ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2002
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

ЧАСТНЫЕ СИММЕТРИИ СИСТЕМЫ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Н.Кусюмов, В.Г.Павлов

кафедра Аэрогидродинамики,
Казанский государственный
технический университет им. А.Н. Туполева,
Россия, 420111, Казань, ул. К. Маркса, д. 10,
e-mail: kusyumov@agd.kstu-kai.ru, postbox7@mail.ru

Аннотация.

Рассматривается система внешних дифференциальных уравнений, соответствующая произвольной квазилинейной системе уравнений в частных производных первого порядка, и ее неклассические симметрии. В качестве неклассических симметрий рассматриваются частные симметрии системы внешних дифференциальных уравнений. Частные симметрии используются для отыскания точных решений уравнений в частных производных.

1 Введение

Как известно, наиболее развитым методом отыскания точных решений систем уравнений в частных производных является метод непрерывных групп преобразований Ли – Овсянникова. Используя групповые свойства системы можно находить, в частности, инвариантные и частично-инвариантные решения.

Необходимым условием применения метода Ли – Овсянникова является условие существования симметрий, т.е. точечной группы преобразований G, допускаемой рассматриваемой системой уравнений. При этом считается, что данная группа преобразований допускается исходной системой, если любое решение исходной системы под действием преобразований снова переходит в решение исходной системы. С математической точки зрения условие существования точечной группы преобразований заключается в выполнении условий инвариантности (на всяком интегральном многообразии системы) при действии группы G на независимые и зависимые переменные системы [1].

В настоящей работе рассматриваются частные симметрии. Под этим термином понимается группа преобразований, допускаемая системой для некоторого частного интегрального многообразия (а не для любого интегрального многообразия). Отметим, что впервые симметрии такого вида рассматривались в работе [2] на примере уравнения теплопроводности.

Групповой анализ осуществляется с помощью перехода от исходной системы уравнений в частных производных к системе внешних дифференциальных уравнений.

2 Система внешних дифференциальных уравнений и основные определения

Система уравнений в частных производных первого порядка рассматривается [3] как подмногообразие (поверхность) Σ в пространстве $J^1(\pi)$ 1 - струй локальных сечений расслоения $\pi : E \longrightarrow M$, определяемое уравнениями

$$F^k(x, u, p) = 0, \tag{1}$$

где $x^i \in M \subset R^n, u^j \in U \subset R^m, p_i^j \in J^1(\pi)$, $E = M \times U$. При этом в пространстве $J^1(\pi)$ определено распределение Картана C, задаваемое набором 1 - форм Картана

$$\Omega^j = du^j - \sum_{i=1}^{n} p_i^j dx^i. \tag{2}$$

Ограничение распределения Картана C на поверхность Σ означает, что функции F^k, определяющие поверхность Σ, должны обращаться в ноль на интегральных многообразиях распределения Картана. Поэтому одновременно с (1) должны выполняться соотношения

$$\Omega^j = 0. \tag{3}$$

Систему соотношений (1),(3) обозначим как $C\Sigma$.

Будем рассматривать квазилинейные системы уравнений (1) вида:

$$F^k = c_{ji}^k(x, u)p_i^j + c_0^k(x, u), \tag{4}$$

где $c_{ji}^k(x, u), c_0^k(x, u)$ – гладкие функции.

От 1-форм, задающих распределение Картана, перейдем к n - формам

$$\Omega_i^j = \Omega^j \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)_{\bar{i}} = du^j \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)_{\bar{i}} +$$

$$+ p_i^j (-1)^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \tag{5}$$

где $(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)_{\bar{i}} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Система внешних дифференциальных уравнений $\Lambda(\Sigma)$ получается следующим образом:

$$\omega^k = F^k dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n - (-1)^i c_{ji}^k \Omega_i^j.$$

После подстановки (5) формы ω^k примут вид:

$$\omega^k = -(-1)^i c^k_{ji}(x,u) du^j \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)_{\bar{i}} +$$

$$+ c^k_0(x,u) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \qquad (6)$$

Таким образом, исходной системе уравнений $C\Sigma$, определяемой как поверхность Σ с заданным распределением Картана C, соответствует система внешних дифференциальных уравнений $\Lambda(\Sigma)$, определяемая соотношениями

$$\omega^k = 0 \qquad (7)$$

с заданным распределением Картана (3). Соответственно, систему (3),(7) обозначим как $\Lambda(C\Sigma)$. Пространство интегральных многообразий системы $C\Sigma$ (и системы $\Lambda(C\Sigma)$) обозначим как U_Σ.

