_k которого содержит построенную ε-траекторию. Таким образом, $Q_k \cap R_k \neq \emptyset$. Согласно первому пункту утверждения, $R_k \supset Q_k$.

3. Рассмотрим множество R_k и соответствующий ему класс эквивалентности H_k, где $S(NH_k) \subset H_k$. Так как покрытие NC является измельчением покрытия C, то $R_k \supset NR_k$, где NR_k есть носитель класса NH_k. Согласно теореме 2 об отслеживании, любому периодическому пути из NH_k можно сопоставить ε-периодическую траекторию в NR_k для любого $\varepsilon > diam(NC)$, что доказывает утверждение. ■

Построим последовательность замкнутых покрытий $C_1, C_2, ..$ пространства M так, что каждое следующее покрытие является измельчением предыдущего. Ячейки покрытия C_k будем обозначать через $M_k(i)$, $i = 1, .., |C_k|$, где $|\cdot|$ – мощность множества. Пусть G_k есть символический образ для покрытия C_k, P_k – множество всех допустимых путей на графе G_k. Согласно теореме об отслеживании, любому допустимому пути $\omega \in P_1$ соответствует ε-траектория на фазовом пространстве M, где $\varepsilon > diam(C_1) := d_1$. Выберем среди всех путей $\omega \in P_1$ те, для которых существует путь $\gamma \in P_2$ такой, что ω есть образ γ при отображении $S : P_2 \to P_1$, то есть $\omega = S(\gamma)$. Полученное множество обозначим через P_1^2. Тогда любой последовательности $\omega \in P_1^2$ соответствует ε_1-траектория на M, где $d_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Аналогично, если рассмотреть образ пространства P_3 на P_1, то получим новое пространство P_1^3, которое содержится в P_1^2: $P_1^3 \subset P_1^2 \subset P_1$, и любой последовательности $\omega \in P_1^3$ на M будет соответствовать ε_2-траектория, $d_3 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Понятно, что при дальнейших отображениях пространств P_k на P_1, мы будем оставлять те последовательности из P_1, которые будут соответствовать ε_k-траекториям для достаточно малых ε_k. Так как, $diam(C_k) \to 0_{k\to\infty}$, то $\varepsilon_k \to 0_{k\to\infty}$. Таким образом, логично ожидать, что при $k \to \infty$ на символическом образе G_1 останутся лишь те допустимые пути, которые соответствуют истинным траекториям системы на фазовом пространстве. То есть, мы найдем все *кодированные* траектории для покрытия C_1 и только их.

Для строгого доказательства определим несколько множеств. Обозначим $B_N(P_k)$ множество всех путей длины N, которые встречаются в допустимых путях множества P_k. Пусть последовательность $\omega = \{i_n\} \in P_1$ обладает свойством: для любого пути длины N из этой последовательности существует путь-прообраз длины N из $B_N(P_k)$, $k > 1$, которое отображается на первое. Совокупность таких последовательностей ω из P_1 обозначим через $P_1(k, N)$:

$$P_1(k,N) = \{\{i_n\} \in P_1 : \forall [i_m, .., i_{m+N-1}] \quad \exists [j_m, .., j_{m+N-1}] \in B_N(P_k),$$
$$[i_m, .., i_{m+N-1}] = S[j_m, .., j_{m+N-1}]\}.$$

В множество (f, C_1, N) будем включать те последовательности ω из P_1, у которых любой путь длины N соответствует орбите длины N некоторой точки фазового пространства:

$$(f, C_1, N) = \{\{i_n\} \in P_1 : \forall [i_m, .., i_{m+N-1}] \quad \exists x \in M,$$
$$f^{r-m}(x) \in M_1(i_r), m \le r \le m + N - 1\}.$$

Пусть $\Psi(f, C_1)$ есть множество всех кодированных траекторий для покрытия C_1:

$$\Psi(f, C_1) := \{\{i_n\} \in P_1 : \exists x \in M, f^n(x) \in M_1(i_n) \quad \forall n \in \mathbf{Z}\}.$$

Все три введенные в рассмотрение множества являются подмножествами P_1.

Теорема 4 . *Пусть $C_1, C_2, ..$ есть последовательность замкнутых покрытий пространства M таких, что каждое следующее покрытие является измельчением предыдущего и $diam(C_k) \to 0$ при $k \to +\infty$. Тогда*

1. *$\{P_1^k\}_k$ есть последовательность вложенных друг в друга множеств, то есть $P_1^k \supset P_1^{k+1}$ для любого $k > 1$.*

2. *Множество кодированных траекторий совпадает с пересечением множеств P_1^k для всех натуральных k:*

$$\Psi(f, C_1) = \bigcap_{k>1} P_1^k. \tag{3}$$

Доказательство.

1. Пусть $\omega \in P_1^{k+1}$. Это значит, что существует последовательность $\gamma \in P_{k+1}$ такая, что $\omega = S(\gamma)$. Рассмотрим последовательность $\alpha \in P_k$, которая является образом γ при отображении $S : P_{k+1} \to P_k$. Так как C_k представляют собой последовательные измельчения, то $S(\alpha) = \omega$, и потому $\omega \in P_1^k$. Следовательно, $P_1^k \supset P_1^{k+1}$.

