ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2003
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ДВУМЕРНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ

В.Г.Волков

Россия, 450000, Уфа, ул. Октябрьской Революции, д. 3-А,
Башкирский государственный педагогический университет,
кафедра теоретической физики,
e-mail: theorphys@bspu.ru

Аннотация.

В работе рассмотрены двумерные подалгебры из оптимальной системы алгебры Ли L_{13}, допускаемой уравнениями газовой динамики. Для них вычислены инварианты и построены инвариантные подмодели, которые приведены к одному из двух канонических типов: эволюционному либо стационарному.

1 Введение

Дифференциальные уравнения газовой динамики (УГД)

$$D = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

$$D\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0,$$

$$D\rho + \rho \mathrm{div} \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$DS = 0,$$

где $\mathbf{u}$ — скорость, ρ — плотность, p — давление, S — энтропия, с уравнением состояния $p = f(\rho, S)$ допускают 11-ти параметрическую алгебру Ли L_{11} операторов. В декартовой системе координат (D) базис L_{11} имеет вид [1, см. также 2]:

$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z, X_4 = t\partial_x + \partial_u,\ X_5 = t\partial_y + \partial_v,$

$X_6 = t\partial_z + \partial_w,\ X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v,$

$X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,\ X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u,\ X_{10} = \partial_t,$

$X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,$

Рассматривается уравнение состояния вида:

$$p = \pm\rho^\gamma + F(S), \tag{2}$$

где $+\rho^\gamma$ при $\gamma > 0$ и $-\rho^\gamma$ при $\gamma < 0$, γ — параметр, $F(S)$ — произвольная функция энтропии. Оно согласуется с фиксированным уравнением состояния для жидкости при больших давлениях и высоких температурах.

УГД с уравнением состояния (2) допускают дополнительные операторы:

– растяжение $X_{12} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - (\overline{\gamma} - 2)\rho\partial_\rho - \overline{\gamma}p\partial_p,$

– перенос $X_{13} = \partial_p,$

где $\overline{\gamma} = 2\gamma/(\gamma - 1)$, $\gamma \neq 1$.

Вместе с L_{11} они образуют алгебру Ли L_{13}.

В цилиндрических координатах (C) $\mathbf{x} = (x, r, \theta)$, $\mathbf{u} = (U, V, W)$, $y = r\cos\theta$,

$z = r\sin\theta$, $u = U$, $v = V\cos\theta - W\sin\theta$, $w = V\sin\theta + W\cos\theta$ базис алгебры L_{13} таков [3]: $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \cos\theta\partial_r - \sin\theta r^{-1}(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W)$,

$X_3 = \sin\theta\partial_r + \cos\theta r^{-1}(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W)$, $X_4 = t\partial_x + \partial_U$,

$X_5 = \cos\theta(t\partial_r - \partial_V) - \sin\theta r^{-1}t(\partial_\theta + W\partial_V - (V - rt^{-1})\partial_W)$,

$X_6 = \sin\theta(t\partial_r + \partial_V) + \cos\theta r^{-1}t(\partial_\theta + W\partial_V - (V - rt^{-1})\partial_W)$, $X_7 = \partial_\theta$,

$X_8 = \sin\theta(r\partial_x - x\partial_r + V\partial_U - U\partial_V) + \cos\theta(W\partial_U - U\partial_W - xr^{-1}(\partial_\theta + W\partial_r - V\partial_W))$,

$X_9 = -\cos\theta(r\partial_x - x\partial_r + V\partial_U - U\partial_V) + \sin\theta(W\partial_U - U\partial_W - xr^{-1}(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W))$,

$X_{10} = \partial_t$, $X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r$,

$X_{12} = t\partial_t - U\partial_U - V\partial_V - W\partial_W - (\overline{\gamma} - 2)\rho\partial_\rho - \overline{\gamma}p\partial_p$, $X_{13} = \partial_p$.

Для алгебры L_{13} перечислены все подалгебры [4], причем при $\gamma = -1$, $1/3$ подалгебр больше чем для произвольного γ. Рассмотрим двумерные неподобные подалгебры из оптимальной системы для L_{13}, появляющиеся только при $\gamma = -1,\ 1/3$:

2.1′. $X_1 + X_2,\ aX_4 + X_{13},\ a(\overline{\gamma} - 1) = 0;$

2.2′. $X_{12},\ aX_4 + X_{13},\ a \neq 0;$

2.3′. $X_1 + X_{12},\ aX_4 + bX_5 + X_{13};$

2.4′. $-X_{11} + X_{12},\ X_1 + aX_5 + X_{13},\ a \neq 0;$

2.1″. $aX_1 + X_{12},\ X_{10} + X_{13},\ a \neq 0;$

2.5′. $aX_7 - bX_{11} + X_{12},\ X_1 + X_{13},\ a \neq 0;$

2.6′. $aX_7 + bX_{11} + X_{12},\ cX_4 + X_{13},\ c^2 + (b+1)^2 \neq 0 \vee a^2 + c^2 \neq 0, c(\overline{\gamma} - 1) = 0;$