Вследствие квазилинейности исходной системы уравнений, система $\Lambda(\Sigma)$ определена не в координатах пространства $J^1(\pi)$ (как исходная система), а в координатах пространства E. Это означает, что $\Lambda(\Sigma) \in \Lambda_n(E)$, где $\Lambda_n(E)$ – пространство внешних дифференциальных n-форм, определенных на E. Формально говоря система $\Lambda(\Sigma)$, определяемая как соотношения (6),(7), не является системой внешних дифференциальных уравнений, поскольку из соотношений (6),(7) не ясно какие из переменных являются зависимыми, а какие независимыми. Однако для исследования симметрий (точечной группы преобразований, допускаемой исходной системой $C\Sigma$) достаточно исследовать симметрии системы $\Lambda(\Sigma)$ а не $\Lambda(C\Sigma)$ [4].

Пусть под действием группы непрерывных преобразований G переменные, входящие в систему $\Lambda(\Sigma)$, примут вид:

$$x_i \longrightarrow \overline{x}_i(x,u,\varepsilon), \quad u^j \longrightarrow \overline{u}^j(x,u,\varepsilon), \qquad (8)$$

где ε – параметр преобразования. Такие преобразования называются точечными, а выражения (8) можно интерпретировать как преобразования координат пространства E под действием некоторого диффеоморфизма $G : E \longrightarrow E$. Векторное поле X, соответствующее группе G, зададим в виде:

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \zeta^j(x,u)\frac{\partial}{\partial u^j},$$

где функции $\xi^i(x,u), \zeta^j(x,u)$ – компоненты (координаты) векторного поля X [1],[5]. Говорят, что форма $\omega(x,u)$, определенная на пространстве $E = M \times U$, инвариантна относительно действия группы G, если

$$\omega(\overline{x}, \overline{u}) = \omega(x,u) \tag{9}$$

(группу преобразований G будем называть классической). Совокупность векторных полей X, соответствующих всевозможным преобразованиям группы G и определяющих ядро конечномерной алгебры Ли группы G, обозначим $sym(C\Sigma)$.

Для системы внешних дифференциальных уравнений, рассматриваемого класса, симметрии (классические) системы $\Lambda(\Sigma)$ определяются условиями инвариантности форм ω^k на интегральных многообразиях (всяком решении) системы. С учетом этого, условия инвариантности системы $\Lambda(\Sigma)$ можно записать в виде:

$$(\omega^k(\overline{x}, \overline{u}) - \omega^k(x,u))|_{U_\Sigma} = 0. \tag{10}$$

Если симметрии исходной системы определены, то они могут затем использоваться для построения инвариантных (или частично-инвариантных) решений [1]. Такие решения характеризуются тем, что они строятся с помощью полного (или не полного) набора инвариантов, т.е. функций $I(x,u)$, удовлетворяющих условиям

$$X(I) = 0.$$

Совокупность инвариантных и частично-инвариантных решений обозначим как $U_I \subset U_\Sigma$.

Пусть теперь исходная система имеет некоторое аналитическое решение $u = \psi(x)$, где $\psi(x)$ – некоторая вектор-функция. Определим векторное поле X_p (соответствующее некоторой группе преобразований G_p), исходя из условий

$$\left(\overline{u}^j - \psi^j(\overline{x}) - (u^j - \psi^j(x))\right)|_{u=\psi(x)} = 0, \tag{11}$$

или

$$X_p(u^j - \psi^j(x))|_{u=\psi(x)} = 0. \tag{12}$$

Определение 1. *Будем говорить, что решение $u = \psi(x)$ является инвариантным относительно действия группы G_p, если выполняется условие (11).*

Пусть группе преобразований G_p соответствует векторное поле X_p, такое, что X_p не принадлежит $sym(C\Sigma)$.

Предложение 1. *Если $u = \psi(x) \notin U_I$, то $X_p \notin sym(\Sigma)$.*

Доказательство предложения достаточно очевидно и получается от обратного. Если предположить, что $X_p \in sym(\Sigma)$, то тогда можно построить соответствующее векторному полю X_p инвариантное (или частично-инвариантное) решение $u = \psi(x) \in U_I$, что противоречит условиям предложения.

