ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2002
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Дифференциально-разностные уравнения

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНОМЕРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В.С.Тарасян

Россия, 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, д. 66,
Уральский государственный университет путей сообщения,
кафедра теоретической механики,
e-mail:VTarasyan@tm.usart.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = (Fx)(t), \tag{0.1}$$

где $x : R \to R^n$, $F : C(R, R^n) \to L^{loc}(R, R^n)$ – линейный оператор, $C(R, R^n)$ – пространство непрерывных функций на R со значениями в R^n, $L^{loc}(R, R^n)$ – пространство функций, интегрируемых по Лебегу на любом компакте из R.

В работе описан специальный класс периодических систем, принадлежащий классу систем дифференциальных уравнений с ограниченным последействием[1]. Рассматриваемый класс периодических систем дифференциальных уравнений с последействием и с конечномерными операторами монодромии содержит класс систем дифференциальных уравнений, изучавшихся в работах [2,3]. Для систем этого класса построены характеристические уравнения операторов монодромии, действующих в пространстве непрерывных функций. Полученные результаты могут найти приложение в исследованиях по теории устойчивости импульсных систем [4,5]. Методы построения характеристического уравнения оператора монодромии в специальном гильбертовом пространстве для периодических систем дифференциальных уравнений с последействием общего вида предложены в работе [6]. Для периодических систем дифференциальных уравнений с запаздыванием методы построения характеристического уравнения описаны в работах [5,7,8].

1 Конечномерные вольтерровые операторы

Класс систем (0.1) достаточно широк. Для построения эффективных методов исследования таких систем целесообразно сузить класс операторов F. Покажем, что описание оператора $F : C(R, R^n) \to L^{loc}(R, R^n)$ можно заменить описанием вспомогательного оператора $\hat{F} : C([-r, \omega], R^n) \to L([0, \omega], R^n)$, действующего в банаховых пространствах.

Определение 1. Линейный оператор $F : C(R, R^n) \to L^{loc}(R, R^n)$ называется периодическим, если для любой функции $x \in D(F)$ имеем

$$x(\omega + \cdot) \in D(F) \text{ и } (Fx(\omega + \cdot))(t) = (Fx(\cdot))(t + \omega)$$

при всех $t \in R$. Здесь $D(F)$ - область определения оператора F.

Введение свойства периодичности позволяет свести изучение оператора F к изучению оператора $\hat{F} : C(R, R^n) \to L([0, \omega], R^n)$ со значениями в банаховом пространстве. Действительно, при $t = n\omega + s$ (n–целое число, $0 \le s \le \omega$) и произвольной функции $x \in D(F)$ имеем $(Fx(\cdot))(t) = (Fx(n\omega + \cdot))(s) = (\hat{F}\hat{x}(\cdot))$, где $\hat{x}(\cdot) = x(n\omega + \cdot)$ и $D(\hat{F}) = P_\omega D(F)$, где $\hat{x} = P_\omega x$, $x \in D(F)$.

Определение 2[10]. Линейный оператор $F : C(R, R^n) \to L^{loc}(R, R^n)$ называется вольтерровым, если для любого $t \in R$ и любой функции $x \in D(F)$, $x(s) = 0$ при $s \le t$ имеем $(Fx)(t) = 0$.

Свойство вольтерровости позволяет поставить в соответствие оператору F однопараметрическое семейство операторов $F_b : C((-\infty, b], R^n) \to L^{loc}((-\infty, b], R^n)$, $b \in R$. Если выполняются условия, что для любой функции $x \in D(F)$ и любого числа $b \in R$ $x_b \in D(F)$ ($x_b(t) = x(t)$, $t \le b$, и $x_b(t) = x(b)$, $t > b$), то $(Fx)(t) = (Fx_b)(t) = (F_b\hat{x})(t)$, $t \le b$, где $x_b(t) = \hat{x}(t)$, $t \le b$. $D(F_b) = P_b D(F)$, где проектор P_b определяется формулами: $P_b x = \hat{x}$, $x \in D(F)$.

Определение 3. Линейный вольтерровый оператор $F : C(R, R^n) \to L^{loc}(R, R^n)$ называется оператором с ограниченным последействием, если существует положительное число r такое, что $(Fx)(t) = 0$ при всех $x \in D(F)$, $x(s) = 0$, $t - r \le s \le t$, $t \in R$.

Оператору с ограниченным последействием можно поставить в соответствие двухпараметрическое семейство операторов $F_{ab} : C([a-r, b], R^n) \to L([a, b], R^n)$. Если выполняются условия, что для любой функции $x \in D(F)$ и любых чисел a и b $x_{ab} \in D(F)(x_{ab}(t) = x(a)$, $t < a$, $x_{ab}(t) = x(t)$, $a \le t \le b$, $x_{ab}(t) = x(b)$, $t > b)$, то $(Fx)(t) = (Fx_{ab})(t) = (F_{ab}\hat{x})(t)$, где $\hat{x}(t) = x(t)$, $a \le t \le b$.

Таким образом, изучение линейного периодического вольтеррова оператора с ограниченным последействием можно заменить изучением оператора $\hat{F} : C([-r, \omega], R^n) \to L([0, \omega], R^n)$, определяемого формулами $(\hat{F}\hat{x})(t) = (Fx)(t)$, $t \in [0, \omega]$ для всех $x \in D(F)$ и $\hat{x} \in D(\hat{F})$, удовлетворяющих условию $x(s) = \hat{x}(s)$ при $s \in [-r, \omega]$.

В дальнейшем, будем полагать, что для оператора $\hat{F}$ область определения $D(\hat{F}) = C([-r, \omega], R^n)$, оператор $\hat{F} : C([-r, \omega], R^n) \to L([0, \omega], R^n)$ непрерывен и $0 \le r \le \omega$. Линейный непрерывный оператор $\hat{F} : C([-r, \omega], R^n)$ $\to L([0, \omega], R^n)$ опишем формулой [11]

$$(\hat{F}\hat{x})(t) = \int_{-r}^{\omega} d_s\tilde{\eta}(t, s)\hat{x}(s), \qquad (1.1)$$

где матричная функция $\tilde{\eta}$ измерима по Лебегу на множестве $[0, \omega] \times [-r, \omega]$, при каждом фиксированном значении первого аргумента $t \in [0, \omega]$ матричная функция $\tilde{\eta}\,(t, \cdot)$ имеет ограниченную вариацию по второму аргументу s на отрезке $[-r, \omega]$, при каждом фиксированном значении второго аргумента $s \in [-r, \omega]$ матричная функция $\tilde{\eta}\,(\cdot, s)$ интегрируема по Лебегу по второму аргументу t на отрезке $[0, \omega]$; $\tilde{\eta}\,(t, \omega) = 0$, $t \in [0, \omega]$.

Утверждение 1.1. Для вольтерровости линейного непрерывного оператора (1.1) необходимо и достаточно, чтобы матричная функция $\tilde{\eta}(t, s)$ принимала нулевые значения при $s \ge t$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Для необходимости требуется, чтобы при каждом фиксированном $0 \le t < \omega$ выполнялось условие $\int_{t+0}^{\omega} d_s\tilde{\eta}(t, s)\hat{x}(s) = 0$ при всех $\hat{x} \in C([t, \omega], R^n)$, $\hat{x}(t) = 0$[10]. Справедливость утверждения следует из [13, с.126].