2.7′. $X_1 + aX_7 + X_{12},\ bX_4 + X_{13},\ a \neq 0;$ (1.3)

2.8′. $aX_7 + X_{12},\ bX_4 + X_{13},\ a \neq 0, b(\overline{\gamma} - 1) = 0;$

2.9′. $aX_7 - (\overline{\gamma} + 1)X_{11} + X_{12},\ bX_4 + X_{10} + X_{13},\ b(\overline{\gamma} - 1) = 0,\ \overline{\gamma} \neq 1;$

2.2″. $bX_1 + aX_7 + X_{12},\ X_{10} + X_{13},\ b \neq 0;$

2.10′. $aX_7 + X_{10} - X_{11} + X_{12},\ bX_1 + X_{13},\ b \neq 0;$

для подалгебр 2.1″ и 2.2″, $\overline{\gamma} = -1 \Rightarrow \gamma = 1/3$,
для остальных подалгебр $\overline{\gamma} = 1 \Rightarrow \gamma = -1$,
здесь параметры a и b задают серии неподобных подалгебр.

2 Предложение о согласовании уравнения (2) с фиксированным уравнением состояния

Уравнение (2) согласуется с фиксированным уравнением состояния [5]

$$p = \Phi(\rho^{-1}) + Tf(\rho^{-1}), \tag{3}$$

при определенных значениях функций $F(S)$, $\Phi(\rho^{-1})$, $f(\rho^{-1})$. Здесь $\Phi(\rho^{-1})$ – потенциальная компонента давления, $Tf(\rho^{-1})$ – тепловая компонента давления, ρ^{-1} – удельный объем. Уравнение (3) описывает поведение реальных сред, которые по своим свойствам приближаются к твердым или жидким телам. Это возможно при больших давлениях (порядка 10^9кг/см^2) и высоких температурах (порядка $10^6 K$). Найдем значения $F(S)$, $\Phi(\rho^{-1})$, $f(\rho^{-1})$.

Сравнивая p в (2), (3) и исключая T по первому началу термодинамики (ρ, S – независимые параметры) получаем тождество:

$$\pm\rho^{\gamma} + F(S) = \Phi(\rho^{-1}) + (G'_S - F'_S\rho^{-1})f(\rho^{-1}), \tag{4}$$

где $G(S)$ – определяется дополнительным опытом.
Дифференцируем (4) дважды по S, получим:

$$0 = -F'_S - F''_{SS}Vf(V) + G''_{SS}f(V), \tag{5}$$

где $V = \rho^{-1}$.

1^0. Пусть $F_{SS} \neq 0$, тогда:

$$\frac{F'_S}{F''_{SS}} = -Vf(V) + \frac{G''_{SS}}{F''_{SS}}f(V). \tag{6}$$

Еще раз дифференцируем по S, получим: $(\frac{F'_S}{F''_{SS}})' = (\frac{G''_{SS}}{F''_{SS}})'f(V)$. Если $\frac{G''_{SS}}{F''_{SS}} \neq 0$, то, разделяя переменные, имеем f=const=f_0 и после интегрирования, подставляем в (6). Получается противоречие с тем, что ρ, S – независимые параметры.

Значит $\frac{G''_{SS}}{F''_{SS}} = 0$, т.е.

$$G''_{SS} = k_0F''_{SS}, F'_S = k_1F''SS, \tag{7}$$

а из (6) следует $k_1 = -Vf(V) + k_0F(V)$.

Интегрирование (7) при $k_1 \neq 0$ и подстановка в (4) дают:

$$F(S) = k_1k_2e^{\frac{S}{k_1}} + k_3,$$
$$\Phi(\rho^{-1}) = \pm\rho^\gamma + k_3 - \frac{k_4k_1}{k_0 - \rho^{-1}}, \tag{8}$$
$$f(\rho^{-1}) = \frac{\rho k_1}{\rho k_0 - 1},$$
$$G(S) = k_0k_1k_2e^{\frac{S}{k_1}} + k_4S + k_5,$$

где k_j – постоянные интегрирования.

2^0. Пусть $F_{SS} = 0$ (равносильно $k_1 = 0$). Тогда $F(S) = k_1S + k_0$ и из (5) получим (при $G''_{SS} \neq 0$) $\frac{k_1}{G''_{SS}} = f(V)$=const=$f_0$. Тогда из (4) следует:

$$\Phi(\rho^{-1}) = k_1\rho^{-1}f_0 + k_0 - k_2f_0 \pm \rho^\gamma,$$
$$f(\rho^{-1}) = f_0, \tag{9}$$
$$G(S) = \frac{k_1}{2f_0}S^2 + G_1(S) + G_0,$$

где G_0, G_1=const.