2. Докажем, что $(f, C_1, N) = \bigcap_{k>1} P_1(k, N), N < +\infty$. Пусть $\omega = \{i_n\} \in \bigcap_{k>1} P_1(k, N)$. То есть, для любого пути длины N $[i_m, .., i_{m+N-1}]$ из последовательности ω и для любого k существует путь длины N $[j_m, ..., j_{m+N-1}] \in B_N(P_k)$ такой, что

$$[i_m, .., i_{m+N-1}] = S[j_m, .., j_{m+N-1}]. \tag{4}$$

Пусть $Q_k = \{\{x_n\}_{n=m}^{m+N-1} : x_n \in M_1(i_n), \rho(f(x_n), x_{n+1}) \le d_k := d_{C_k}\}$. Из соотношения (4) следует, что $Q_k \neq \emptyset$. Покрытие C_{k+1} есть измельчение покрытия C_k. Поэтому наибольший диаметр ячеек из C_{k+1} не превосходит наибольшего диаметра ячеек из C_k, то есть $d_{k+1} \le d_k$. Следовательно, для любого k верно $Q_{k+1} \subset Q_k$. Кроме того, Q_k есть компактное множество. Следовательно, $Q_\infty := \bigcap_{k>1} Q_k \neq \emptyset$. Так как $d_k \to 0$ при $k \to +\infty$, то $Q_\infty = \{\{x_n\}_{n=m}^{m+N-1} : x_n \in M_1(i_n), \rho(f(x_n), x_{n+1}) = 0\}$. Таким образом, мы произвольному пути длины N из последовательности $\omega \in P_1$ можем сопоставить орбиту длины N некоторой точки фазового пространства. То есть, $\omega \in (f, C_1, N)$ и, следовательно, $(f, C_1, N) \supset P_1(k, N)$.

Покажем, что $(f, C_1, N) \subset P_1(k, N)$ для любого $k > 1$, $N < +\infty$. Пусть $\{i_n\} \in (f, C_1, N)$. Следовательно, для любого пути $[i_m, .., i_{m+N-1}]$ существует $x \in M$ такой, что $x \in M_1(i_m), f(x) \in M_1(i_{m+1}), .., f^{N-1}(x) \in M_1(i_{m+N-1})$. Рассмотрим произвольное покрытие $C_k, k > 1$ и, соответствующий этому покрытию, символический образ G_k. Пусть $x \in M_k(j_m), f(x) \in M_k(j_{m+1}), .., f^{N-1}(x) \in M_k(j_{m+N-1})$. Из теоремы 2 следует, что на символическом образе G_k существует допустимый путь $\{j_n\}_{n=m}^{m+N-1}$. Так как C_k есть измельчение C_1, то $M_k(j_n) \subset M_1(i_n)$, $n = m, .., m+N-1$ и, следовательно, по определению отображения S, мы имеем $[i_m, .., i_{m+N-1}] = S[j_m, .., j_{m+N-1}]$. Таким образом, получаем $\{i_n\} \in P_1(k, N)$. Так как число k взято произвольно, то включение $\{i_n\} \in P_1(k, N)$ выполняется для любого $k > 1$, то есть, $(f, C_1, N) \subset P_1(k, N)$ $\forall k > 1$ и, следовательно, $(f, C_1, N) = \bigcap_{k>1} P_1(k, N), N < +\infty$.

Далее установим, что $\Psi(f, C_1) = \bigcap_N (f, C_1, N)$. Действительно, пусть $\omega = \{i_n\} \in \bigcap_N (f, C_1, N)$. Следовательно, для пути $[i_0, .., i_{N-1}]$ мы можем найти последовательность $\{x_n^N\}_{n=0}^{N-1}, x_n^N \in M_1(i_n), \rho(f(x_n^N), x_{n+1}^N) = 0$ (индекс N вверху показывает длину орбиты). Аналогично, для пути $[i_{-1}, .., i_N]$ существует последовательность $\{x_n^{N+2}\}_{n=-1}^{N}, x_n^{N+2} \in M_1(i_n), \rho(f(x_n^{N+2}), x_{n+1}^{N+2}) = 0$. Рассмотрим бесконечную последовательность $\{x_0^m\}_{m\in\mathbf{N}} \in M_1(i_0)$. Так как $M_1(i_0)$ есть компакт, то существует подпоследовательность $\{x_0^{m_k}\} \to_{k\to+\infty} x_0$. Далее, для последовательности $\{x_1^{m_k}\} \in M_1(i_1)$ находим сходящуюся подпоследовательность, предел которой обозначим через x_1. Из непрерывности f следует, что $\rho(f(x_0), x_1) = 0$. Продолжая этот процесс для множеств $M_1(i_{-1}), M_1(i_2), M_1(i_{-2}), ..$, получаем последовательность $x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, ...$ для которой $x_n \in M_1(i_n), \rho(f(x_n), x_{n+1}) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z}$. Таким образом, $\omega \in \Psi(f, C_1)$ и, следовательно, $\Psi(f, C_1) \supset \bigcap_N (f, C_1, N)$. Обратное включение очевидно. То есть $\Psi(f, C_1) = \bigcap_N (f, C_1, N)$.

Заметим, что $P_1^k = \bigcap_N P_1(k, N)$. Действительно, пусть $\omega \in P_1^k$. Это значит, что существует последовательность $\gamma \in P_k$ такая, что $\omega = S(\gamma)$. В частности, для любого $N \in \mathbf{N} \quad \omega \in P_1(k, N)$. То есть, $\omega \in \bigcap_N P_1(k, N)$. Обратно, пусть $\omega \in \bigcap_N P_1(k, N)$, и $\omega \notin P_1^k$. Следовательно, не существует последовательности $\gamma \in P_k$ такой, что $\omega = S(\gamma)$. То есть, найдется хотя бы один путь $[i_m, .., i_{m+N_0-1}]$ из ω для которого нет прообраза из $B_{N_0}(P_k)$. Значит, $\omega \notin P_1(k, N_0)$. Получили противоречие с предположением. Последнее означает, что $P_1^k = \bigcap_N P_1(k, N)$.