Линейный непрерывный вольтерровый оператор $\hat{F} : C([-r, \omega], R^n) \to L([0, \omega], R^n)$ определяется формулой

$$(\hat{F}\hat{x})(t) = \int\limits_{-r}^{t} d_s\tilde{\eta}(t, s)\hat{x}(s), \quad t \in [0, \omega]. \tag{1.2}$$

Утверждение 1.2. Для того, чтобы оператор (1.2) был оператором с ограниченным последействием, необходимо и достаточно, чтобы матричная функция $\tilde{\eta}(t, s) = \tilde{\eta}(t, t - r)$ при $-r \le s < t - r \le \omega - r$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Для необходимости требуется, чтобы при каждом фиксированном $0 \le t < \omega$ выполнялось условие $\int\limits_{-r}^{t-r-0} d_s\tilde{\eta}(t, s)\hat{x}(s) = 0$ при всех $\hat{x} \in C([t, \omega], R^n)$, $\hat{x}(t) = 0$. Справедливость утверждения следует из [13, с.126].

Линейный непрерывный вольтерровый оператор $\hat{F} : C([-r, \omega], R^n) \to L([0, \omega], R^n)$ с ограниченным последействием определяется формулой

$$(\hat{F}\hat{x})(t) = \int\limits_{t-r}^{t} d_s\tilde{\eta}(t, s)\hat{x}(s), \quad t \in [0, \omega]. \tag{1.3}$$

Описываемый формулой (1.3) класс непрерывных операторов $\hat{F} : C([-r, \omega], R^n) \to L([0, \omega], R^n)$ содержит конечномерные операторы.Для их построения оператор (1.3) запишем в следующей форме

$$(\hat{F}\hat{x})(t) = \int\limits_{-r}^{\omega} d_s\hat{\eta}(t, s)\hat{x}(s), \quad t \in [0, \omega]. \tag{1.4}$$

Рассмотрим разбиение отрезка $[-\omega, \omega]$:

$$-\omega = t_{-N} < t_{-N+1} < ... < t_{-1} < t_0 = 0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = \omega.$$

Пусть $(-M + 1)$ –номер ближайшей справа точки разбиения к точке $t = -r$. Для оператора (1.4) можно предложить следующую конечномерную реализацию

$$(\hat{F}\hat{x})(t) = \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d_s\alpha_k(s)\hat{x}(s), \quad t \in [0, \omega].$$

Эта реализация, в случае вольтеррового оператора с ограниченным последействием, имеет вид

$$(\hat{F}\hat{x})(t) = \sum_{t_k<t\leq t_{k-1}+r} A_k(t) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s)\hat{x}(s), \tag{1.5}$$

где $\hat{x} \in C([-r,\omega), R^n)$, A_k, $0 < r \leq \omega$, $k = \overline{-N+1,N}$, – интегрируемые по Лебегу на отрезке $[0,\omega]$ матричные функции размерности $n \times n$ функции α_k – матричные функции размерности $n \times n$ с ограниченной вариацией на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{-N+1,N}$, $N \geq 2$.

Введём в рассмотрение функции $\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}$ – индикаторы множеств $(t_k, t_{k-1}+r]$, $k = \overline{-M+1,N}$, где $(-M+1)$ - номер ближайшей справа точки разбиения к точке $t=-r$. Тогда формула (1.5) преобразуется к виду

$$(\hat{F}x)(t) = \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(t) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s)x(s), \quad t \in [0,\omega]. \tag{1.6}$$

Продолжим функции α_k, $k = \overline{-M+1,N}$ с отрезков $[t_{k-1},t_k]$, $k = \overline{-M+1,N}$ соответственно, на отрезок $[-r,\omega]$, полагая $\alpha_k(s) = \alpha_k(t_{k-1}) = \alpha_k(-r)$, $0 \leq s < t_{k-1}$, $\alpha_k(s) = \alpha_k(t_k) = 0$, $t_k < s \leq \omega$, $k = \overline{-M+1,N}$. Тогда формула (1.6) примет вид

$$(\hat{F}x)(t) = \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(t) \int\limits_{-r}^{\omega} d\alpha_k(s)x(s), \quad t \in [0,\omega].$$

Изменяя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$(\hat{F}x)(t) = \int\limits_{-r}^{\omega} d\Big(\sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(t)\alpha_k(s)\Big)x(s), \quad t \in [0,\omega]. \tag{1.7}$$

Сравнивая правую часть формулы (1.7) с правой частью формулы (1.1), получим

$$\tilde{\eta}(t,s) = \sum_{k=-M+1}^{N} A_k(t)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(t)\alpha_k(s), \quad s \in [-r-\omega,\omega], \quad t \in [0,\omega]. \tag{1.8}$$

Проверим выполнение требований утверждений 1.1 и 1.2 для $\tilde{\eta}$. Для функции $\tilde{\eta}$ имеет место формула

$$\tilde{\eta}(t,s+t) = \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(t)\alpha_k(s+t), \quad t \in [0,\omega).$$

При $s \geq 0$ на каждом из промежутков $(t_k, t_{k-1}+r]$ имеем $\alpha_k(s+t) = \alpha_k(t_k) = 0$. Следовательно, $\tilde{\eta}(t,0) = 0$. При $s \leq -r$ на каждом из промежутков $(t_k, t_{k-1}+r]$ имеем $\alpha_k(s+t) = \alpha_k(t_{k-1}) = \alpha_k(-r)$, Тогда

$$\tilde{\eta}(t,s) = \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(t)\alpha_k(t_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(t)\alpha_k(-r) = \eta(t,-r), \quad t \in [0,\omega).$$

В данной работе мы будем изучать дифференциальные уравнения (0.1), порождаемые конечномерными операторами $\hat{F}$. Используя связь оператора $\hat{F}$ с оператором F, находим

$$(Fx)(t) = \int_{-r}^{0} d_s\tilde{\eta}(t,t+s)x(t+s), \quad t \in [0,\omega].$$

При каждом фиксированном $s \in [-r,0]$ функцию $\tilde{\eta}(\cdot, s+\cdot)$ продолжаем с отрезка $[0,\omega]$ по периодичности на R. Тогда формула

$$(Fx)(t) = \int_{-r}^{0} d_s\tilde{\eta}(t,t+s)x(t+s), \quad t \in R,$$

определит оператор $F : C(R,R^n) \to L^{loc}(R,R^n)$.

2 Построение общего решения

Описанная в п.1 система дифференциальных уравнений (0.1) с вольтерровым конечномерным оператором на отрезке $[0,\omega]$ имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(t)\int_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s)x(s). \tag{2.1}$$

Ищем решение начальной задачи Коши на этом отрезке с начальным моментом $t_0 = 0$ и начальной функцией $\varphi \in C([-r,0],R^n)$. Для этого решения система (2.1) преобразуется к виду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-M+1}^{0} A_k(t)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(t)\int_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s)\varphi(s)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(t)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s)x(s), \quad t\in[0,\omega].$$

Полученное дифференциальное уравнение можно заменить интегральным уравнением

$$x(t)=\varphi(0)+\sum_{k=-M+1}^{0}\int\limits_0^t A_k(s)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(s)ds\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s)\varphi(s)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_0^t A_k(s)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(s)ds\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s)x(s), \quad t\in[0,\omega].$$

Введём обозначения:

$$\Phi(t)=\varphi(0)+\sum_{k=-M+1}^{0}\int\limits_0^t A_k(s)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(s)ds\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s)\varphi(s), \quad t\in[0,\omega],$$

$$B_k(t)=\int\limits_0^t A_k(s)\chi_{(t_k,t_{k-1}+r]}(s)ds, \quad k=\overline{-M+1,N-1}, \quad t\in[0,\omega],$$

$$g_k(\varphi)=\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s)\varphi(s), \quad k=\overline{-M+1,0},$$

$$f_k(x)=\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s)x(s), \quad k=\overline{1,N-1}.$$

Тогда интегральное уравнение преобразуется к виду

$$x(t)=\Phi(t)+\sum_{k=1}^{N-1} B_k(t)f_k(x), \quad t\in[0,\omega]. \tag{2.2}$$

Для нахождения неизвестных векторных функционалов f_m, $m=\overline{1,N-1}$, в уравнении (2.2) получим линейную систему алгебраических уравнений

$$f_m(x)=f_m(\Phi)+\sum_{k=1}^{N-1} f_m(B_k)f_k(x), \quad m=\overline{1,N-1}, \quad x\in C(R,R^n), \tag{2.3}$$

где $f_m(B_k) = \int\limits_{t_{m-1}}^{t_m} d\alpha_m(s) B_k(s)$.