$\mathbf{3^0}$. Пусть $F_{SS} = 0$, $G_{SS} = 0$. Из (6) следует $F_S = 0$, $F(S) = F_0$. Из (4) получим:

$$\Phi(\rho^{-1}) = \pm\rho^{\gamma} + F_0 - G_1 f(\rho^{-1}),$$
$$G(S) = G_1(S) + G_0, \tag{10}$$

где F_0, G_0, G_1 – постоянные.

Таким образом, уравнение (2) согласуется с (3), если функции $F(S)$, $f(\rho^{-1})$, $\Phi(\rho^{-1})$ представлены в одном из видов: (8), (9), (10).

3 Вычисление инвариантов

Для построения подмодели специально сжимаемой жидкости необходимо вычислить инварианты подалгебр [2, см. также 1].

Алгоритм вычисления инвариантов заключается в следующем:

1. Подбираем систему координат, в которой будут вычислены инварианты. Если подалгебра содержит оператор вращения X_7, то удобно выбрать цилиндрические координаты, если оператора вращения нет, то удобны декартовы координаты.

2. Выписываем операторы подалгебры в удобной системе координат из списка (1.3).

3. Вводим функцию h, зависящую от 9 переменных $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \rho, p)$ в качестве искомых инвариантов.

4. Функция h является инвариантом подалгебры $L =< Y_1, Y_2 >$ тогда и только тогда, когда любой оператор Y подалгебры, действуя на инвариантную функцию, зануляет ее. А именно, $Y \cdot h = 0, Y \in L$. Подействуем оператором Y_1 базиса подалгебры L на инвариантную функцию. В результате получаем линейное однородное уравнение с частными производными 1-го порядка. Для этого уравнения записываем характеристическое уравнение, систему обыкновенных дифференциальных уравнений [6]. Предположим, что находится явно полный набор функционально независимых инвариантов (интегралов) $I^k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \rho, \mathbf{p})$, $k = 1..8$.

5. Записываем второй оператор базиса через полученные инварианты по правилу:
$$Y_2 = \xi^j \partial_{x^j} = \xi_j \frac{\partial I^k}{\partial x^j} \partial_{I^k} \qquad (11)$$

6. Подействуем оставшимся оператором Y_2 на инвариантную функцию $h(I^k)$. Получаем линейное однородное уравнение с частными производными 1-го порядка. Записываем для него уравнение характеристик. Находим полный набор функционально независимых инвариантов.

7. Переходим к первоначальным переменным.

Инварианты полученные для подалгебр из (1.3) сведены в таблицу (см. Приложение).

Пример:

В качестве примера рассмотрим подалгебру $2.7'$ из (1.3):
$Y_1 = X_1 + aX_7 + X_{12} = a\partial_\theta + t\partial_t - U\partial_U - V\partial_V - W\partial_W + \rho\partial_\rho - p\partial_p$,
$Y_2 = bX_4 + X_{13} = bt\partial_x + b\partial_U + \partial_p$.
Введем инвариантную функцию $h(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \rho, p)$, $\mathbf{x} = (x, r, \theta)$, $\mathbf{u} = (U, V, W)$, удовлетворяющую уравнениям $Y_1{\cdot}h = 0, Y_2{\cdot}h = 0$.
Второе уравнение имеет вид $bth_x + bh_U + h_p = 0$.
Запишем уравнение характеристик:
$$\frac{dx}{bt} = \frac{dU}{b} = \frac{dp}{1} = \frac{dr}{0} = \frac{d\theta}{0} = \frac{dV}{0} = \frac{dW}{0} = \frac{d\rho}{0} = \frac{dt}{0}.$$
Находим интегралы, которые образуют полный набор функционально независимых
инвариантов: $t; \rho; W; V; \theta; r; U_1 = U - xt^{-1}$; $p_1 = p - x(bt)^{-1}$.

Записав 2-е уравнение через полученные инварианты по правилу (11) получим $h_{1x} = 0$. Значит $h = h_1(t, r, \theta, V, W, \rho, p_1, U_1)$.

Первое уравнение в новых инвариантах для известных уравнений переменных имеет вид:
$$ah_{1\theta} + th_{1t} + (-U + xt^{-1})h_{1U_1} - Vh_{1V} - Wh_{1W} + \rho h_{1\rho} + [-p + x(bt)^{-1}]h_{1p_1} = 0;$$

Записав характеристическое уравнение и вычислив интегралы, получаем полный набор функционально независимых инватиантов, которые в первоначальных переменных имеют вид:
$$r;\ \theta - a\ln|t|;\ Ut - x;\ Vt;\ Wt;\ \rho t^{-1};\ pt - xb^{-1}. \qquad (12)$$

4 Инвариантные подмодели ранга 2

Двумерная подалгебра имеет 5 инвариантов. Если из выражений для инвариантов определяются все искомые функции, то существует инвариантное решение. Для этого эти инварианты назначаются новыми функциями от остальных инвариантов. Остальные инварианты обязательно будут функциями независимых переменных [2].