Таким образом, получаем цепочку равенств:

$$\Psi(f, C_1) = \bigcap_N (f, C_1, N) = \bigcap_N \bigcap_{k>1} P_1(k, N) = \bigcap_{k>1} \bigcap_N P_1(k, N) = \bigcap_{k>1} P_1^k. \tag{5}$$

Теорема доказана. ■

Из утверждения 2 следует, что на символическом образе среди всех классов эквивалентности должны быть те, носители которых содержат компоненты цепно-рекуррентного множества (такие классы будем называть *истинными*). Причем каждый носитель может содержать несколько таких компонент. Но среди классов эквивалентности могут быть и такие, у которых носители не содержат ни одной компоненты (такие классы будем называть *ложными*, а соответствующие им вершины на структурном графе G^* ложными вершинами). Кроме того, на структурном графе символического образа могут существовать и *ложные ребра*, то есть такие ребра $i \to j$ для которых на фазовом пространстве не существует точки x с ω-предельным множеством в $Q_j \subset H_j$ и с α-предельным множеством в $Q_i \subset H_i$. Покажем, что существует конечный алгоритм для построения нового графа G^{**}, вершины которого соответствуют только тем классам эквивалентности на символическом образе, носители которых обязательно содержат компоненту цепно-рекуррентного множества, а все ребра между вершинами являются *истинными* (то есть соответствуют связям между компонентами цепно-рекуррентного множества).

Истинный структурный граф. Пусть C – замкнутое покрытие компакта M, G – символический образ для этого покрытия, G^* – структурный граф символического образа. Множество $R(x) = \{\bigcup M(i_m) : f^m(x) \in M(i_m)\}$ будем называть носителем траектории $\{f^m(x)\}$. Определим новый граф G^{**} для которого выполняются следующие условия.

1. Множество вершин графа G^{**} есть подмножество множества вершин структурного графа G^*, и $k \in Ver(G^{**})$ означает, что класс эквивалентных возвратных вершин H_k истинный.

2. Пусть $k, l \in Ver(G^{**})$, R_k, R_l – носители. Ребро $k \to l$ есть на графе G^{**} тогда и только тогда, когда существует точка $x \in M$ такая, что а) $\omega(x) \subset Q_l$, $\alpha(x) \subset Q_k$, где $Q_l \subset R_l$, $Q_k \subset R_k$ – компоненты цепно-рекуррентного множества и б) носитель траектории точки x, $R(x)$, не пересекается с носителями других классов: $R(x) \cap R_i = \emptyset$ для $i \neq k, l$.

Определение 11 *Так построенный граф G^{**} будем называть истинным структурным графом для символического образа G.*

Построение графа G^{**}. Пусть C_1 – замкнутое покрытие M, C_2 – его измельчение, G_1, G_2 и G_1^*, G_2^* – соответствующие им символические образы и структурные графы. Построим новый граф G_{12}^* следующим образом . Пусть $k \in Ver(G_1^*)$. Будем включать вершину k в множество $Ver(G_{12}^*)$, если существует допустимый путь $\omega = \{i_n\} \in P_1^2$ на графе G_1, где $i_n \in H_k, n \in \mathbf{Z}$. Остальные вершины множества $Ver(G_1^*)$ мы не рассматриваем. Таким образом, каждая вершина k множества $Ver(G_{12}^*)$ соответствует классу эквивалентных возвратных вершин H_k на символическом образе G_1. Определим множество ребер графа G_{12}^*. Пусть $k, l \in Ver(G_{12}^*)$ и существует допустимый путь $\omega \in P_1^2$ на G_1 из класса H_k в класс H_l, не проходящий через другие выделенные классы, то есть ω не проходит через классы H_i для $i \in Ver(G_{12}^*) \setminus \{k, l\}$. Тогда считаем, что $k \to l$ – ребро на графе G_{12}^*. Из построения графа G_{12}^* следует, что $Ver(G_{12}^*) \subset Ver(G_1^*)$. Покажем, что число ребер графа G_{12}^* не превосходит числа ребер графа G_1^*. Пусть $k \to l$ – ребро на графе G_{12}^*. Тогда существует допустимый путь $\omega \in P_1^2$ на G_1 из класса H_k в класс H_l, не проходящий через другие выделенные классы H_i, $i \in Ver(G_{12}^*) \setminus \{k, l\}$. Этот путь либо а) проходит через оставшиеся (невыделенные) классы, либо б) не проходит через невыделенные классы. Тогда на структурном графе G_1^* этому пути либо а) соответствует путь конечной длины $k \to .. \to l$, либо б) соответствует ребро $k \to l$. Таким образом, каждому ребру графа G_{12}^* можно сопоставить хотя бы одно ребро на графе G_1^*. Заметим, что $E(G_{12}^*) \not\subset E(G_1^*)$ вообще говоря, где $E(G)$ обозначает множество ребер графа G.

Аналогично, рассматривая следующее разбиение C_3 и множество допустимых путей P_1^3 на графе G_1, построим граф G_{13}^*. Согласно теореме 4, $P_1^3 \subset P_1^2$. Следовательно, $Ver(G_{13}^*) \subset Ver(G_{12}^*)$ и $|E(G_{13}^*)| \leq |E(G_{12}^*)|$.

Рассмотрим последовательность измельчений $\{C_k\}$ и для каждого $k \in \mathbf{N}$ построим граф G_{1k}^*.

Утверждение 3 *Пусть $\{G_{1k}^*\}$ есть последовательность построенных выше графов. Тогда существует номер $n_1 \in \mathbf{N}$ такой, что для любого $k \geq n_1$ граф G_{1k}^* совпадает с истинным структурным графом символического образа G_1, то есть $G_{1k}^* = G_1^{**}, k \geq n_1$.*

Доказательство. Так как $Ver(G_1^*) \supset Ver(G_{12}^*) \supset Ver(G_{13}^*) \supset ...$, то существует n_0 такое, что графы G_{1k}^* имеют одинаковое множество вершин для $k \geq n_0$. Тогда, для $m > n \geq n_0$, $E(G_{1n_0}^*) \supset E(G_{1n_0+1}^*) \supset ...$ и, следовательно, существует номер $n_1 \geq n_0$ такой, что графы G_{1k}^* совпадают для всех $k \geq n_1$. Докажем, что $G_{1n_1}^* = G_1^{**}$.