При $s \le t_k$ значения индикаторной функции $\chi_{(t_k, t_{k-1}+r]}(s)$ равны нулю. Поэтому при $m \le k$ получим $f_m(B_k) = 0$. Тогда система (2.3) примет вид

$$f_1(x) = f_1(\Phi) + f_1(B_2) f_2(x) + ... + f_1(B_{N-1}) f_{N-1}(x),$$

$$f_2(x) = f_2(\Phi) + f_2(B(B_3) f_3(x) + ... + f_2(B_{N-1}) f_{N-1}(x),$$

$$...,$$

$$f_{N-2}(x) = f_{N-2}(\Phi) + f_{N-2}(B_{N-1}) f_{N-1}(x),$$

$$f_{N-1}(x) = f_{N-1}(\Phi).$$

Решение системы алгебраических уравнений (2.3) можно найти с помощью рекуррентной процедуры, которая начинается с последнего уравнения. Это решение представимо в следующей форме

$$f_k(x) = \sum_{m=k}^{N-1} S_{km} f_m(\Phi), \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Таким образом, общее решение системы (2.1) имеет вид

$$x(t,\varphi) = \varphi(0) + \sum_{m=k}^{0} B_k(t) g_k(\varphi) + \sum_{m=1}^{N-1} B_m(t) \sum_{k=m}^{N-1} S_{km} f_k(\Phi), \quad t \in [0, \omega].$$

Учитывая, что

$$f_k(\Phi) = f_k(\varphi(0)) + \sum_{S=-M+1}^{0} f_k(B_S) g_S(\varphi) =$$

$$= f_k(I_n)\varphi(0) + \sum_{S=-M+1}^{0} f_k(B_S) g_S(\varphi), \quad k = \overline{1, N-1},$$

где I_n–единичная матрица, получим

$$x(t,\varphi) = (I_n + \sum_{m=1}^{N-1} B_m(t) \sum_{k=m}^{N-1} S_{km} f_k(I))\varphi(0) +$$

$$+ \sum_{p=-M+1}^{0} [B_p(t) + \sum_{m=1}^{N-1} B_m(t) \sum_{k=m}^{N-1} S_{km} f_m(B_p)] g_p(\varphi), \quad t \in [0, \omega].$$

Введем обозначения

$$R_{-M}(t) = I + \sum_{m=1}^{N-1} B_m(t) \sum_{k=m}^{N-1} S_{km} f_k(I),$$

$$R_P(t) = B_p(t) + \sum_{m=1}^{N-1} B_m(t) \sum_{k=m}^{N-1} S_{km} f_k(B_p), \quad p = \overline{-M+1, 0}, \quad t \in [0, \omega].$$

Тогда общее решение системы (2.1) запишется в следующей форме

$$x(t, \varphi) = R_{-M}(t)\varphi(0) + \sum_{p=-M+1}^{0} R_p(t) g_p(\varphi). \tag{2.4}$$

3 Оператор монодромии

Оператор монодромии определяется следующим образом[12]

$$(U\varphi)(\vartheta) = x(\omega + \vartheta, \varphi), \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Здесь $x(\cdot, \varphi)$ - решение системы дифференциальных уравнений (2.1), отвечающее начальной функции φ. Используя формулу (2.5), находим

$$(U\varphi)(\vartheta) = R_{-M}(\omega + \vartheta)\varphi(0) + \sum_{p=-M+1}^{0} R_p(\omega + \vartheta) g_p(\varphi), \quad \vartheta \in [-r, 0]. \tag{3.1}$$

Как видно из формулы (3.1), оператор монодромии представим в виде конечной суммы

$$(U\varphi)(\vartheta) = \sum_{p=-M}^{0} W_p(\vartheta) g_p(\varphi), \quad \vartheta \in [-r, 0],$$

где матричные функции W_p, $p = \overline{-M, 0}$, размерности $n \times n$ определяются формулами $W_p(\vartheta) = R_p(\omega + \vartheta)$, $p = \overline{-M, 0}$, а векторный функционал $g_{-M}(\varphi) = \varphi(0)$. Следовательно, оператор монодромии конечномерен.

Собственные функции оператора монодромии φ являются при некотором комплексном числе ρ нетривиальными решениями уравнения

$$(U\varphi)(\vartheta) = \sum_{k=-M}^{0} W_k(\vartheta) g_k(\varphi) = \rho\varphi(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Эти функции, отвечающие $\rho \neq 0$, можно представить в виде

$$\varphi(\vartheta) = \sum_{k=-M}^{0} W_k(\vartheta) C_k, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Пусть система матричных функций $\{W_k\}_{k=-M}^{0}$ линейно независима. Тогда характеристическое уравнение для оператора монодромии имеет вид

$$\det \|g_k(W_m) - \delta_{km}\lambda\|_{-M}^{0} = 0, \tag{3.2}$$

где δ_{kp}, $\quad k, p = \overline{-M, 0}$, - символ Кронекера.

Находим значения функционалов

$$g_k(W_{-M}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s) W_{-M}(s) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s)[I_n + \sum_{m=1}^{N-1} B_m(\omega+s) \sum_{m=1}^{N-1} S_{km} f_k(I_n)] =$$

$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s) I_n + \sum_{m=1}^{N-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_k(s) B_m(\omega + s) \sum_{m=1}^{N-1} S_{km} f_k(I_n), \quad k = \overline{-M, 0}.$$

Введём обозначение $\tilde{B}_m(s) = B_m(\omega + s)$, $m = \overline{-M, N-1}$, $s \in [-r, 0]$. Тогда

$$g_k(W_{-M}) = g_k(I_n) + \sum_{m=1}^{N} g_k(\tilde{B}_m) \sum_{m=1}^{N} S_{km} f_k(I_n), \quad k = \overline{-M, 0}.$$

Аналогично рассуждая, получим

$$g_k(W_p) = g_k(\tilde{B}_p) + \sum_{m=1}^{N} g_k(\tilde{B}_m) \sum_{m=1}^{N} S_{km} f_k(I_n), \quad p = \overline{-M+1, 0}, \quad k = \overline{-M, 0}.$$

В случае линейно зависимой системы матричных функций $\{W_k\}_{k=-M}^{0}$ выбирается максимальная линейно независимая подсистема $\{W'_m\}_{k=-M'}^{0}$, $M' < M$. Тогда функции W_k, $k = \overline{-M+1, 0}$ можно записать в виде $W_k(\theta) = \sum_{m=-M'}^{0} W'_m(\theta) C'_{km}$, $\quad \overline{k = -M, 0}$, где C'_{km}, $(m = \overline{-M', 0},)$ – некоторые постоянные, а оператор монодромии примет вид

$$(U\varphi)(\theta) = \sum_{k=-M}^{0} \sum_{m=-M'}^{0} W'_m(\theta) C'_{km} g_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{m=-M'}^{0} W'_m(\theta) \sum_{k=-M}^{0} C'_{km} g_k(\varphi), \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Введём обозначения

$$g'_m(\varphi) = \sum_{k=-M}^{0} C'_{km} g_k(\varphi), \quad m = \overline{-M', 0}.$$

Таким образом, оператор монодромии можно записать в виде

$$(U\varphi)(\vartheta) = \sum_{k=-M'}^{0} W'_k(\vartheta) g'_k(\varphi), \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

В этом случае характеристическое уравнение примет вид

$$\det \|g_k(W'_m) - \delta_{km}\lambda\|_{-M'}^{0} = 0,$$

где δ_{kp}, $k, p = \overline{-M', 0}$, - символ Кронекера.

