ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2003
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

РЕДУКЦИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ АПРИОРНОЙ СИММЕТРИИ

Я.В.Делюкова

факультет математики
Уссурийский государственный университет
692512, Уссурийск, Россия

Аннотация

Рассматриваются проблемы редукции и решения нелинейных определяющих систем дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих при поиске дискретных групп преобразований, нелокальных симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений, а также неклассических симметрий нелинейных уравнений математической физики. Доказывается, что при наличии априорной симметрии исследуемого класса уравнений D размерность системы может быть понижена.

1 Введение

Как известно [1], при использовании регулярного алгоритма поиске дискретной метагруппы преобразований (ДМП), допускаемой классом обыкновенных дифференциальных уравнений, возникают нелинейные определяющие системы (в противоположность линейным системам, возникающим при поиске локальных непрерывных групп преобразований). Эти системы состоят из сравнимых друг с другом по сложности уравнений с частными производными, поэтому, как правило, не удается найти все решения определяющей системы. Оказывается, что наличие непрерывной симметрии уравнений изучаемого класса значительно облегчает поиск ДМП, позволяя при этом находить максимально широкую дискретную метагруппу [2].

Аналогичная задача возникает при поиске нелокальных операторов, допускаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, а также при поиске неклассических симметрий нелинейных уравнений математической физики (см., например, [3, 4, 5]). В обоих этих случаях дополнительная искомая функция входит в уравнения системы нелинейно, что существенно затрудняет их решение.

В настоящей работе применение предлагаемого метода рассматривается на примере поиска дискретных симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений.

2 ДМП в классе точечных преобразований

Рассмотрим класс

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}(\bar{a}) \tag{1}$$

обыкновенных дифференциальных уравнений, основная алгебра Ли которых имеет размерность $r = 1$ и базис $X_{\bar{a}}$ ($\bar{a}$ – вектор существенных параметров).

Лемма. Определяющее уравнение для поиска точечной дискретной метагруппы преобразований

$$G : \{g : \mathrm{D}(\bar{a}) \to \mathrm{D}(\bar{b})\},$$

допускаемой классом (1), записывается в инвариантах базисного оператора $X_{\bar{b}}$.

Доказательство проведем для класса ОДУ второго порядка, так как для уравнений порядка выше второго доказательство совершенно аналогично при гораздо более громоздкой записи. Наличие одномерной основной алгебры позволяет конкретизировать вид преобразований, составляющих ДМП, допускаемую классом D (1). А именно, всякое точечное преобразование, переводящее уравнение

$$y'' = F(x, y, y', \bar{a}) \tag{2}$$

класса D в уравнение

$$\ddot{u} = F(t, u, \dot{u}, \bar{b}) \tag{3}$$

того же класса, должно переводить оператор $X_{\bar{a}} = \xi_{\bar{a}}\partial_x + \eta_{\bar{a}}\partial_y$ в оператор $pX_{\bar{b}} = p(\xi_{\bar{b}}\partial_t + \eta_{\bar{b}}\partial_u)$ алгебры Ли, допускаемой уравнением (3), где $p \neq 0$ – некоторая постоянная. Используя известную формулу преобразования оператора при замене переменных, находим, что элементы ДМП следует искать среди преобразований вида

$$\begin{cases} x = & g(t, \Phi(J), \Psi(J)) = & g_1(t, u), \\ y = & f(t, \Phi(J), \Psi(J)) = & f_1(t, u), \end{cases} \tag{4}$$

которые получаются как решения следующей системы уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{cases} \xi_{\bar{b}}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \eta_{\bar{b}}\dfrac{\partial x}{\partial u} = & \dfrac{1}{p}\xi_{\bar{a}}, \\ \xi_{\bar{b}}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \eta_{\bar{b}}\dfrac{\partial y}{\partial u} = & \dfrac{1}{p}\eta_{\bar{a}}, \end{cases} \tag{5}$$

где $J = J(t, u)$ – инвариант оператора $X_{\bar{b}}$, $\Phi(J), \Psi(J)$ – произвольные функции. Выполним в уравнении (2) подстановку (4):

$$\begin{gathered} \ddot{u} = \frac{1}{(g_t f_u - f_t g_u)} \left\{ (g_t + g_u \dot{u})^3 F\left(g, f, \frac{f_t + f_u \dot{u}}{g_t + g_u \dot{u}}, \bar{a}\right) - \right. \\ - (g_u f_{uu} - f_u g_{uu})\dot{u}^3 - (g_t f_{uu} - f_t g_{uu} + 2g_u f_{tu} - 2f_u g_{tu})\dot{u}^2 - \\ \left. - (g_u f_{tt} - f_u g_{tt} + 2g_t f_{tu} - 2f_t g_{tu})\dot{u} - (g_t f_{tt} + f_t g_{tt}) \right\}, \end{gathered} \tag{6}$$