1) Покажем, что $Ver(G_{1n_1}^*) = Ver(G_1^{**})$. Вершина k графа $G_{1n_1}^*$ соответствует некоторому классу эквивалентных возвратных вершин H_k на символическом образе G_1. Для этого класса для любого n существует допустимый периодический путь $\gamma_n = \{i_m\} \in P_1^n$, где $i_m \in H_k$ для всех целых m. Для каждого n путь γ_n соответствует периодической ε_n-траектории, содержащейся в носителе R_k. Так как число ячеек в носителе R_k конечное число, то существует ячейка $M(i_0) \subset R_k$, которая содержит бесконечное множество точек $x_0(\varepsilon_1), x_0(\varepsilon_2), ..$ периодических ε-траекторий. Так как $M(i_0)$ – компактное множество, то существует подпоследовательность, сходящаяся к точке $x_0 \in M(i_0)$. Не умоляя общности можно считать, что $\lim_{\varepsilon_n \to 0} x_0(\varepsilon_n) = x_0$. Рассмотрим следующую ячейку $M(i_1) \subset R_k$, содержащую бесконечное множество точек $x_1(\varepsilon_1), x_2(\varepsilon_2), ..$ рассмотренных последовательностей. Пусть $\lim_{\varepsilon_n \to 0} x_1(\varepsilon_n) = x_1$. Аналогично, определим точки $x_{-1} \in M(i_{-1})$, $x_2 \in M(i_2)$,.. . В результате получим бесконечную в обе стороны последовательность точек $.., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ..$, каждая из которых содержится в R_k. Покажем, что $\{x_m\}$ есть настоящая траектория динамической системы. Действительно,

$$\rho(f(x_m), x_{m+1}) = \rho(f(\lim_{\varepsilon_n \to 0} x_m(\varepsilon_n)),$$

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} x_{m+1}(\varepsilon_n)) = \lim_{\varepsilon_n \to 0} \rho(f(x_m(\varepsilon_n)), x_{m+1}(\varepsilon_n)) = 0.$$

Таким образом, среди всех периодических допустимых путей γ_n, мы выделили путь $\{..i_{-2}i_{-1}i_0i_1i_2..\}$, который соответствует настоящей траектории динамической системы. Причем из построения следует, что $\omega(x_0)$ и $\alpha(x_0)$ содержатся в носителе R_k. Так α- и $\omega-$предельные множества есть замкнутые и инвариантные, то существуют компоненты цепно-рекуррентного множества их содержащие. Согласно утверждению 2, носители классов и компоненты цепно-рекуррентного множества не пересекаются. Следовательно, множество R_k содержит по крайней мере одну компоненту цепно-рекуррентного множества. То есть, класс H_k – истинный и k – вершина на графе G_1^{**}.

Пусть $k \in Ver(G_1^{**})$. Это значит, что носитель класса H_k содержит компоненту цепно-рекуррентного множества Q_k. Тогда для любой точки $x \in Q_k$ существует ε-периодическая траектория через нее проходящая для любого $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 2, на каждом символическом образе G_n найдется периодический путь γ_n, соответствующий ε-траектории для достаточно малого ε. Так как все ε-периодические траектории содержатся внутри множества R_k, то для любого натурального n $S(\gamma_n) \subset H_k$. Следовательно, $k \in Ver(G_{1n_1}^*)$. Таким образом, $Ver(G_{1n_1}^*) = Ver(G_1^{**})$.

2) Покажем, что $E(G_{1n_1}^*) = E(G_1^{**})$. $Ver(G_{1n_1}^*) = Ver(G_1^{**})$. Следовательно, для $k \in Ver(G_{1n_1}^*)$ класс H_k на символическом образе G_1 истинный. Пусть $k \to l$ ребро на графе $G_{1n_1}^*$. Это значит, что для любого $n \in \mathbf{N}$ существует допустимый путь $\omega_n \in P_1^n$ на символическом образе G_1 из класса H_k в класс H_l, который не проходит через другие истинные классы. Каждый такой путь $\omega_n = \{i_m^n\}_{m\in Z}$ на фазовом пространстве соответствует ε_n-траектории $\{x_m(\varepsilon_n)\}_{m\in Z}$. Обозначим через T объединение ячеек $M(i)$, где через вершину i проходит какой-нибудь из рассмотренных допустимых путей ω_n и i не принадлежит ни одному истинному классу эквивалентных вершин. Тогда T не пересекается с цепно-рекуррентным множеством. Так как для любого $n \in \mathbf{N}$ существует $\omega_n \in P_1^n$, то существует ячейка $M(i_0) \subset T$, которая содержит бесконечное множество точек $x_0(\varepsilon_1), x_0(\varepsilon_2), ...$ Так как $M(i_0)$ – компактное множество, то существует подпоследовательность, сходящаяся к точке x_0. Не умоляя общности, $\lim_{\varepsilon_n\to 0} x_0(\varepsilon_n) = x_0$. Рассмотрим следующую ячейку $M(i_1)$, содержащую бесконечное множество точек $x_1(\varepsilon_1), x_2(\varepsilon_2), ...$ Аналогично, пусть $\lim_{\varepsilon_n\to 0} x_1(\varepsilon_n) = x_1$. И так далее. В результате получим бесконечную в обе стороны последовательность точек $.., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...$ Так как T не пересекается с инвариантным множеством, то найдутся такие номера $t, s \in \mathbf{Z}$, что $x_t \in R_k, x_s \in R_l$, где R_k, R_l