Для асимптотической устойчивости решения уравнения (5.1) необходимо и достаточно, чтобы собственные числа оператора монодромии по модулю были меньше единицы [1](задача Раусса-Гурвица для случая единичного круга).

4 Дискретный случай

Пусть в уравнении (2.1) функции α_k определяются формулами $\alpha_k(s) = 1(s - t_k)$, $k = \overline{-M+1, N-1}$, где $1(\cdot)$ – функция Хевисайда, непрерывная справа. Тогда уравнение (2.1) на отрезке $[0, \omega]$ примет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t) \chi_{(t_k, t_{k-1}+r]}(t) x(t_k), \tag{4.1}$$

а введённые ранее функционалы

$$g_k(\varphi) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} d1(s - t_k)\varphi(s) = \varphi(t_k), \quad k = \overline{-M+1, 0},$$

$$f_k(x) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} d1(s - t_k) x(s) = x(t_k), \quad k = \overline{1, N-1}. \tag{4.2}$$

Общее решение уравнения (4.1) запишется в виде

$$x(t,\varphi)=\sum_{p=-M+1}^{0}R_p(t)\varphi(t_p),$$

где

$$R_p(t)=B_p(t)+\sum_{m=1}^{N-1}B_m(t)\sum_{k=m}^{N-1}S_{km}B_p(t_k),\quad p=\overline{-M+1,-1},$$

$$R_0(t)=(B_0(t)+I_n)+\sum_{m=1}^{N-1}B_m(t)\sum_{k=m}^{N-1}S_{km}(B_0(t_k)+I_n).$$

Оператор монодромии в дискретном случае запишем в форме

$$(U\varphi)(\vartheta)=\sum_{s=-M+1}^{0}W_s(\vartheta)\varphi(t_s),\quad \vartheta\in[-\omega,0],$$

где

$$W_0(\vartheta)=[I_n+B_0(\omega+\vartheta)]+\sum_{m=1}^{N-1}B_m(\omega+\vartheta)\sum_{k=m}^{N-1}S_{km}[I_n+B_0(t_k)],$$

$$W_s(\vartheta)=B_s(\omega+\vartheta)+\sum_{m=1}^{N-1}B_m(\omega+\vartheta)\sum_{k=m}^{N-1}S_{km}B_s(t_k),\quad s=\overline{-M+1,-1}.$$

Характеристическое уравнение для уравнения (4.1) примет вид

$$\det\|W_s(\vartheta_k)-\delta_{ks}\lambda\|_{-M+1}^{0}=0,$$

где точки разбиения $\{\vartheta_k\}_{-M+1}^{0}$ отрезка $[-\omega,0]$ определяются формулами: $\vartheta_k=-\omega+t_k$, $k=\overline{-M+1,0}$.

5 Примеры

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка на отрезке $[0,2\pi]$

$$\dot{x}(t)=a_{-1}\cos t\chi_{(-\pi,0]}(t)\int\limits_{-2\pi}^{-\pi}\cos sx(s)ds+$$

$$+a_0\chi_{(0,\pi]}(t)\int\limits_{-\pi}^{0} x(s)ds + a_1\cos t\chi_{(\pi,2\pi]}(t)\int\limits_{0}^{\pi} 2sx(s)ds. \qquad (5.1)$$

Данное уравнение является уравнением вида (2.1) при $M = N = 2$, $r = \omega = 2\pi$, $t_k = k\pi$, $k = \overline{-1,1}$, $A_k(t) = a_k\cos(kt)$, $k = \overline{-1,1}$, $\alpha_{-1}(s) = \sin s$, $\alpha_0(s) = s$, $\alpha_1(s) = s^2$. Находим функции B_k, $k = \overline{-1,1}$,

$$B_{-1}(t) = 0, \quad B_0(t) = \begin{cases} a_0 t, & t \in (0,\pi], \\ a_0\pi, & t \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

$$B_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0,\pi], \\ a_1\sin t, & t \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

и значения функционалов f_m, $m > 0$,

$$f_1(B_{-1}) = 0, \quad f_1(B_0) = \frac{2a_0\pi^3}{3}, \quad f_1(B_1) = 0, \quad f_1(1) = \pi^2.$$

Поскольку $N - 1 = 1$, то $f_1(x) = f_1(\Phi)$.

Общее решение уравнения (5.1) имеет вид

$$x(t,\varphi) = \begin{cases} \varphi(0) + a_0 t g_0(\varphi), & t \in [0,\pi], \\ \left[1 + a_1\pi^2\sin t\right]\varphi(0) + [a_0\pi + \frac{2a_0a_1\pi^3}{3}\sin t]g_0(\varphi), & t \in (\pi, 2\pi], \end{cases} \qquad (5.2)$$

где $g_0(\varphi) = \int\limits_{-\pi}^{0}\varphi(s)ds$.

Оператор монодромии, согласно (3.1) и (5.2), запишем в форме

$$(U\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(0) + a_0(2\pi + \vartheta)g_0(\varphi), & \vartheta \in [-2\pi, -\pi], \\ \left[1 + a_1\pi^2\sin\vartheta\right]\varphi(0) + [a_0\pi + \frac{2a_0a_1\pi^3}{3}\sin\vartheta]g_0(\varphi), & \vartheta \in (-\pi, 0]. \end{cases} \qquad (5.3)$$

Функции W_p, $p = \overline{-2,0}$, входящие в представление (5.3) оператора монодромии имеют вид

$$W_{-2}(\vartheta) = \begin{cases} 1, & \vartheta \in [-2\pi, -\pi], \\ 1 + a_1\pi^2\sin\vartheta, & \vartheta \in (-\pi, 0], \end{cases}$$

$$W_{-1}(\vartheta) = 0,$$

$$W_0(\vartheta) = \begin{cases} a_0(2\pi + \vartheta)\,, & \vartheta \in [-2\pi, -\pi], \\ a_0\pi + \frac{2a_0a_1\pi^3}{3}\sin\vartheta, & \vartheta \in (-\pi, 0]. \end{cases}$$