Таким образом, для произвольного аналитического решения $u = \psi(x)$ может существовать группа преобразований G_p, не допускаемая исходной системой уравнений, но относительно действия которой решение $u = \psi(x)$ является инвариантным.

Предложение 2. *Если произвольное решение $u = \psi(x) \notin U_I$ инвариантно относительно действия группы G_p, то выполняются условия*

$$(\omega^k(\overline{x}, \overline{u}) - \omega^k(x, u))|_{u=\psi(x)} = 0. \tag{13}$$

Доказательство предложения прямо вытекает из определения 1 решения $u = \psi(x)$. Условия (11) и (12) представляют из себя запись условий инвариантности выражений $u-\psi(x)$ относительно действия преобразований группы G_p. Это означает, что запись $u = \psi(x)$ в преобразованных переменных сохраняет свой вид: $\overline{u} = \psi(\overline{x})$. Отсюда, поскольку $u = \psi(x)$ обращает в ноль формы $\omega^k(x,u)$, то и для $\overline{u} = \psi(\overline{x})$ формы $\omega^k(\overline{x},\overline{u})$ обращаются в ноль (предложение доказано).

Определение 2. *Будем говорить, что группа преобразований G_p называется частной симметрией системы внешних дифференциальных уравнений $\Lambda(\Sigma)$, если выполняются условия*

$$(\omega^k(\overline{x},\overline{u}) - \omega^k(x,u))|_{U_s} = 0, \tag{14}$$

где $U_s \subset U_\Sigma$. В простейшем случае подпространство U_s определяется частным решением $u = \psi(x)$. Если $U_s = U_\Sigma$, то G_p – классическая группа преобразований.

Разложим выражения для преобразованных переменных $\overline{x}, \overline{u}$ в ряд по параметру преобразования ε [5]:

$$\overline{x}_i = x_i + \varepsilon\xi^i(x,u) + \frac{\varepsilon^2}{2}X_p(\xi^i(x,u)) + \cdots = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^l}{l!}X_p^l(x_i),$$

$$\overline{u}^j = u^j + \varepsilon\zeta^j(x,u) + \frac{\varepsilon^2}{2}X_p(\zeta^j(x,u)) + \cdots = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^l}{l!}X_p^l(u^j)$$

и подставим их в n-форму $\omega^k(\overline{x},\overline{u})$. Получим

$$\omega^k(\overline{x},\overline{u}) = \omega^k(x,u) + \varepsilon\omega_1^k + \frac{\varepsilon^2}{2}\omega_2^k + ..., \tag{15}$$

где $\omega_1^k(x,u,\xi,\zeta), \omega_2^k(x,u,\xi,\zeta), \ldots$ – некоторые n – формы, в выражения для которых входят не только переменные x, u, но и компоненты $\xi(x,u), \zeta(x,u)$ векторного поля X_p.

Подставим выражение (15) в левую часть условий (14). Имеем

$$\omega^k(\overline{x},\overline{u}) - \omega^k(x,u) = \varepsilon\omega_1^k + \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_2^k + ...$$

Ограничение этого выражения на подпространство U_s в условии (14) эквивалентно тому, что должна быть совместной следующая переопределенная система внешних дифференциальных уравнений

$$\omega^k = 0, \quad \omega_1^k = 0, \quad \omega_2^k = 0, \ldots \tag{16}$$

Таким образом, приведенные выше рассуждения можно считать доказательством следующего предложения.

Предложение 3. *Система внешних дифференциальных уравнений $\Lambda(\Sigma)$ допускает частную группу преобразований G_p, определяемую векторным полем X_p, если система (16) совместна для некоторого подпространства $U_s \subset U_\Sigma$.*

Заметим, что условия (16) можно использовать как для отыскания частных симметрий, так и для отыскания классических симметрий.

Рассмотрим формы ω_1^k, входящие в выражение (15). Условие инвариантности (10), определяющее классические симметрии, в общем виде записывается с помощью соотношений

$$\omega_1^k = \lambda_j^k \omega^j, \tag{17}$$

где λ_j^k – некоторые функции.