Из полученных равенств определяются все неизвестные функции. Таким образом, получается представление инвариантного решения, которое и подставляется в УГД. В результате подстановки по теореме о представлении инвариантного многообразия [6], получится система уравнений, связывающая только инварианты и новые инвариантные функции. Уравнения для инвариантов называется инвариантной подмоделью.

Для рассмотренного примера запишем инвариантную подмодель.

Из инвариантов (12) составим равенства: $\theta - a\ln|t| = \theta_1$,
$Ut - x = U_1(r, \theta_1), Vt = V_1(r, \theta_1), Wt = W_1(r, \theta_1), \rho t^{-1} = \rho_1(r, \theta_1), pt - xb^{-1} = p_1(r, \theta_1)$.
Из этих равенств определяется представление инвариантного решения:
$U = (U_1 + x)t^{-1}$; $V = V_1 t^{-1}$; $W = W_1 t^{-1}$; $\rho = \rho_1 t$; $p = p_1 t^{-1} + x(bt)^{-1}$

Представление инвариантного решения для S можно получить из уравнения состояния: $p = \pm\rho^{-1} + S \Rightarrow S = t^{-1}(x(b^{-1}) + S_1)$, где $S_1 = p_1 \pm \rho^{-1}$ заменяет уравнение состояния в инвариантной подмодели.

Подстановка в УГД приводит к инвариантной подмодели:

$$D_1 = (W_1 r^{-1} - a)\partial_{\theta_1} + V_1 \partial_r,$$

$$\begin{gathered} D_1 U_1 = -(\rho_1 b)^{-1}, \\ D_1 V_1 + p_{1r}{\rho_1}^{-1} = {W_1}^2 r^{-1} + V_1, \\ D_1 W_1 + p_{1\theta_1}(\rho_1 r)^{-1} = W_1 - V_1 W_1 r^{-1}, \\ D_1\rho_1 + \rho_1(V_{1r} + r^{-1}W_{1\theta_1}) = -\rho_1(2 + V_1 r^{-1}) \\ D_1 S_1 = -U_1 b^{-1}. \end{gathered} \tag{13}$$

Любую инвариантную подмодель можно привести выбором инвариантов к одному из двух канонических типов [7]:
– эволюционному (время – t инвариант подалгебры)

$$D = \partial_t + u_2\partial_s,$$

$$
\begin{gathered}
Du_2 + b{\rho_1}^{-1} p_{1s} = a_1, \\
Dv_2 = a_2, \\
Dw_2 = a_3, \\
D\rho_1 + \rho_1 u_{2s} = a_4 \\
DS_1 = a_5, \\
b > 0;
\end{gathered}
\tag{14}
$$

– стационарному

$$
\begin{gathered}
D = u_2 \partial_{x_1} + v_2 \partial y_1, \\
Du_2 + b_1 {\rho_1}^{-1} p_{1x_1} = a_1, \\
Dv_2 + b_2 {\rho_1}^{-1} p_{1y_1} = a_2, \\
Dw_2 = a_3, \\
D\rho_1 + \rho_1 (u_{2x_1} + v_{2y_1}) = a_4, \\
DS_1 = a_5, \\
b_1 > 0,\ b_2 > 0;
\end{gathered}
\tag{15}
$$

здесь a_i, b, b_i называются коэффициентами канонических типов.
Из рассмотренных подалгебр (1.3) получилось 2 подмодели эволюционного типа, а из остальных подалгебр получилось 10 подмоделей стационарного типа.

Канонические типы инвариантных подмоделей сведены в таблицу (см. Приложение), где:

- 1-й столбец – номер подалгебры,
- 2-й столбец – основная система координат в которой рассматриваются УГД,
- 3-й столбец – канонический тип: S – стационарный, E – эволюционный,
- в 4-м столбце приведены инварианты;
- в 5-м столбике записаны коэффициенты канонического типа.

(13) приводится к стационарному каноническому типу заменой $r = x_1$, $\theta - a\ln|t|$, $u_2 = V_1$, $v_2 = (x_1)^{-1}W_1 + a$, $w_2 = U_1$. При этом получим следующие коэффициенты канонического типа: $a_1 = u_2 + x_1(v_2 + a)$, $a_2 = (v_2 - a)(1 - 2u_2(x_1)^{-1})$, $a_3 = 1 - (\rho b)^{-1}, a_4 = -\rho_1(u_2 x_1^{-1} + 2)$, $a_5 = (1 + w_2)b^{-1} + S_1$, $b_1 = 1$, $b_2 = x_1^{-2}$.

Пример приведения подалгебры 2.9′ к каноническому типу.

Операторы подалгебры таковы:

$Y_1 = aX_7 - 2X_{11} + X_{12}$,

$Y_2 = bx_4 + X_{10} + X_{13}$, $b(\overline{\gamma}) = 0$, $\overline{\gamma} \neq -1$.