– носители классов H_k, H_l. Пути ω_n начинаются в H_k и заканчиваются в H_l. Поэтому все точки $x_m \in R_k$ при $m \leq t$ и $x_m \in R_l$ при $m \geq s$. По аналогии с тем, как это было доказано выше, можно показать, что $\{x_m\}$ есть настоящая траектория динамической системы, причем ω-предельное множество содержится в R_k и α-предельное множество содержится в R_l. Таким образом, среди всех рассматриваемых допустимых путей $\omega_n \in P_1^n$, мы выделили тот, который соответствует настоящей траектории. Последнее означает, что $\omega(x_0) \in Q_l, \alpha(x_0) \in Q_k$, где $Q_l \subset R_l, Q_k \subset R_k$. То есть, $k \to l$ – ребро на графе G_1^{**}.

Пусть $k \to l$ – ребро на графе G_1^{**}. Тогда существует точка $x \in M$ такая, что $\alpha(x) \subset R_k$, $\omega(x) \subset R_l$ и $R(x) \cap R_i = \emptyset$ для $i \neq k, l$, где $R(x) = \{\bigcup M(i_m) : f^m(x) \in M(i_m)\}$ – носитель траектории $\{f^m(x)\}$. Траектории $\{f^m(x)\}$ на каждом символическом образе G_n будет соответствовать определенный допустимый путь $\gamma_n \in P_n$. Так как $\{C_n\}$ есть последовательность измельчений, то $S(\gamma_n) = \gamma_1$, где S – отображение из множества P_n в множество P_1. По предположению, $R(x) \cap R_i = \emptyset$ для $i \neq k, l$. Следовательно, путь γ_1 не проходит через классы H_i для $i \neq k, l$. Таким образом, допустимый путь $\gamma_1 \in P_1^n$ для любого n, начинается в классе H_k и заканчивается в классе H_l, и не проходит через другие истинные классы. Значит, $k \to l$ – ребро на графе $G_{1n_1}^*$. Утверждение доказано. ■

Построение структурного графа динамической системы. Построим аналогично графу G_1^{**} граф G_2^{**}, повторяя тот же алгоритм для структурного графа G_2^*. Покажем, что число вершин графа G_2^{**} не меньше числа вершин графа G_1^{**}. Действительно, если $k \in Ver(G_2^{**})$, то ее носитель содержит обязательно компоненту Q_k цепно-рекуррентного множества. Этой компоненте на графе G_1^{**} соответствует ровно одна вершина l. Носитель R_l, соответствующий вершине l, может содержать несколько компонент цепно-рекуррентного множества. Этим компонентам на графе G_2^{**} могут соответствовать несколько вершин. Таким образом, $|Ver(G_1^{**})| \leq |Ver(G_2^{**})|$. Из этого следует, что и число ребер графа G_2^{**} не меньше числа ребер G_1^{**}.

Рассмотрим последовательность графов:

$$G_1^{**}, G_2^{**}, G_3^{**}, .. \tag{6}$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что

$$|Ver(G_1^{**})| \leq |Ver(G_2^{**})| \leq .. \leq |Ver(\Gamma)|,$$

$$|E(G_1^{**})| \leq |E(G_2^{**})| \leq .. \leq |E(\Gamma)|,$$

где Γ – структурный граф динамической системы.

Теорема 5 *Если динамическая система имеет конечное число компонент цепно-рекуррентного множества, то существует номер $s > 0$ такой, что $G_s^{**} = \Gamma$.*

Доказательство. Так как $|Ver(G_n^{**})| \leq |Ver(\Gamma)| < +\infty$ для любого натурального n, то в последовательности (6) с некоторого момента все графы будут иметь одинаковое множество вершин. Пусть $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup .. \cup Q_m$, $U_k \supset Q_k$ – непересекающиеся окрестности, изолирующие компоненты цепно-рекуррентного множества. Так как число компонент конечное, то, согласно теореме 3, существует покрытие C_t такое, что $Q_k \subset R_k^t \subset U_k$ для любого $k = 1, .., m$. Здесь через R_k^t обозначается носитель класса H_k на символическом образе G_t. Тогда каждая вершина k структурного графа G_t^* будет соответствоать не более одной компоненте Q_k. Следовательно, граф G_t^{**} будет содержать ровно m вершин. Следовательно, $Ver(G_n^{**}) = Ver(\Gamma)$ для любого $n \geq t$. По определению, все ребра графа G_t^{**} истинные. То есть, если Q_k, Q_l есть компоненты цепно-рекуррентного множества, соответствующие вершинам $k, l \in Ver(G_t^{**})$, $k \to l$ – ребро на G_t^{**}, то существует связь $Q_k \to Q_l$. Поэтому, если $k \to l$ – ребро на графе G_t^{**}, то $k \to l$ – ребро на графе G_n^{**} для любого $n \geq t$, и $k \to l$ – ребро на структурном графе динамической системы Γ. С ростом номера n множество ребер $E(G_n^{**})$ может разве лишь увеличиваться. Покажем, что существует $s > t$ такое, что $E(G_n^{**}) = E(\Gamma)$ для любого $n \geq s$.