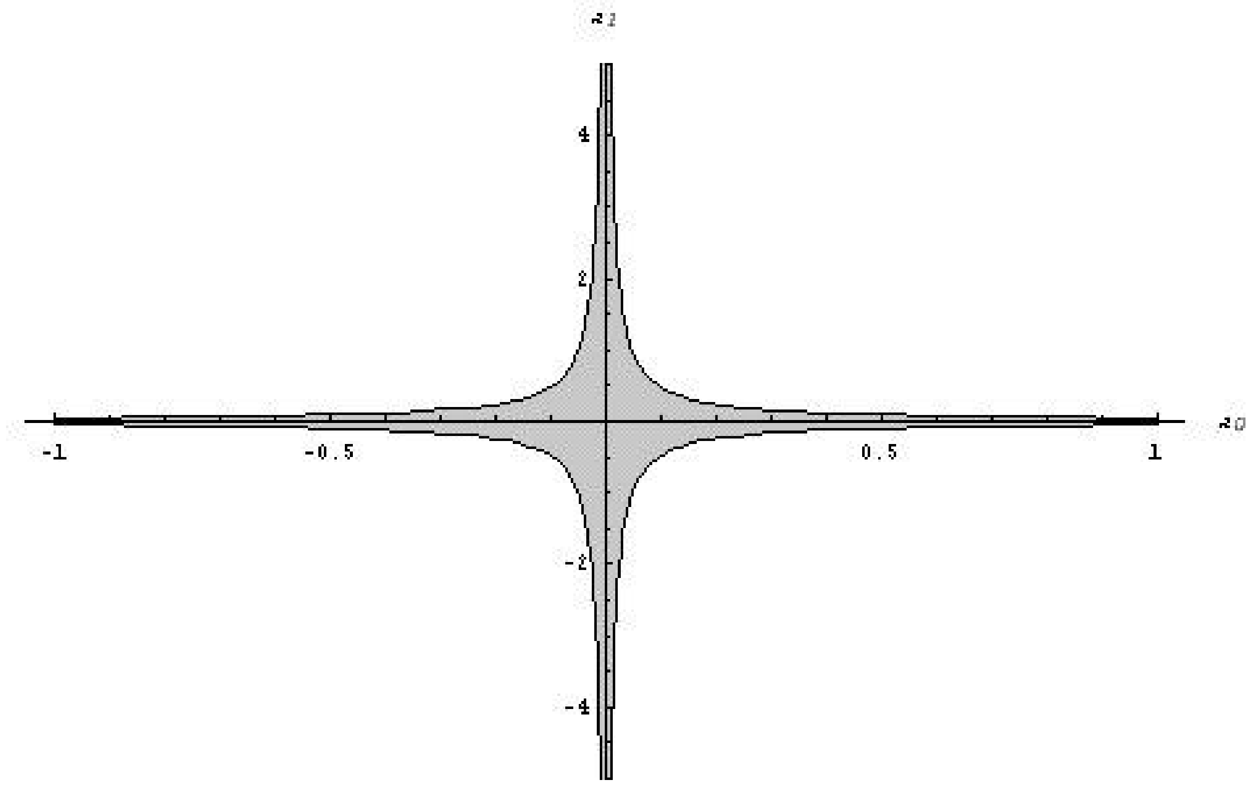

Рис. 5.1

В данном случае система функций $\{W_{-2}, W_{-1}, W_0\}$ линейно зависима. Выберем максимальную линейно независимую подсистему $\{W_{-2}, W_0\}$ и перенумеруем функции:$W'_{-1} = W_{-2}$, $W'_0 = W_0$. Тогда $g'_{-1} = g_{-2}$, $g'_0 = g_0$.

Находим значения функционалов g'_k :

$$g'_{-1}(W'_{-1}) = 1, \quad g'_{-1}(W'_0) = a_0\pi,$$

$$g'_0(W'_{-1}) = \pi(1 - 2a_1\pi), \quad g'_0(W'_0) = a_0\pi^2(1 - \frac{4a_1\pi}{3}).$$

Составим характеристическое уравнение (3.2)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \pi(1-2a_1\pi) \\ a_0\pi & a_0\pi^2(1-\frac{4a_1\pi}{3}) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные числа оператора монодромии имеют вид

$$\lambda = \frac{1}{6}\left(3 + a_0\pi^2(3 - 4a_1\pi) \pm \sqrt{(a_0\pi^2(4a_1\pi - 3) - 3)^2 - 24a_0a_1\pi^3}\right).$$

В рассматриваемом случае условие устойчивости решения имеет вид

$$|a_0a_1| < \frac{3}{2\pi^3}. \tag{5.4}$$

Область устойчивости решений уравнения (5.1) показана на рис. 5.1.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\dot{x}(t) = a_{-1}\cos(-t)\chi_{(-\pi,0]}(t)\varphi(-\pi) + a_0\sin t\chi_{(0,\pi]}(t)x(0) + a_1t\chi_{(\pi,2\pi]}(t)x(\pi). \tag{5.5}$$

Данное уравнение является уравнением вида (4.1) при $M = N = 2$, $r = \omega = 2\pi$, $t_{-k} = k\pi$, $k = \overline{-1, 1}$, $A_{-1}(t) = a_{-1}\cos t$, $A_0(t) = a_0\sin t$, $A_1(t) = a_1t$.

Находим функции B_k :

$$B_{-1}(t) = 0, \quad B_0(t) = \begin{cases} a_0\,(1 - \cos t)\,, & t \in (0, \pi], \\ 2a_0, & t \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

$$B_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, \pi], \\ \frac{a_1}{2}\left(t^2 - \pi^2\right), & t \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

и значения функционалов f_m

$$f_1(B_{-1}) = 0, \quad f_1(B_0) = 2a_0, \quad f_1(B_1) = 0.$$

Находим функции W_p, $p = -1, 0$:

$$W_{-1}(\vartheta) \equiv 0,$$

$$W_0(\vartheta) = \begin{cases} 1 + a_0(1 - \cos\vartheta)\,, & \vartheta \in [-2\pi, -\pi], \\ (1 + 2a_0)(1 + \frac{a_1}{2}[(2\pi + \vartheta)^2 - \pi^2]), & \vartheta \in (-\pi, 0]. \end{cases}$$

Находим функционал $g_0(W_0) = W_0(\vartheta_0) = (1 + 2a_0)(1 + \frac{3}{2}a_1\pi^2)$.