Инварианты из независимых переменных имеют вид: $x_1 = (x - b2^{-1}t^2)r^{-1}$, $y_1 = \theta + a2^{-1}\ln|r|$. Представление инвариантного решения записывается через новые инвариантные функции так: $V = V_1 r^{\frac{1}{2}}$, $W = W_1 r^{\frac{1}{2}}$, $\rho = \rho_1 r^{-\frac{1}{2}}, p = p_1 r^{\frac{1}{2}} + t$, $U = U_1 r^{\frac{1}{2}} + bt$, где V_1, W_1, ρ, p_1, U_1 зависят от x_1, y_1.

Из уравнения состояния определяется представление решения для энтропии $S = S_1 r^{\frac{1}{2}} + t$, где $S_1 = p_1 \pm {\rho_1}^{-1}$.

Подстановка в УГД приводит к следующей инвариантной подмодели:

$D_1 = (U_1 - x_1 V_1)\partial_{x_1} + (W_1 + a2^{-1}V_1)\partial_{y_1}$,

$D_1 U_1 + {\rho_1}^{-1} = -b - 2^{-1}V_1 U_1$,

$D_1 V_1 + {\rho_1}^{-1}(p_{1y_1} a2^{-1} - p_{1x_1} x_1) = W_1^2 - p_1(2\rho_1)^{-1} - 2^{-1}V_1^2$,

$D_1 W_1 + {\rho_1}^{-1} p_{1y_1} = W_1 V_1$,

$D_1 \rho_1 + \rho_1(U_{1x_1} - V_{1x_1}x_1 + V_{1y_1}a(2r)^{-1} + W_{1y_1}) = -3V_1\rho_1 2^{-1}$,

$D_1 S_1 = -1 - V_1 S_1 2^{-1}$.

Введем новые инвариантные скорости по выражению для D_1: $U_1 - x_1 V_1 = u_2$, $a2^{-1}V_1 + W_1 = v_2$, $W_1 - 2a^{-1}V_1 - x_1 U_1 2a^{-1}$, с которыми получаем замену: $x_2 = {x_1}^2 - ay_1$, $y_2 = y_1 + 2^{-1}a\ln|x_1|$, $u_3 = 2x_1 u_2 - av_2$, $v_3 = (2x_1)^{-1}au_2 + v_2$. Подставив эти выражения в предыдущую систему, получим (4.3), где:

$a_1 = -2x_2 b - V_1(x_2 U_1 + 2x_2(U_1 - x_1 V_1) - aW_1 + V_1 x_2(\rho)^{-1}) + (2x_2 - a)(W_1^2 - p_1(2\rho_1)^{-1} - 2^{-1}V_1^2) + 2(U_1 - x_1 V_1)^2$,

$a_2 = (a(2x_2)^{-1} + 1)({W_1}^2 - p_1(2\rho_1)^{-1} - 2^{-1}{V_1}^2) - ab(2x_2)^{-1} - aV_1 U_1(4x_2)^{-1} + (2x_2)^{-1}a(U_1 - x_1 V_1)V_1 - 2^{-1}a{x_2}^{-2} + W_1 V_1$,

$a_3 = W_1 V_1 - 2a^{-1}({W_1}^2 - p_1(2\rho)^{-1} - 2^{-1}{V_1}^2) + 2x_2 a^{-1}(-b - 2^{-1}V_1 U_1) + 2a^{-1}(U_1 - x_1 V_1)U_1$,

$a_4 = -\frac{5}{2}\rho_1 V_1$,

$a_5 = -1 - 2^{-1}V_1S_1$,

$b_1 = (2{x_2}^2 2^{-1}a^2)^2 + 1 + 4{x_2}^2$, $b_2 = \frac{a^2}{4{x_2}^2} + 1$, $p_1 = \pm{\rho_1}^{-1} + S_1$.

5 Инвариантная подмодель ранга 3

Для подалгебры $2.1''$ из оптимальной системы (1.3) при $a = 0$ выражения для инвариантов определяют скорость и давление, но невозможно определить плотность (см. Приложение). В этом случае можно строить регулярную частично инвариантную подмодель.

Дадим определение регулярным частично инвариантным решениям в общем случае.

Пусть для подалгебры H имеется $I_1, .., I_k$- инвариантов из независимых переменных и $J_1, .., J_l$- инвариантов из зависимых и независимых переменных. Если из инвариантов $J_1, .., J_l$ определяются все зависимые переменные, то можно строить инвариантную подмодель ранга k, назначая инварианты J_j функциями от $(I_1, .., I_k)$, т.е.

$$J_j = J_j(I_1, .., I_k), j = 1, .., l. \tag{16}$$

Если же невозможно определить все независимые переменные из инвариантов J_j, то (16) дает представление регулярного частично инвариантного решения ранга k, дефекта σ, который равен числу неопределяемых независимых переменных, т.е. $\sigma = m - l$, где m- число зависимых переменных.

Для подалгебры $2.1''$ ранг равен 3, дефект равен 1.

Расмотрим подробнее подалгебру $2.1''$.

Операторы базиса таковы:

$Y_1 = \partial_t + \partial_p$,

$Y_2 = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w + 3\rho\partial_\rho + p\partial_p$.