Пусть Q_k, Q_l – две компоненты цепно-рекуррентного множества и есть связь $Q_k \to Q_l$. Тогда существует на фазовом пространстве точка x с ω-предельным множеством в Q_l и с α-предельным множеством в Q_k. Из утверждения 3 следует, что существует такое мелкое покрытие C_n, что $R(x) \cap R_i^n = \emptyset$ для $i \neq k, l$, где $R(x)$ – носитель траектории $\{f^m(x)\}$ относительно покрытия C_n. Следовательно, на символическом образе G_n существует допустимый путь из H_k^n в H_l^n, соответствующий траектории точки x и не проходящий через другие истинные классы. Тогда на графе G_n^{**} будет ребро $k \to l$. Так как связей между компонентами цепно-рекуррентного множества конечное число, то существует граф G_s^{**}, $s > t$, ребра которого соответствуют всем связям $Q_k \to Q_l$. Таким образом, $Ver(G_s^{**}) = Ver(\Gamma)$, $E(G_s^{**}) = E(\Gamma)$ и, следовательно, $G_s^{**} = \Gamma$. Теорема доказана. ■

Таким образом, при условии ограниченности числа компонент цепно-рекуррентного множества, мы за конечное число шагов можем построить структурный граф динамической системы. На каждом шаге каждому построенному графу можно сопоставить соответствующую матрицу переходов. То есть, получаем следующие последовательности матриц:

1) для $l \geq 1$: $\Pi^*_{ll+1}, \Pi^*_{ll+2}, .., \Pi^*_{lk}, .., \Pi^{**}_l$. Здесь Π^*_{lk} – матрица переходов для графа G^*_{lk}, Π^{**}_l – матрица переходов для истинного структурного графа G^{**}_l.

2) $\Pi^{**}_1, \Pi^{**}_2, .., \Pi^{**}_s = A$, где A – структурная матрица динамической системы f.

Схема вычисления структурной матрицы.

- Строится последовательность покрытий C_k и символических образов G_k.
- Определяются отображения $G_k \to G_l, \quad k > l$.
- Строятся графы G^*_{lk} и соответствующие матрицы переходов Π^*_{lk}. Тогда
  - матрица Π^*_{lk}, где число $k - l$ является достаточно большим, есть матрица переходов Π^{**}_l истинного структурного графа G^{**}_l для покрытия C_l;
  - матрица Π^*_{lk}, где числа l и $k - l$ является достаточно большими, есть структурная матрица A динамической системы f.

Примеры.

Пример 1 *Покажем, что ложные компоненты множества возвратных вершин символического образа могут существовать для сколь угодно мелкого покрытия. Отсюда следует, что построение отображений $G_k \to G_l, \quad k > l$ является необходимым.*

Рассмотрим линейное отображение f_λ расширенной полупрямой $[0, +\infty) \cup +\infty$ в себя:

$$f_\lambda : x \to \lambda x,$$

$\lambda \in (0, 1)$. Таким образом, в качестве компакта M рассматривается компактефицированная полупрямая $[0, +\infty]$, на которой отображение f_λ есть гомеоморфизм. Предполагается, что $+\infty$ является неподвижной точкой. Построим последовательность покрытий $\{C_k\}$, $k \in \mathbf{N}$, где

$$C_k = \{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]\}_{l=0}^{2^k-2} \cup [\frac{2^k-1}{2^k}, +\infty].$$

Для каждого k покрытие C_k представляет собой конечное объединение замкнутых отрезков, причем покрытие C_{k+1} является подразбиением покрытия C_k, то есть, $C_{k+1} \succ C_k$. Выясним сколько классов эквивалентных рекуррентных вершин будет иметь символический образ G_k. Обозначим через $M_k(l)$, $l \neq 2^k - 1$, элемент $[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]$ покрытия C_k. Тогда $f(M_k(l)) = [\frac{\lambda l}{2^k}, \frac{\lambda(l+1)}{2^k}]$. Так как f_λ – сжимающее отображение, то вершина l на символическом образе будет возвратной тогда и только тогда, когда 1) $f(M_k(l)) \cap M_k(l) \neq \emptyset$ для $l \neq 2^k - 1$ или 2) $l = 2^k - 1$ (номеру $l = 2^k - 1$ соответствует ячейка $[\frac{2^k-1}{2^k}, +\infty]$ покрытия C_k, которая засекает себя при отображении f_λ для всех k). То есть, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{array}{rcl} \frac{l}{2^k} & \leq & \frac{\lambda(l+1)}{2^k}, \\ l & = & 2^k - 1 \end{array}$$

или окончательно

$$\begin{array}{rcl} l & \leq & \frac{\lambda}{1-\lambda}, \\ l & = & 2^k - 1. \end{array} \tag{7}$$

Таким образом, число классов эквивалентных рекуррентных вершин одинаково для всех символических образов G_k и зависит лишь от λ и не зависит от k. Это означает, что структурные графы G_k^* символических образов имеют одно и тоже множество вершин , причем для $\lambda \geq 0.5$ (тогда $\frac{\lambda}{1-\lambda} \geq 1$) и $k \geq 2$ множество $Ver(G_k^*)$ будет состоять по крайней мере из четырех вершин. Но цепно-рекуррентное множество Q динамической системы f_λ состоит из двух точек $x = 0$ и $x = +\infty$ и структурный граф Γ системы имеет две вершины. Таким образом, цепочка символических образов не дает точную информацию о глобальной структуре фазового пространства.

В частности, рассмотрим случай $\lambda = \frac{3}{4}$. Построим три покрытия для множества $[0, +\infty]$:

$$C_1 = \{[0, 1/2], [1/2, +\infty]\},$$

$$C_2 = \{[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, +\infty]\},$$

$$C_3 = \{[0, 1/8], [1/8, 1/4], [1/4, 3/8], [3/8, 1/2], [1/2, 5/8],$$

$$[5/8, 3/4], [3/4, 7/8], [7/8, +\infty]\}.$$

На рисунках 1 и 2a) построены соответствующие символические образы G_i для этих покрытий и структурные графы символических образов G_i^*, $i = 1, 2, 3$.