Пусть n-формы ω_{1p}^k определяют некоторую систему внешних дифференциальных уравнений Λ_p:

$$\omega_{1p}^k = 0.$$

Обозначим через U_p пространство интегральных многообразий системы внешних дифференциальных уравнений Λ_p.

Теорема 1. *Для того, чтобы группа G_p определяла частные симметрии системы внешних дифференциальных уравнений $\Lambda(\Sigma)$, необходимо и достаточно выполнения условий инвариантности*

$$\omega_1^k = \omega_{1p}^k + \lambda_j^k \omega^j, \tag{18}$$

причем $U_\Sigma \bigcap U_p = U_s \neq \emptyset$.

Доказательство теоремы является достаточно очевидным и вытекает из следующих соображений.

Из условия, что группа G_p определяет частные симметрии системы внешних дифференциальных уравнений $\Lambda(\Sigma)$, следует, что подпространство U_s в условии (14) не совпадает с U_Σ. Поэтому всякую форму ω_1^k можно представить в виде (18). С учетом этого, ограничивая условие инвариантности (14) на пространство U_Σ, и учитывая (15), имеем систему Λ_p:

$$\omega_1^k|_{U_\Sigma} = \omega_{1p}^k = 0.$$

В выражения для дифференциальных форм ω_{1p}^k входят координаты векторного поля X_p, соответствующего группе преобразований G_p. При этом координаты векторного поля X_p таковы, что формы ω_{1p}^k не обращаются в ноль для всякого интегрального многообразия системы U_Σ (поскольку группа G_p определяет частные симметрии системы, а не классические). Поэтому систему Λ_p можно рассматривать как совокупность условий на координаты векторного поля X_p и производные зависимых переменных.

С другой стороны, система Λ_p совместна с системой U_Σ (так как в противном случае U_Σ вообще не имеет симметрий). Отсюда следует, что подпространство $U_s = U_\Sigma \bigcap U_p$ – не пусто (необходимость доказана).

Для доказательства достаточности заметим, что выражение (18) можно ограничить на подпространство $U_s = U_\Sigma \bigcap U_p$, откуда следует условие

$$\omega_1^k|_{U_s} = 0,$$

которое является формой записи условия инвариантности (14), определяющего частные симметрии системы $\Lambda(\Sigma)$ (достаточность доказана).

Из данной теоремы вытекает алгоритм, в соответствии с которым могут быть получены частные симметрии системы внешних дифференциальных уравнений. А именно, используя (14) и (15) необходимо получить формы ω_1^k и представить их в виде (18). Из (18) получается система внешних дифференциальных уравнений Λ_p:

$$\omega_{1p}^k = 0,$$

в которой искомыми функциями будут зависимые переменные системы Λ_Σ. Произвол в выборе функций, определяющих координаты оператора X_p используется для обеспечения условий совместности систем Λ_Σ и Λ_p (то есть для определения U_s).

3 Пример 1

В качестве примера, иллюстрирующего существование системы Λ_p рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Данное уравнение может быть представлено как система уравнений первого порядка

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = u\frac{\partial p_2}{\partial x}, \quad p1 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad p2 = \frac{\partial u}{\partial x}$$

и как система внешних дифференциальных уравнений

$$dp_1 \wedge dx + u dp_2 \wedge dt = 0, \quad p_1 dt \wedge dx = du \wedge dx, \quad p_2 dx \wedge dt = du \wedge dt.$$

Исходное уравнение имеет частную симметрию с векторным полем X_p вида [5]:

$$X_p = \frac{\partial}{\partial t} + 2t\frac{\partial}{\partial x} + 8t\frac{\partial}{\partial u}.$$

Для данного векторного поля система Λ_p примет вид:

$$-dp_2 \wedge dx + dp_1 \wedge dt + 4tdp_2 \wedge dt = 0.$$

Это выражение можно записать как уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Нетрудно проверить, что решение этого уравнения можно взять в виде:

$$u = \phi(t) + \psi(x - t^2),$$

где ϕ, ψ – произвольные гладкие функции. Вид этих функций (и, соответственно, подпространство U_s) можно определить подстановкой выражения для зависимой переменной в исходное уравнение.

Отметим, что анализ на совместность переопределенной системы уравнений, состоящей из уравнений систем Λ_Σ и Λ_p является задачей в общем случае достаточно сложной для решения.