Инварианты из независимых переменных: x, y, z. Из остальных инвариантов, указанных в таблице (см.Приложение), получаем представление регулярного частично инвариантного решения.

$$\mathbf{u} = \rho^{\frac{1}{3}}\mathbf{u_1}(x, y, z),\ p = t + \rho^{\frac{1}{3}}p_1(x, y, z),\ \rho = \rho(t, x, y, z). \tag{17}$$

Подстановка в УГД дает:

$$-\frac{1}{3}\mathbf{u_1}(\rho_t + \rho^{-\frac{1}{3}}\mathbf{u_1}\cdot\nabla\rho) + \rho^{\frac{2}{3}}[(\mathbf{u_1}\cdot\nabla)\mathbf{u_1} + \nabla p_1] + \frac{1}{3}\rho^{-\frac{1}{3}}p_1\cdot\nabla\rho = 0, \tag{18}$$

$$\rho_t + \frac{2}{3}\rho^{-\frac{1}{3}}\mathbf{u_1}\cdot\nabla\rho + \rho^{\frac{2}{3}}\mathrm{div}\mathbf{u_1} = 0. \qquad (19)$$

Из уравнения состояния получим представление для энтропии $S = t+\rho^{\frac{1}{3}}S_1$, где $S_1 = p_1 - 1$.

Подстановка в $DS = 0$ дает:

$$\frac{1}{3}S_1\rho^{-\frac{2}{3}}(\rho_t + \rho^{-\frac{1}{3}}\mathbf{u_1}\cdot\nabla\rho) + \mathbf{u_1}\cdot\nabla S_1 + 1 = 0. \qquad (20)$$

Из (19) и (20) следует:

$$\frac{\mathbf{u_1}\cdot\nabla\rho}{\rho} = -9\frac{(1+\mathbf{u_1}\cdot\nabla S_1)}{S_1} + 3\mathrm{div}\mathbf{u_1}. \qquad (21)$$

Тогда из (20) можно найти ρ_t:

$$\frac{1}{\rho}\rho_t = 3\rho^{-\frac{1}{3}}[-\mathrm{div}\mathbf{u_1} + 2\mathrm{S}_1^{-1}(\mathbf{u_1}\cdot\nabla\mathrm{S}_1 + 1)] \equiv \rho^{-\frac{1}{3}}\mathrm{B}(\mathbf{x}). \qquad (22)$$

Заменяя p_1 на $S_1 + 1$ и подставляя (22), (21) в (18) получим:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\nabla\rho = \left[-\frac{1}{S_1}\mathbf{u_1}(1+\mathbf{u_1}\cdot\nabla S_1) - \nabla S_1 - (\mathbf{u_1}\cdot\nabla)\mathbf{u_1}\right]\frac{3}{S_1+1} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}). \qquad (23)$$

Подстановкой (23) в (21), исключаем ρ:

$$\left(\frac{\mathbf{u_1}^2}{S_1+1} - 3\right)(\mathbf{u_1}\cdot\nabla S_1 + 1) + \frac{S_1}{S_1+1}(\mathbf{u_1}\cdot\nabla)\left(S_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u_1}^2\right) = 0.$$

Приравнивая смешанные производные функции $\ln\rho$ из (22), (23), получим $\nabla B = \frac{1}{3}B\mathbf{A}$, $\mathrm{rot}\mathbf{A} = 0$. Из последнего равенства следует, что $\mathbf{A} = \nabla\varphi$ и $\nabla(3\mathrm{ln}B - \varphi) = 0 \Rightarrow 3\mathrm{ln}B - \varphi = 0 \Rightarrow B = e^{\frac{1}{3}\varphi}$. Из (23) следует $\rho = b(t)e^{\varphi}$. Тогда из (20) получим $b' = b^{\frac{2}{3}}$.

Интегрирование дает $b = (\frac{t}{3})^3$, где постоянная интегрирования сделана нулем с помощью переноса по t и по p, допускаемого УГД.

Итак, определяется плотность в виде $\rho = t^3\rho_1(x,y,z)$. Тогда представление (17) можно записать в вид $\mathbf{u} = t\mathbf{u_1}(x,y,z)$, $p = tp_1(x,y,z)$, т.е. является представлением инвариантного решения для одномерной подалгебры Y_2.

Таким образом, происходит редукция частично инвариантного решения к инвариантному:

$$(\mathbf{u_1}\cdot\nabla)\mathbf{u_1} + {\rho_1}^{-1}\cdot p_1 = \mathbf{u_1},$$

$$\mathbf{u_1} \cdot \nabla\rho_1 + \rho_1 \mathrm{div}\mathbf{u_1} = -3\rho_1, \qquad (24)$$
$$\mathbf{u_1} \cdot S_1 = -S_1,$$

где $S_1 = p_1 - \rho_1{}^{\frac{1}{3}}$, $S = tS_1$.

Литература

[1] Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962. – 240 с.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Наука, 1978. – 400 с.