Составим характеристическое уравнение, которое в данном случае примет форму

$$W_0(\vartheta_0) - \lambda = 0.$$

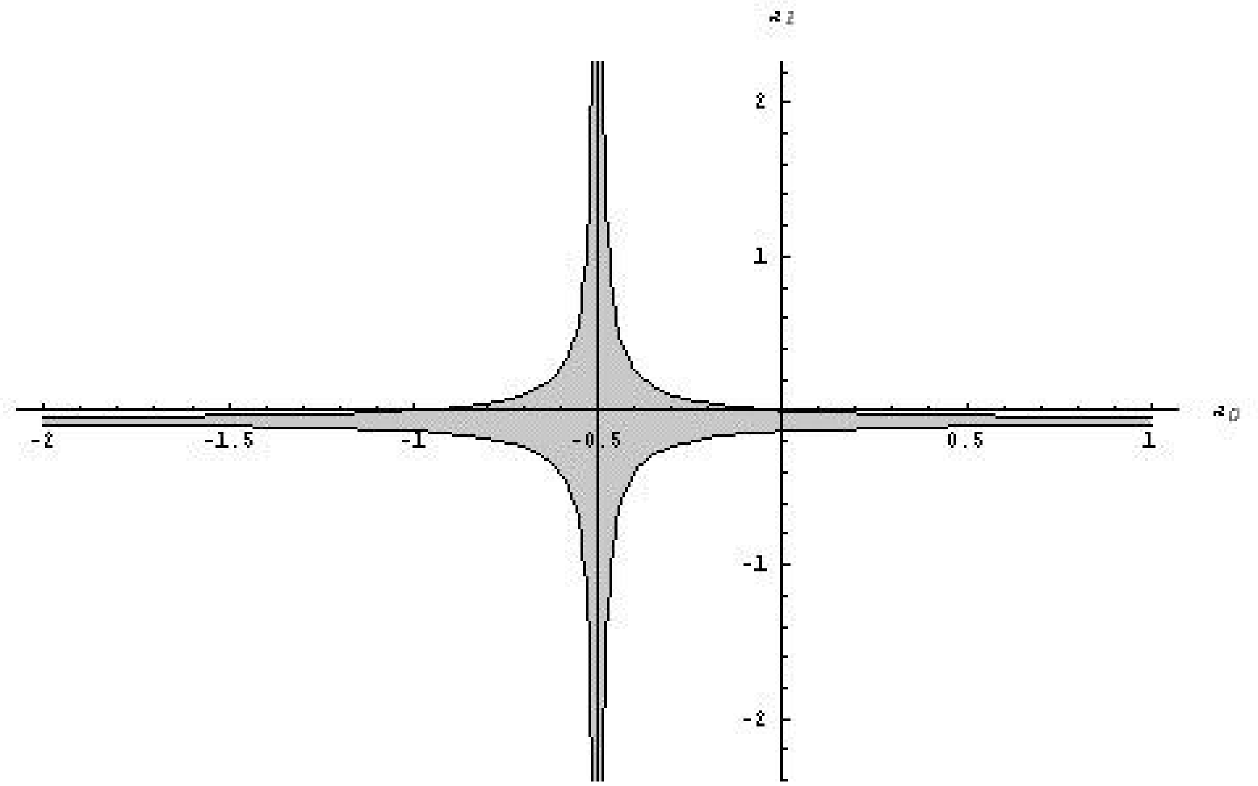

Рис. 5.2

Условие устойчивости имеет вид

$$|\lambda| = \left|(1 + 2a_0)(1 + \frac{3}{2}a_1\pi^2)\right| < 1.$$

Область устойчивости решений уравнения (5.5) показана на рис. 5.2.

6 Обобщение результатов

Перенесём результаты, полученные в данной работе на системы, которые описываются дифференциальными уравнениями следующего вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + (Fx)(t), \tag{6.1}$$

где A – ω-периодическая матричная функция размерности $n \times n$, интегрируемая по Лебегу на отрезке $[0, \omega]$, F–ω-периодический конечномерный вольтерров оператор с ограниченным последействием, описанный в п.1.

Как показано в п.1, систему (6.1) на отрезке $[0, \omega]$ можно записать в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k, t_k - r]}(t) \int_{t_{k-1}}^{t_k} d_s \alpha_k(s) x(s), \quad t \in [0, \omega], \quad (6.2)$$

где A_k, $0 < r \leq \omega$, $k = \overline{-M+1, N}$, – интегрируемые по Лебегу на отрезке $[0, \omega]$ матричные функции размерности $n \times n$, функции α_k – матричные функции размерности $n \times n$ с ограниченной вариацией на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{-M+1, N}$, $N \geq M \geq 2$.

Сделаем замену в уравнении (6.2)

$$x = X(t)\tilde{x},$$

где X – фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [0, \omega].$$

Тогда справедливо равенство

$$\dot{X}(t)\tilde{x}(t) + X(t)\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = A(t)X(t)\tilde{x}(t) +$$

$$+ \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k, t_k - r]}(t) \int_{t_{k-1}}^{t_k} d_s \alpha_k(s) X(s)\tilde{x}(s), \quad t \in [0, \omega],$$

откуда

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \sum_{k=-M+1}^{N-1} X^{-1}(t) A_k(t)\chi_{(t_k, t_k - r]}(t) \int_{t_{k-1}}^{t_k} d_s \alpha_k(s) X(s)\tilde{x}(s), \quad t \in [0, \omega].$$

Введём обозначения

$$\tilde{A}_k(t) = X^{-1}(t)A_k(t), \quad \tilde{\alpha}_k(s) = \alpha_k(s)X(s) - \int_0^s \alpha_k(z)\dot{X}(z)dz,$$

$$k = \overline{-M+1, N-1}.$$

Получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \sum_{k=-M+1}^{N-1} \tilde{A}_k(t)\chi_{(t_k, t_k - r]}(t) \int_{t_{k-1}}^{t_k} d_s \tilde{\alpha}_k(s)\tilde{x}(s), \quad t \in [0, \omega], \quad (6.3)$$

рассмотренную в пунктах 1-4.

Мы показали, что исследование решений системы дифференциальных уравнений (6.1) сводится к исследованию решений системы (2.1). Согласно (2.5) общее решение системы (6.3) запишется в виде

$$\tilde{x}(t,\tilde{\varphi}) = \tilde{R}_{-M}(t)\tilde{\varphi}(0) + \sum_{p=-M+1}^{0} \tilde{R}_p(t)\tilde{g}_p(\tilde{\varphi}), \quad t \in [0,\omega],$$

где

$$\tilde{R}_{-M}(t) = I_n + \sum_{m=1}^{N-1} \tilde{B}_m(t) \sum_{k=m}^{N-1} S_{km}\tilde{f}_k(I_n),$$

$$\tilde{R}_p(t) = \tilde{B}_p(t) + \sum_{m=1}^{N-1} \tilde{B}_m(t) \sum_{k=m}^{N-1} S_{km}\tilde{f}_k(\tilde{B}_p), \quad p = \overline{-M+1,0},$$

$$\tilde{B}_k(t) = \int_0^t \tilde{A}_k(s)\chi_{(t_k,t_k-r]}(s)ds, \quad k = \overline{-M+1,N-1}, \quad t \in [0,\omega].$$

Функционалы $\tilde{f}_k$, $k = \overline{1,N-1}$, $\tilde{g}_p$, $p = \overline{-M+1,0}$, выразим через исходные функции, учитывая, что $\varphi(t) = X(t)\tilde{\varphi}(t)$, то есть $\tilde{\varphi}(t) = X^{-1}(t)\varphi(t)$:

$$\tilde{f}_k(I_n) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} d_s\tilde{\alpha}_k(s) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} d_s\alpha_k(s)X(s) = f_k(X),$$

$$\tilde{f}_k(\tilde{B}_p) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} d_s\alpha_k(s)X(s)\tilde{B}_p(s) =$$

$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k} d_s\alpha_k(s)X(s)\int_0^s X^{-1}(z)A_k(z)\chi_{(t_k,t_k-r]}(z)dz,$$

$$\tilde{g}_p(\tilde{\varphi}) = \int_{t_{p-1}}^{t_p} d_s\tilde{\alpha}_p(s)\tilde{\varphi}(s) =$$

$$= \int_{t_{p-1}}^{t_p} d_s\alpha_p(s)X(s)X^{-1}(s)\varphi(s) = \int_{t_{p-1}}^{t_p} d_s\alpha_p(s)\varphi(s) = g_p(\varphi),$$

$$k = \overline{1,N-1}, \quad p = \overline{-M+1,0}.$$

Возвращаясь к исходным функциям, получим общее решение системы (6.2)

$$x(t,\varphi) = X(t)\tilde{x}(t,\tilde{\varphi}) =$$
$$= X(t)\tilde{R}_{-M}(t)X^{-1}(0)\varphi(0) + \sum_{p=-M+1}^{0} X(t)\tilde{R}_p(t)g_p(\varphi), \quad t \in [0,\omega].$$

Аналогично формуле (2.5), обозначим

$$R_{-M}(t) = X(t)\tilde{R}_{-M}(t)X^{-1}(0) = X(t)\left[I_n + \sum_{m=1}^{N-1}\tilde{B}_m(t)\sum_{k=m}^{N-1}S_{km}f_k(X)\right]X^{-1}(0),$$

$$R_p(t) = X(t)\tilde{R}_p(t) = X(t)\left[\tilde{B}_p(t) + \sum_{m=1}^{N-1}\tilde{B}_m(t)\sum_{k=m}^{N-1}S_{km}\tilde{f}_k(\tilde{B}_p)\right], \ p = \overline{-M+1,0}. \tag{6.4}$$