Рассмотрим далее несколько иной алгоритм отыскания частных симметрий системы внешних дифференциальных уравнений совместно с задачей отыскания подпространства U_s.

4 Алгоритм отыскания частных симметрий

Практически частные симметрии системы $\Lambda(\Sigma)$ удобнее искать следующим образом. Пусть ω_I^k – произвольные n-формы, вида:

$$\omega_I^k = a_{ji}^k(x, u)\omega_{ij} + a_0^k(x, u)\omega_0,$$

где

$$\omega_0 = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

$$\omega_{ij} = du^j \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)_{\bar{i}}$$

и $a_{ji}^k(x,u), a_0^k(x,u)$ – произвольные гладкие функции.

Вместо системы внешних дифференциальных уравнений $\Lambda(\Sigma)$ рассмотрим систему $\Lambda_{II}(\Sigma)$:

$$\omega_I^k = 0, \quad \omega_{II}^k = 0,$$

где

$$\omega_{II}^k = -(-1)^i c_{ji}^k(x,u)\omega_{ij} + c_0^k(x,u)\omega_0 - \omega_I^k.$$

Систему $\Lambda_{II}(\Sigma)$ будем называть "двухкомпонентной"(в отличие от "однокомпонентной"системы $\Lambda(\Sigma)$). Пусть функции $a_{ji}^k(x,u)$, $a_0^k(x,u)$ являются заданными. Тогда система $\Lambda_{II}(\Sigma)$ в общем случае является переопределенной. Обозначим через U_{II} пространство интегральных многообразий системы $\Lambda_{II}(\Sigma)$ для заданного набора функций $a_{ji}^k(x,u), a_0^k(x,u)$.

Предложение 4. *Имеет место соотношение $U_{II} \subset U_\Sigma$.*

Доказательство данного предложения следует из того факта, что

$$\omega^k = \omega_I^k + \omega_{II}^k.$$

Поскольку на интегральных многообразиях U_{II} системы $\Lambda_{II}(\Sigma)$ выполняются соотношения $\omega_I^k = 0$, $\omega_{II}^k = 0$, то и формы ω^k обращаются в ноль на U_{II} (предложение доказано).

Будем говорить, что группа преобразований G_{II} определяет симметрии системы внешних дифференциальных уравнений $\Lambda_{II}(\Sigma)$, если выполняются условия

$$(\omega_I^k(\overline{x},\overline{u}) - \omega_I^k(x,u))|_{\omega_I^k=0,\,\omega_{II}^k=0} = 0,$$

$$(\omega_{II}^k(\overline{x},\overline{u}) - \omega_{II}^k(x,u))|_{\omega_I^k=0,\,\omega_{II}^k=0} = 0. \qquad (19)$$

Пусть функции $a_{ji}^k(x,u), a_0^k(x,u)$ заданы и существует группа G_{II}, определяющая симетрии системы $\Lambda_{II}(\Sigma)$. Тогда, если система

$\Lambda_{II}(\Sigma)$ совместна, то в общем случае группа G_{II} является частной симметрией системы $\Lambda_{II}(\Sigma)$.

Возможен и обратный подход к отысканию частных симметрий: задается группа G_{II} и из условий (19) определяются функции $a^k_{ji}(x,u)$, $a^k_0(x,u)$. Если для найденных функций $a^k_{ji}(x,u)$, $a^k_0(x,u)$ система $\Lambda_{II}(\Sigma)$ совместна, то группа G_{II} также является частной симметрией системы $\Lambda_{II}(\Sigma)$.

Заметим здесь, что переход к двухкомпонентной системе $\Lambda_{II}(\Sigma)$ не является обязательным условием при поиске частных симметрий. Возможен также переход к трех- и многокомпонентным системам.

Анализ на совместность переопределенной системы внешних дифференциальных уравнений $\Lambda_{II}(\Sigma)$ в общем случае является достаточно сложной задачей. Однако эта задача может быть значительно упрощена если известна группа преобразований, допускаемая системой $\Lambda_{II}(\Sigma)$. В этом случае можно проводить не общий анализ на совместность системы $\Lambda_{II}(\Sigma)$, а построить инвариантное (или частично-инвариантное) решение системы $\Lambda_{II}(\Sigma)$ и проверить чтобы оно удовлетворяло всем уравнениям системы $\Lambda_{II}(\Sigma)$.