[3] Хабиров С.В. Инвариантные решения ранга 1 в газовой динамике // Труды международной научной конференции “Моделирование, вычисления, проектирование в условиях неопределенности – 2000”. – Уфа: УГАТУ, 2000. – С. 104-115.

[4] Хабиров С.В. Оптимальные системы подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики. – Уфа: Институт механики УНЦ РАН, 1998. – 33 с.

[5] Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 804 с.

[6] Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – Л.-М.: ГТТИ, 1934. – 359 с.

[7] Хабиров С.В. Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, вып. 3. – С. 439-444.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица

N	С.К.	Тип	Инварианты: $x_1, y_1, u_2, v_2, w_2, \rho_1, S_1$ t, s- для E	Подмодель (14) или (15) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b, b_1, b_2$
$2.1'$	D	S	$y, z, tv, tw,$ $tu-x+\ln\|t\|, \rho t^{-1},$ $tS-xa^{-1}+a^{-1}\ln\|t\|,$	$a_1=u_2, a_2=v_2, a_3=1-(a\rho_1)^{-1},$ $a_4=-2\rho_1, a_5=S_1+a^{-1}(1-w_2),$ $b_1=b_2=1,$
$2.2'$	D	S	$y, z, tv, tw,$ $tu-x, \rho t^{-1},$ $tS-xa^{-1},$	$a_1=u_2, a_2=v_2, a_3=-(a\rho_1)^{-1},$ $a_4=-2\rho_1, a_5=S_1-a^{-1}w_2,$ $b_1=b_2=1,$
$2.3'$	D	S	$x-ayb^{-1}-\ln\|t\|, z,$ $tu-ab^{-1}tv-1, tw,$ $ab^{-1}(tu-ayb^{-1}-1)+tv-y,$ $\rho t^{-1}, tS-ya^{-1},$	$a_1=u_2+a(b^2\rho_1)^{-1}+1, a_2=v_2\rho_1,$ $a_3=ab^{-1}(u_2+1)-(b\rho_1)^{-1},$ $a_4=-3\rho_1, a_5=S_1-ba^{-2}w_2+a^{-1}u_2,$ $b_1=a^2b^{-2}+1, b_2=1,$
$2.4'$	D	E	$t, z^{-1}(y-atx),$ $z^{-1}(v-ax-atu-sw),$ $z^{-1}[(a^2t^2+s^2)$ $(v-ax)+atu+sw],$ $z^{-1}((a^2t^2+s^2)w+$ $s(v-ax)-atsu),$ $\rho z, z^{-1}(S-x),$	$a_1=-2(1+a^2t^2+S^2)^{-1}[u_2(a^2t^2-stu_2)$ $+w_2(tu_2-s)]=at(\rho_1)^{-1}-sp_1(\rho_1)^{-1},$ $a_2=(1+a^2t^2+s^2)^{-1}[2av_2-u_2a^3t^2-$ $2asw_2+(v_2+u_2)(2a^2t+su_2)-$ $w_2v_2+sv_2u_2+w_2u_2+$ $s(u_2)^2]+at(\rho_1)^{-1}-sp_1(\rho_1)^{-1},$ $a_3=(\rho_1)^{-1}(p_1(1+a^2t^2+ats)+$ $(1+a^2t^2+s^2)^{-1}[2a^2t^2w_2-(w_2-$ $su_2)^2t-2sv_2+as^2w_2]+(u_2)^2,$ $a_4=-2\rho((w_2-su_2)(1+a^2t^2+s^2)^{-1},$ $a_5=[w_2(S_1-s)+v_2-$ $u_2(a^2t+S_1s)](1+a^2t^2+s^2)^{-1},$ $b=(1+a^2t^2+s^2),$ $p_1=\rho_1{}^{-1}+S_1,$
$2.5'$	C	E	$t, \theta+a\ln\|t\|,$ $r^{-1}(aV+W), r^{-1}U,$ $ar^{-1}(Wa-V), pr,$	$a_1=-a(\rho_1)^{-1}(S_1+(\rho_1)^{-1})+$ $(a(a^2+1))^{-1}(w_2{}^2-a^2u_2{}^2+$ $2u_2w_2,$