Таким образом, решение уравнения (6.2) на отрезке $[0,\omega]$ записывается в виде

$$x(t,\varphi) = R_{-M}(t)\varphi(0) + \sum_{p=-M+1}^{0} R_p(t)g_p(\varphi), \quad t \in [0,\omega].$$

Рассмотрим частный случай уравнения (6.2) при $\alpha_k(\cdot) = 1(\cdot - t_k)$, $k = \overline{-M+1, N-1}$. Тогда уравнение (6.2) примет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k(t)\chi_{(t_k,t_k-r]}(t)x(t_k), \quad t \in [0,\omega], \tag{6.5}$$

Общее решение уравнения (6.5) на отрезке $[0,\omega]$ имеет вид

$$x(t,\varphi) = \sum_{p=-M+1}^{0} R_p(t)\varphi(t_p), \quad t \in [0,\omega],$$

где

$$R_p(t) = X(t)\left[\tilde{B}_p(t) + \sum_{m=1}^{N-1}\tilde{B}_m(t)\sum_{k=m}^{N-1}S_{km}\tilde{B}_p(t_k)\right], \quad p = \overline{-M+1,0}, \tag{6.6}$$

$$R_0(t) = X(t)\left[(\tilde{B}_0(t) + I_n) + \sum_{m=1}^{N-1}\tilde{B}_m(t)\sum_{k=m}^{N-1}S_{km}(\tilde{B}_0(t_k) + I_n)\right].$$

Построение оператора монодромии, характеристического уравнения, а также исследование устойчивости решений уравнения (6.1) производится аналогично уравнению (2.1) и описано в пп.3–4.

7 Импульсные системы

Рассмотрим импульсную систему, состоящую из амплитудно-импульсного элемента АИЭ и непрерывной части, описываемой дифференциальным уравнением ДУ (см рис. 7.1).

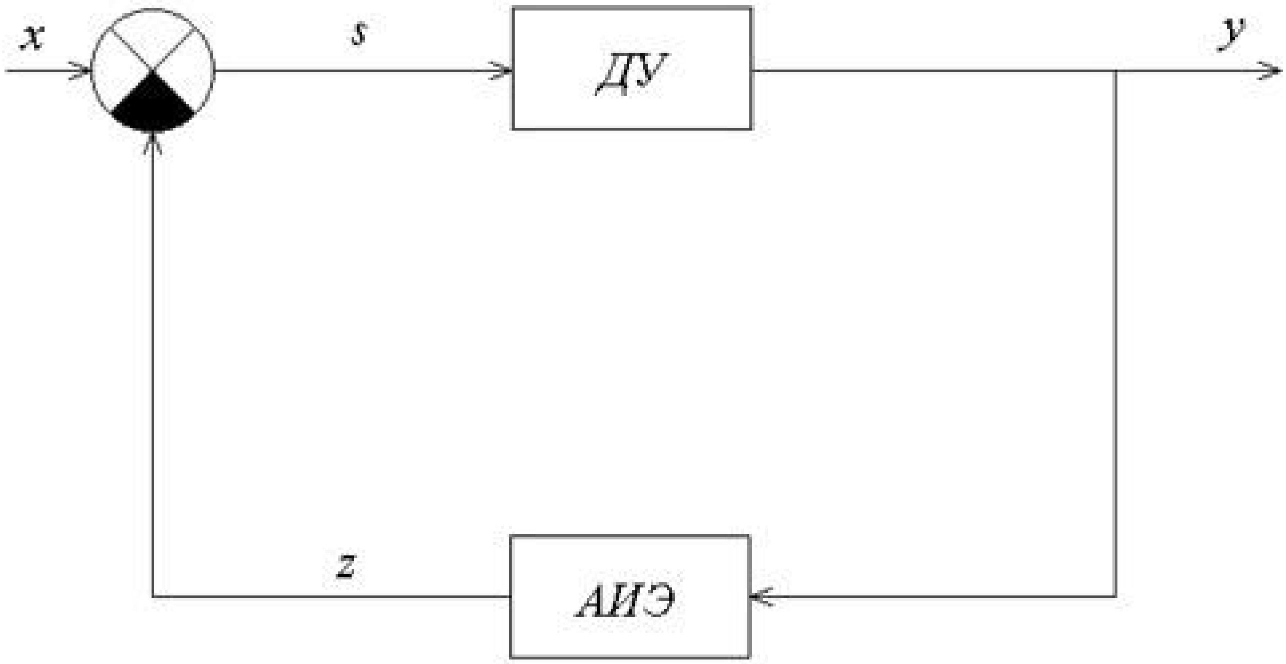

Рис. 7.1

Здесь x, y–входной и выходной сигналы системы, s–сигнал на входе непрерывной части системы, z–выходной сигнал амплитудно-импульсного элемента, определяемый формулами

$$z\left(t\right)=m\left(t\right)y\left(kT\right),\quad kT<t\leq\left(k+1\right)T,\quad k\in N, \tag{7.1}$$

где m–непрерывная T-периодическая функция.

Зададим передаточную функцию непрерывной части формулой

$$\Phi(p)=(\sum_{j=0}^{n}a_jp^j)^{-1},\quad a_n=1. \tag{7.2}$$

Импульсная система описывается линейным дифференциальным уравнением следующего вида

$$\sum_{j=0}^{n}a_jy^{(j)}(t)=x(t)-m(t)y(kT),\quad kT<t\leq(k+1)T.$$

Если отсутствует входной сигнал ($x = 0$), то поведение импульсной системы определяется уравнением

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}(t) + m(t)y(kT) = 0, \quad t \in (kT, (k+1)\,T]\,. \tag{7.3}$$

Введём новые переменные

$$y_1 = y, \quad y_2 = \dot{y}, \quad y_3 = \ddot{y}_1, \quad ..., \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{gathered} \dot{y}_1(t) = y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = y_3(t), \\ ... \\ \dot{y}_n(t) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} y_j(t) - m(t)y_1(kT), \quad t \in (kT, (k+1)T]. \end{gathered} \tag{7.4}$$

Введём вектор Y и матрицы A, $A_1(t)$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ -m(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

В векторной форме система (7.4) имеет вид

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + A_1 Y(kT), \quad kT < t \leq (k+1)\,T, \quad k \in N. \tag{7.5}$$

Система (7.5) принадлежит классу систем, рассматриваемых в п.6. Запишем сужение этой системы на полуинтервал $(0, T]$.

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + A_1(t)Y(0). \tag{7.6}$$

Согласно формуле (6.6) общее решение уравнения (7.6) на отрезке $[0, T]$ имеет вид

$$Y(t) = R_0(t)Y(0), \quad t \in [0, T],$$

где

$$R_0(t) = X(t)\left[\tilde{B}_0(t) + I_n\right].$$

Поскольку фундаментальная матрица X однородной системы дифференциальных уравнений $\dot{Y}(t) = AY(t)$ имеет вид $X(t) = e^{At}$, матричная функция $\tilde{B}_0$ представляется формулой

$$\tilde{B}_0(t) = \int_0^t e^{-As} A_1(s) ds.$$

Окончательно получаем

$$R_0(t) = e^{At}\left[\int_0^t e^{-As} A_1(s) ds + I_n\right], \quad t \in [0, T].$$

Оператор монодромии для уравнения (7.5) имеет вид

$$(U\varphi)(\vartheta) = W_0(\vartheta)Y(0), \quad \vartheta \in [-T, 0],$$

где

$$W_0(\vartheta) = R_0(T+\vartheta) = e^{A(T+\vartheta)}\left[\int_0^{T+\vartheta} e^{-As} A_1(s) ds + I_n\right], \ \vartheta \in [-T, 0]. \quad (7.7)$$

Характеристическое уравнение для оператора монодромии записывается в виде

$$\det |W_0(0) - \lambda I_n| = 0. \quad (7.8)$$

Пример 3. Рассмотрим импульсную систему с отрицательной обратной связью при передаточной функции $\Phi(D) = (a + D)^{-1}$ и функции $m(t) = b \sin \frac{2\pi t}{T}$, $T > 0$.