5 Пример 2

В качестве иллюстрирующего примера для данного раздела рассмотрим рассмотрим уравнение теплопроводности вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x,u), \tag{20}$$

где $f(t,x,u)$ – некоторая гладкая функция. Групповые свойства данного уравнения для различных функций $f(t,x,u)$ были исследованы в работе [6]. Алгебра Ли симметрий данного уравнения в общем случае содержит бесконечномерную подалгебру (которая здесь не рассматривается) и ядро конечномерной алгебры которое определяется видом функции $f(t,x,u)$.

I. Пусть, например, $f(t,x,u) = u - xt$. Тогда ядро конечномерной алгебры Ли симметрий уравнения (20) не содержит векторных полей. Система внешних дифференциальных уравнений $\Lambda(\Sigma)$, соответствующая записи уравнения (20) как системы уравнений первого порядка, будет иметь вид:

$$\omega^1 = du \wedge dx + dp \wedge dt - (u - xt)dt \wedge dx = 0,$$

$$\omega^2 = du \wedge dt - pdx \wedge dt = 0.$$

Представим теперь систему $\Lambda(\Sigma)$ в двухкомпонентном виде:

$$\omega_I^1 = dp \wedge dt = 0, \quad \omega_I^2 = 0, \tag{21}$$

$$\omega_{II}^1 = du \wedge dx - (u - xt)dt \wedge dx = 0,$$
$$\omega_{II}^2 = du \wedge dt - pdx \wedge dt = 0. \tag{22}$$

Система (21),(22) допускает группу преобразований G_{II}, определяемую векторным полем

$$X = u\frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Следовательно, можно искать решение системы (21),(22) в виде:

$$u = x\psi(t), \tag{23}$$

где $\psi(t)$ – гладкая функция. Второе уравнение в (22) и соотношения (21) удовлетворяются тождественно при любом виде функции $\psi(t)$. Подстановка решения (23) в первое уравнение (23) дает

$$\frac{d\psi}{dt} - \psi + t = 0.$$

Из данного уравнения следует, что $\psi = c\exp(t) + 1 + t$ (где $c =$ const) и решение уравнения (20) имеет вид:

$$u = x(c\exp(t) + 1 + t). \tag{24}$$

При этом G_{II} есть частная симметрия уравнения (20) для интегрального многообразия, определяемого выражением (24).

II. Пусть теперь $f(t, x, u) = x^3 + 2t - 6xt$. Ядро конечномерной алгебры Ли уравнения (20) в данном случае также не содержит классических симметрий, кроме группы переноса по переменной u.

В двухкомпонентном виде систему $\Lambda(\Sigma)$ можно записать следующим образом

$$\omega_I^1 = dp \wedge dt - 6xtdx \wedge dt = 0, \quad \omega_I^2 = 0, \tag{25}$$

$$\omega_{II}^1 = du \wedge dx + (x^3 + 2t)dt \wedge dx = 0,$$
$$\omega_{II}^2 = du \wedge dt - pdx \wedge dt = 0. \tag{26}$$

Система (25),(26) допускает группу преобразований G_{II}, определяемую векторным полем

$$X = 6u\frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t}.$$

Следовательно, можно искать решение системы (25),(26) в виде:

$$u = x^6\psi(\frac{x^3}{t}), \tag{27}$$

где $\psi(\frac{x^3}{t})$ – некоторая функция. Подстановка решения (27) в систему (25),(26) определяет следующее решение уравнения (20)

$$u = tx^3 + t^2 + c. \quad (c = \mathrm{const}).$$

Литература

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.

[2] Bluman G.W., Coole J.D. The general similarity solution of the heat equation//J. Math. Mech. 18 (1969). Pp. 1025 – 1042.

[3] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под. ред. Виноградова А.М. и Красильщика И.С. – М.: Изд - во "Факториал", 1997. 464 с.

[4] Kusyumov A.N. About symmetries of exterior differential equations, appropriated to a system of quasilinear differential equations of the first order// Proc. of Institute of Mathematics of Ukraine. V. 30. Part 1. Kyiv: Institute of Mathematics of Ukraine, 2000/ Eds.: A.G. Nikitin, V.M. Boyko. - Pp. 131 - 136.

[5] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.

[6] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source//J. Phys. A: Math. Gen. 32 (1999). Pp. 7405 – 7418.