где f_t, g_t, f_u, g_u, $\ldots$ – частные производные сложных функций. Уравнение (6) с произвольными функциями Φ, Ψ (которые, очевидно, содержатся в (6) вместе с производными до второго порядка включительно) по построению допускает оператор $X_{\bar{b}}$, а значит, может быть равносильными образом записано через дифференциальные инварианты (нулевого J, первого J_1 и второго $\frac{dJ_1}{dJ}$ порядков включительно):

$$\frac{dJ_1}{dJ} = V(J, J_1, \Phi', \Psi', \Phi'', \Psi'', \bar{a}). \tag{7}$$

Точно также уравнение (3) может быть представлено в переменных $J,\ J_1$:

$$\frac{dJ_1}{dJ} = W(J, J_1, \bar{b}). \tag{8}$$

Определяющее уравнение получают подстановкой в (6) правой части уравнения (3), что, очевидно, равносильно подстановке в (7) правой части уравнения (8):

$$W(J, J_1, \bar{b}) = V(J, J_1, \Phi', \Psi', \Phi'', \Psi'', \bar{a}). \tag{9}$$

Дифференциальное выражение (8) представляет собой определяющее уравнение для поиска ДМП с неизвестными $\Phi,\ \Psi$, записанное в инвариантах оператора $X_{\bar{b}}$.

Все приведенные рассуждения распространяются на уравнения произвольного порядка $n > 2$.

Замечание. Утверждение леммы остается справедливым, если алгебра Ли, допускаемая уравнениями класса D, имеет размерность $r > 1$.

Действительно, пусть класс D допускает основную алгебру Ли размерности $r > 1$ с базисными операторами

$$X^1_{\bar{a}},\ X^2_{\bar{a}},\ \ldots\ , X^r_{\bar{a}}. \tag{10}$$

Под действием любого элемента g точечной ДМП G каждый базисный оператор перейдет в оператор алгебры Ли преобразованного уравнения. Поэтому достаточно зафиксировать некоторый $X^i_{\bar{a}},\ 1 \leqslant i \leqslant r$ и для него предположить

$$X^i_{\bar{a}} \to Y = \sum_{k=1}^{r} p_k X^k_{\bar{b}},$$

с неопределенными коэффициентами p_k. Производя построения, описанные при доказательстве леммы, получим определяющее уравнение с неизвестными $\Phi,\ \Psi$, записанное в инвариантах оператора $X^i_{\bar{a}}$. В силу произвольности $X^i_{\bar{a}}$ заключаем, что определяющее уравнение может быть записано в инвариантах любого из операторов (10).

Теорема 1. Размерность определяющего уравнения для поиска точечной дискретной метагруппы преобразований, допускаемой классом обыкновенных дифференциальных уравнений D, алгебра Ли которых r-мерна ($r > 0$), может быть понижена на единицу.

Доказательство следует из доказательства леммы: при записи определяющего уравнения в инвариантах допускаемого оператора число независимых переменных уменьшается на единицу. Тем самым теорема доказана.

Следствие. Поиск точечной дискретной метагруппы преобразований, допускаемой классом обыкновенных дифференциальных уравнений D, сводится к решению переопределенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, если уравнения класса D допускают основную алгебру Ли операторов размерности $r > 0$.

Доказательство. Поскольку в определяющее уравнение (9) войдут переменные $J_1, J_2, \ldots, J_{(n-1)}, (n \geqslant 2)$, от которых искомые функции Φ, Ψ не зависят, уравнение (9) будет "расщепляться" на несколько уравнений, становясь переопределенной системой ОДУ для Φ, Ψ.

3 ДГП в классе преобразований Беклунда

Теорема 2. Определяющее уравнение для поиска допускаемой классом (1) дискретной метагруппы преобразований

$$G : \{g : \mathrm{D}(\bar{a}) \to \mathrm{D}(\bar{b})\},$$

порожденной преобразованиями Беклунда, сохраняющими точечную структуру операторов алгебры Ли уравнений рассматриваемого класса, записывается в инвариантах оператора $X_{\bar{b}}$, при этом размерность определяющего уравнения уменьшается на единицу.

Доказательство проведем для класса D ОДУ второго порядка, так как для уравнений порядка выше второго доказательство совершенно аналогично при гораздо более громоздкой записи. Свойство инвариантности уравнения относительно однопараметрической группы не зависит от выбора переменных, поэтому преобразование Беклунда класса P_1, переводящее уравнение класса D

$$y'' = F(x, y, y', \bar{a}) \tag{11}$$

в уравнение того же класса

$$\ddot{u} = F(t, u, \dot{u}, \bar{b}) \tag{12}$$

должно переводить оператор $X_{\bar{a}}$, допускаемый уравнением (11), в оператор алгебры Ли уравнения (12), т.е. в оператор $pX_{\bar{b}} = p(\xi_{\bar{b}}\partial_t + \eta_{\bar{b}}\partial_u)$, $p \neq 0$ – некоторая постоянная. Используя известную формулу преобразования оператора при замене переменных, находим, что элементы ДМП следует искать среди решений следующей системы

$$\begin{cases} \xi_{\bar b}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\eta_{\bar b}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\zeta_{\bar b}\dfrac{\partial x}{\partial \dot u}= & \dfrac{1}{p}\xi_{\bar a}, \\ \xi_{\bar b}\dfrac{\partial y}{\partial t}+\eta_{\bar b}\dfrac{\partial y}{\partial u}+\zeta_{\bar b}\dfrac{\partial y}{\partial \dot u}= & \dfrac{1}{p}\eta_{\bar a}, \end{cases}$$