Уравнение (7.3) примет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = -b \sin \frac{2\pi t}{T} y(kT), t \in (kT, (k+1)T]. \quad (7.9)$$

Полученное уравнение соответствует уравнению (7.5) в скалярном случае при $A = -a$, $A_1(t) = -b \sin \frac{2\pi t}{T}$. В этом случае функция $\tilde{B}(t)$ имеет вид

$$\tilde{B}(t) = -\frac{b}{a^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\left[e^{at}\left(a \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\right],$$

а функция $R_0(t)$–

$$R_0(t) = -\frac{b}{a^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\left[a\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi}{T}e^{-at}\right] + e^{-at}.$$

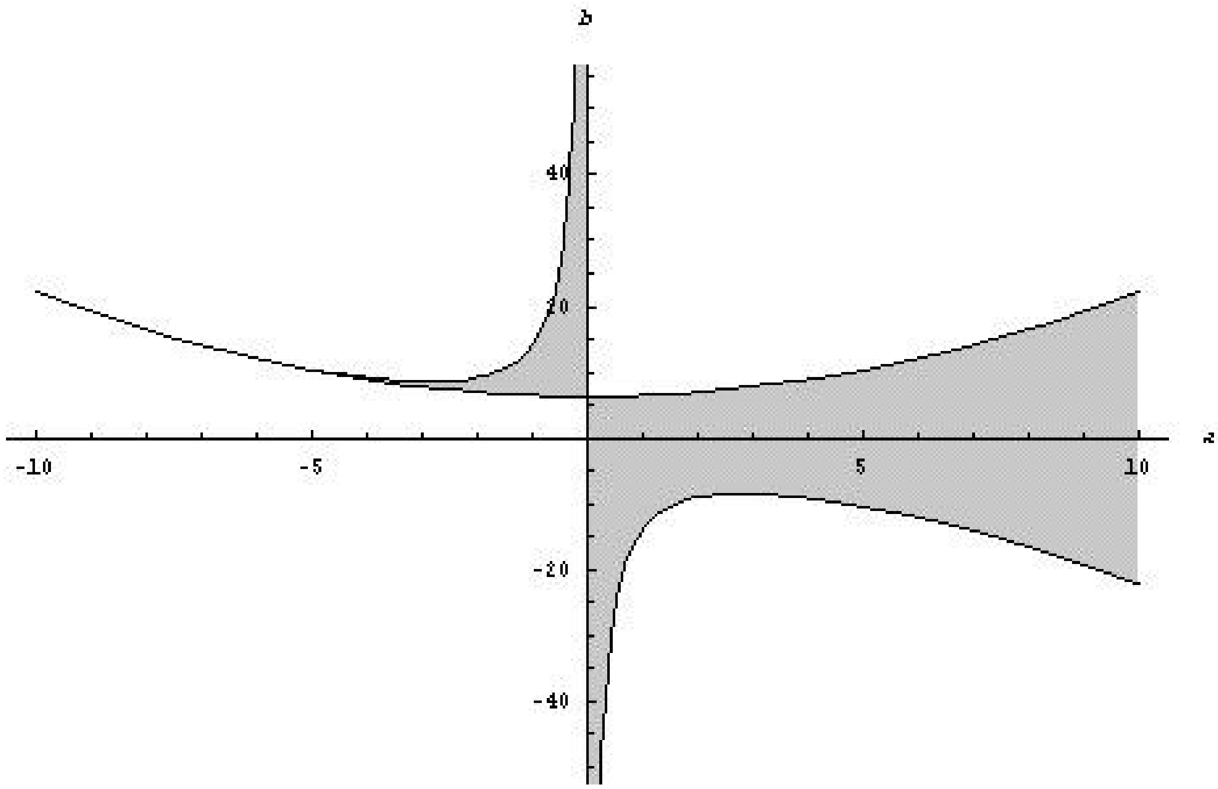

Рис. 7.2

Оператор монодромии для уравнения (7.9) имеет вид

$$\left(U\varphi\right)(\vartheta) = W_0(\vartheta)y(0), \quad \vartheta \in [-T, 0],$$

где

$$W_0(\vartheta) = e^{-a(T+\vartheta)} - \frac{b}{a^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\left[a\sin\frac{2\pi\vartheta}{T} - \frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi\vartheta}{T} + \frac{2\pi}{T}e^{-a(T+\vartheta)}\right],$$

$$\vartheta \in [-T, 0].$$

Характеристическое уравнение (7.8) примет вид $W_0(0) - \lambda = 0$. Следовательно, собственное значение оператора монодромии

$$\lambda = W_0(0) = e^{-aT} + \frac{b}{a^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\frac{2\pi}{T}\left[1 - e^{-aT}\right].$$

Для асимптотической устойчивости решения уравнения (7.9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|W_0(0)| < 1$. Таким образом, критерием асимптотической устойчивости решения уравнения (7.9) является выполнение неравенств:
при $a > 0$

$$\frac{T}{2\pi}\frac{e^{-aT}+1}{e^{-aT}-1}\left[a^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right] < b < \frac{T}{2\pi}\left[a^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right],$$

при $a < 0$

$$\frac{T}{2\pi}\left[a^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right] < b < \frac{T}{2\pi}\frac{e^{-aT}+1}{e^{-aT}-1}\left[a^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right].$$

Область устойчивости решения уравнения (7.9) при $T = 1$ показана на рис. 7.2. Область устойчивости решения уравнения (7.9) можно найти, используя известные методы теории импульсных систем[4].

Литература

[1] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

[2] Cooke K.L., Wiener J. Retarded differential equations with piecewise constant delays // J. Math. Anal. and Appl. 1984. V.93. P.265-297.

[3] Cooke K.L., Turi J., Turner G. Stabilization of hybrid systems in the presense of feedback delays // USA Institute for Mathematics and Its Applications. Preprint Series. #906. 1991. 15p.

[4] Цыпкин.Я.З. Теория импульсных систем. М.: Физматгиз, 1959.

[5] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.:Мир, 1971.

[6] Долгий Ю.Ф. Характеристическое уравнение в задаче устойчивости периодических систем с последействием // Изв. Урал. гос. ун-та. 1988. №10. (Математика и механика. Вып. 1) С.34-43.

[7] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

[8] Долгий Ю.Ф. Устойчивость периодических дифференциально - разностных уравнений. Свердловск: УрГУ, 1996.

[9] Долгий Ю.Ф., Тарасян В.С. Конечномерные операторы монодромии для периодических систем дифференциальных уравнений с последействием // Изв. Урал. гос. ун-та. 2000. №18. (Математика и механика. Вып. 3) С.67-83.

[10] Тихонов А.Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применении к некоторым задачам математической физики // Бюл. МГУ. Сек. А. 1938. Т.1, №8. С.1-25.

[11] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.:Мир, 1962.

[12] Шиманов С.Н. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Свердловск: УрГУ, 1982.

[13] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.:Мир, 1979