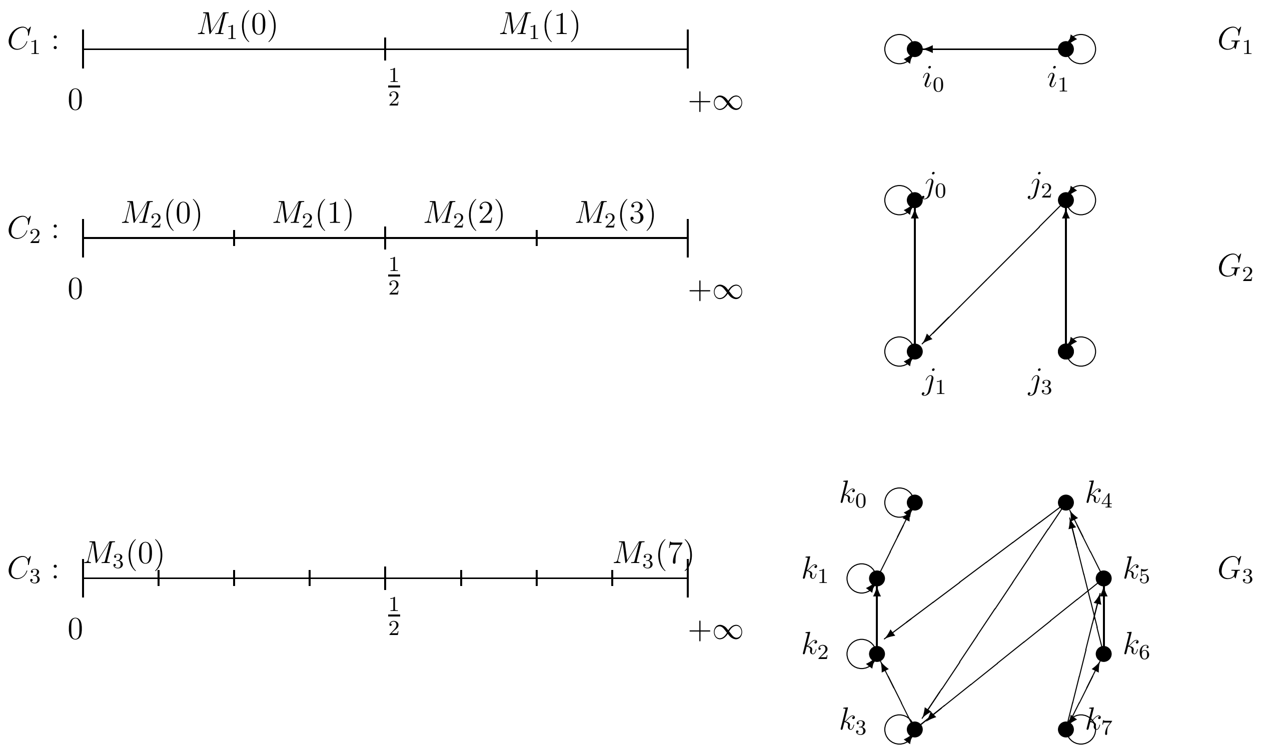


Рис. 1:

Граф G_3^* имеет пять вершин. Согласно условиям (7), любой символический образ G_k, $k > 3$, для покрытия C_k, будет иметь ровно пять классов эквивалентных возвратных вершин. Таким образом, имея сколь угодно большую последовательность вписанных покрытий, мы не получим структурного графа динамической системы.

Построим граф G_{12}^* (см. стр. 96). Рассмотрим допустимые пути : $\omega = \{..i_0 i_0 i_0..\} \in P_1$, $\gamma = \{..j_0 j_0 j_0..\} \in P_2$, где P_1, P_2 – пространства допустимых путей для символических образов G_1, G_2 соответственно. Так как $M_2(0) \subset M_1(0)$, то $S(\gamma) = \omega$, где S – отображение из P_2 в P_1. Аналогично, для путей $\omega_1 = \{..i_1 i_1 i_1..\} \in P_1$, $\gamma_1 = \{..j_2 j_2 j_2..\} \in P_2$ выполняется равенство $S(\gamma_1) = \omega_1$. Кроме того, путь $\{..j_2..j_2 j_1..j_1..\}$ при отображении S отобразится на путь $\{..i_1 i_0..\}$. Следовательно, множества вершин $Ver(G_1^*) = \{v_0, v_1\}$ и

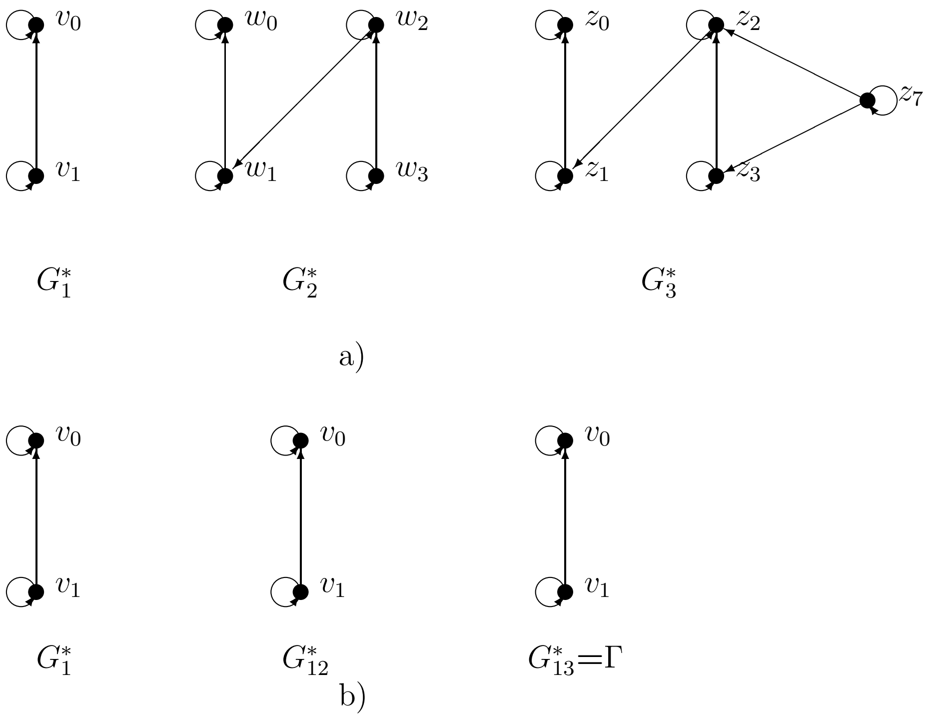


Рис. 2:

$Ver(G_{12}^*)$ одинаковые и множества ребер также одинаковые (см. рис. 2b)). Из аналогичных соображений следует, что граф G_{13}^* также будет содержать вершины v_0, v_1 графа G_1^*. Таким образом, граф G_{13}^* имеет две вершины. То есть $G_{13}^* = \Gamma$. Вершина v_1 графа G_{13}^* соответствует последней ячейке разбиения.

Этот пример показывает недостаточность построения последовательности структурных графов $\{G_k^*\}$, соответствующих последовательным измельчениям C_k компакта. Ложные компоненты на графе G_k исчезнут при последовательных отображениях $S : G_m \to G_k$, $m > k$.

Пример 2 *Структурный граф отображения Икеды.*

Отображением Икеды называется отображение комплексной плоскости в себя, определяемое равенством:

$$I : z \to R + C_2 z \exp\left(i(C_1 - \frac{C_3}{1 + |z|^2}) \right), \tag{8}$$

где R, C_1, C_2, C_3 – вещественные постоянные. Это отображение предложено Икедой как модель динамики ячейки оптического компьютера.

Отображение (8) в вещественном представлении имеет вид:

$$I(x,y) = (R + C_2(x\cos\tau - y\sin\tau), C_2(x\sin\tau + y\cos\tau)), \tag{9}$$

где

$$\tau = C_1 - \frac{C_3}{1 + x^2 + y^2}.$$

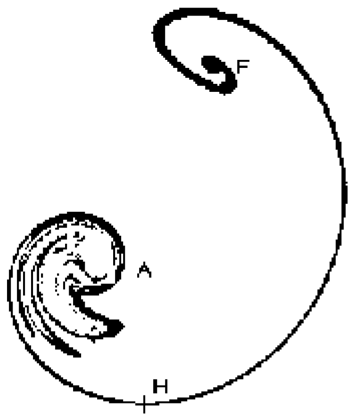


Рис. 3: Максимальный аттрактор отображения Икеды.

Отображение (9) можно рассматривать как суперпозицию трех отображений T_1, T_2, T_3 плоскости на себя:

$$I = T_3 \circ T_2 \circ T_1,$$

где $T_1(x,y) = (x\cos\tau - y\sin\tau, x\sin\tau + y\cos\tau)$ – отображение поворота на угол $\tau = \tau(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;

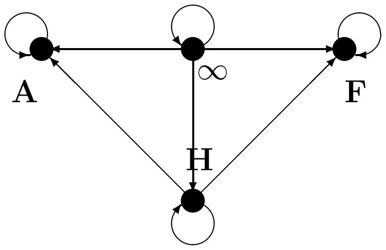
$T_2(x,y) = (C_2 x, C_2 y)$ – линейная гомотетия;

$T_3(x,y) = (R + x, y)$ – отображение сдвига вдоль вещественной оси.

Численное моделирование динамики отображения Икеды проводилось при следующих значениях параметров $C_1 = 0.4$, $C_2 = 0.9$, $C_3 = 6.0$, $R = 0.8$. Используя последовательность символических образов, построена локализация максимального инвариантного множества отображения (9) в области $D = [-10, 10] \times [-10, 10]$. При данных параметрах все траектории системы достигают область D. На рис. 3 показан максимальный аттрактор (максимальное инвариантное множество) в области D.

Цепно-рекуррентное множество данной динамической системы имеет три компоненты: странный аттрактор Икеды, гиперболическая точка и устойчивый фокус (на рис. 3 эти компоненты помечены буквами A, H, F соответственно.)

Построенные структурный граф и структурная матрица отображения Икеды (рис. 4) показывают как компоненты связаны между собой. Бесконечно-удаленная точка является отталкивающей компонентой.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рис. 4: Структурный граф и структурная матрица отображения Икеда.

Литература

[1] В.М. Алексеев, Символическая динамика, 11-ая математическая школа, Киев, 1976, с.128.

[2] Р. Боуэн, Методы символической динамики, Математика, N13, Москва, 1979.

[3] В.А.Плисс "Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений"М. "Наука", 1977.

[4] J.Guckenheimer, J.Moser, and S.Newhouse, Dynamical Systems, Birkhauser-Verlag (1980);

[5] Z.Nitetcki and M.Shub, Filtrations, decompositions, and explosions, Amer. J. Math., 97(1975), 1029-1047;

[6] Mizin D.A., Osipenko G.S., Kobyakov S. Yu. The estimates for the topological entropy of the dynamic system // Proceedings of the third international conference "Tools for mathematical modelling", SpbSTU, 2001, p. 85-105.

[7] G.Osipenko, Construction of Attractors and filtrations, Conley Index Theory, Banach Center Publications, Warszawa, v.47, 1999, 173-197.

[8] J.Palis, On Morse-Smale dynamical systems, Topology 8 (1969), 385-404;

[9] C.Pugh, The closing lemma, Amer. J.Math., 84, no 4 (1967);

[10] J.Robbin, Astructural stability theorem, Annals of Math. 94 (1971), no. 3, 447-493;

[11] S.Smale, Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747-817;