где $\zeta_{\bar b}=(\eta_{\bar b})_t+\left[(\eta_{\bar b})_u-(\xi_{\bar b})_t\right]\dot u-(\xi_{\bar b})_u\dot u^2$. Отсюда находим

$$\begin{cases} x= & g(t,\Phi(J,J_1),\Psi(J,J_1))= & g_1(t,u,\dot u), \\ y= & f(t,\Phi(J,J_1),\Psi(J,J_1))= & f_1(t,u,\dot u), \end{cases} \tag{13}$$

где $J=J(t,u)$, $J_1=J_1(t,u,\dot u)$ – дифференциальные инварианты нулевого и первого порядков оператора $X_{\bar b}$, Φ, Ψ – произвольные функции.

Выполним в уравнении (11) подстановку (13):

$$\frac{d\ddot u}{dt}=$$
$$=\left[f_{\dot u}(g_t+g_u\dot u)-g_{\dot u}(f_t+f_u\dot u)\right]^{-1}\left\{F\left(g,f,\frac{f_t+f_u\dot u+f_{\dot u}\ddot u}{g_t+g_u\dot u+g_{\dot u}\ddot u}\right)(g_t+g_u\dot u+g_{\dot u}\ddot u)^3-\right.$$
$$-(g_t+g_u\dot u+g_{\dot u}\ddot u)\left[f_{tt}+2f_{tu}\dot u+f_{uu}\dot u^2+(f_u+2f_{t\dot u})\ddot u+2f_{u\dot u}\dot u\ddot u+f_{\dot u\dot u}\ddot u^2\right]+$$
$$\left.+(f_t+f_u\dot u+f_{\dot u}\ddot u)\left[g_{tt}+2g_{tu}\dot u+g_{uu}\dot u^2+(g_u+2g_{t\dot u})\ddot u+2g_{u\dot u}\dot u\ddot u+g_{\dot u}\dot u\ddot u^2\right]\right\}, \tag{14}$$

где f_t, g_t, f_u, g_u, ... – частные производные сложных функций.

По построению уравнение (14) с произвольными функциями Φ, Ψ (которые, очевидно, войдут в (14) вместе со своими частными производными до второго порядка включительно) допускает оператор $X_{\bar b}$, поэтому оно может быть равносильным образом записано в инвариантах оператора $X_{\bar b}$:

$$\frac{d^2J_1}{dJ^2}=V\left(J,J_1,\frac{dJ_1}{dJ},\frac{\partial\Phi}{\partial J},\frac{\partial\Phi}{\partial J_1},\frac{\partial\Psi}{\partial J},\frac{\partial\Psi}{\partial J_1},\frac{\partial^2\Phi}{\partial J^2},\frac{\partial^2\Phi}{\partial J_1^2},\frac{\partial^2\Psi}{\partial J^2},\frac{\partial^2\Psi}{\partial J_1^2},\bar a\right). \tag{15}$$

Аналогично уравнение (12) может быть равносильным образом записано:

$$\frac{dJ_1}{dJ}=W(J,J_1,\bar b) \tag{16}$$

Определяющее уравнение получают подстановкой в уравнение (14) правой части уравнения (12), что, очевидно, равносильно подстановке в уравнение (15) правой части уравнения (16):

$$W_J(J, J_1, \bar{b}) + W(J, J_1, \bar{b}) W_{J_1}(J, J_1, \bar{b}) =$$
$$= V\left(J, J_1, \frac{dJ_1}{dJ}, \frac{\partial\Phi}{\partial J}, \frac{\partial\Phi}{\partial J_1}, \frac{\partial\Psi}{\partial J}, \frac{\partial\Psi}{\partial J_1}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial J^2}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial J_1^2}, \frac{\partial^2\Psi}{\partial J^2}, \frac{\partial^2\Psi}{\partial J_1^2}, \bar{a}\right).$$

Таким образом, показано, что определяющее уравнение записывается в инвариантах допускаемого оператора (неизвестными здесь являются функции Φ, Ψ), при этом его размерность автоматически уменьшается на единицу.

Все приведенные рассуждения можно распространить на уравнение порядка $n > 2$. Теорема доказана.

Замечание. Утверждение теоремы остается справедливым для класса D ОДУ, допускающих алгебру Ли размерности $r > 1$.

Литература

[1] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993.

[2] Делюкова Я.В., Зайцев В.Ф. О максимальности дискретных групп преобразований // Межведомственный сборник “Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики”. – М.: МФТИ, 1997. – С.64-72.

[3] A.C.Newell, J.A.Whitehead. Finite bandwidth, finite amplitude convection, J. Fluid Mech., 38 (1969), P.279-303.

[4] M.C.Nucci, P.A.Clarkson. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh-Nagumo equation // Phys. Lett. A 164 (1992), P.49-56.

[5] P.J.Olver, Ph.Rosenau. Group-invariant solutions of differential equations // SIAM J. Appl. Math. 47 №.2 (1987), P.263-278.