			$r^{-1}(S-x)$,	$a_2 = -(\rho_1)^{-1} - v_2(a(a^2+1))^{-1}$ $(au_2 - w_2)$, $a_4 = -\rho_1(a(a^2+1))^{-1}(a_2u_2 - w_2)$, $a_5 = -v_2, b = a^2+1$,
$2.6'$	C	S	$rt^{\frac{-b}{b+1}}, \theta - a(b+1)\ln\lvert t\rvert$ $Vt^{\frac{1}{b+1}} - b(b+1)^{-1}x_1$, $Wt^{\frac{1}{b+1}}(x_1)^{-1} - a(b+1)^{-1}$, $(U - xt^{-1})t^{\frac{1}{b+1}}, \rho t^{\frac{-1}{b+1}}$, $(S - x(ct)^{-1})t^{\frac{1}{b+1}}$,	$a_1 = (v_2(2ax_1 - b) + u_2)(b+1)^{-1} +$ ${v_2}^2x_1 + x_1(b+a^2)(b+1)^{-2}$, $a_2 = (v_2(b+1)^{-1} + a(b+1)^{-2})(1-b)$, $a_3 = w_2((b+1)^{-1} - 1) - (\rho_1 c)^{-1}$, $a_4 = -\rho_1(3b+2)(b+1)^{-1} - \rho_1 u_2(x_1)^{-1}$, $a_5 = S_1(b+1)^{-1} - w_2c^{-1}$, $b_1 = 1, b_2 = (x_1)^{-2}$,
$2.8'$	C	S	$r, \theta - a\ln\lvert t\rvert, tV$, $tW(x_1)^{-1} - a, Ut - x$, $\rho t^{-1}, St - xb^{-1}$,	$a_1 = u_2 + x_1(v_2+a)^2$, $a_2 = (v_2+a)(1 - 2u_2(x_1)^{-1})$, $a_3 = -(\rho_1 b)^{-1}, a_4 = -\rho_1(u_2){x_1}^{-1} + 2$, $a_5 = -w_2b^{-1}, b_1 = 1, b_2 = (x_1)^{-2}$,
$2.10'$	C	S	$re^t, \theta - at, Ve^t + x_1$, $tW(x_1)^{-1} - a, Ue^t, \rho e^t$, $(S - x(b)^{-1})e^t$,	$a_1 = 2u_2 + 2x_1(v_2+a)^2 - x_1$, $a_2 = v_2 - a + au_2(x_1)^{-1} + u_2v_2$, $a_3 = w_2 - (\rho_1 b)^{-1}$, $a_4 = -\rho_1(u_2 - x_1)(x_1)^{-1}$, $a_5 = S_1 - w_2b^{-1}, b_1 = 1, b_2 = (x_1)^{-2}$,
$2.1''$ $a \neq 0$	D	S	$y, z, ve^{\frac{x}{a}}, we^{\frac{x}{a}}, ue^{\frac{x}{a}}$ $\rho e^{\frac{-}{3x}a}, (S - t)e^{\frac{-}{x}a}$,	$a_1 = a^{-1}u_2w_2, a_2 = a^{-1}v_2w_2$, $a_3 = a^{-1}({w_2}^2 - S_1(\rho_1)^{-1} - (\rho_1)^{-2})$, $a_4 = -2a^{-1}w_2\rho_1, a_5 = -1 - a^{-1}w_2S_1$, $b_1 = b_2 = 1$,
$2.1''$ $a = 0$	D	S	x, y, z, $u\rho^{\frac{1}{3}}, v\rho^{\frac{1}{3}}, w\rho^{\frac{1}{3}}$, $(p - t)\rho^{\frac{-}{1}3}$,	$\rho = t^3\rho_1(x, y, z)$, $\mathbf{u} = t^{-1}\mathbf{u_1}(x, y, z)$, $p = tp_1(x, y, z)$, (24)
$2.2''$	C	S	$x - ba^{-1}\theta, r$, $Ue^{\frac{\theta}{a}} - bWe^{\frac{\theta}{a}}(y_1a)^{-1}$, $Ve^{\frac{\theta}{a}}$, $We^{\frac{\theta}{a}} + Ue^{\frac{\theta}{a}}b(y_1a)^{-1}$, $\rho e^{\frac{-3\theta}{a}}, (S - t)e^{\frac{-\theta}{a}}$.	$a_1 = u_2(w_2 - u_2b(y_1a)^{-1})$ $(y_1a(b^2 + (y_1a)^2)^{-1}) -$ $bp_1(y_1a)^{-2}(\rho_1)^{-1}$, $a_2 = (w_2 - u_2b(y_1a)^{-1})$ $((y_1a)^2(b^2 + (y_1a)^2)^{-1})((y_1)^{-1}(w_2 -$

					$u_2b(y_1a)^{-1})((y_1a)^2(b^2+$ $(y_1a)^2)^{-1})+v_2(y_1a)^{-1}$, $a_3=(w_2-u_2b(y_1a)^{-1})((y_1a)^{-1}-$ $(b^2+(y_1a)^2)^{-1}(v_2(3b^2+(y_1a)^2))-$ $p_1(y_1a\rho_1)^{-1}(b^2(y_1a)^{-2}+1)$, $a_4=-\rho_1v_2{y_1}^{-1}-2\rho_1(w_2-u_2b$ $(y_1a)^{-1})(y_1a(b^2+(y_1a)^2)^{-1})$, $a_5=-1-y_1a(b^2+(y_1a)^2)^{-1}(w_2-$ $u_2b(y_1a)^{-1})S_1$, $b_1=b^2(y_1a)^{-2}+1$, $b_2=1, p_1=s_1\pm\rho^{\frac{1}{3}}$.