*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2003
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97*

*http://www.wplus.net/pp/diffur
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru*

общая теория управления
прикладные задачи

Об асимптотических версиях одноимпульсного управления в линейной системе: множества притяжения в пространстве траекторий.

А.В. Лысенко

Россия, 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М.Горького,
математико-механический факультет.
e-mail: lysenko@r66.ru

А.Г. Ченцов

Россия, 620219, Екатеринбург, ул.С.Ковалевской 16,
Институт математики и механики УрО РАН,
отдел управляемых систем.
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Аннотация.

Рассматривается проблема расширения задачи о построении пучка траекторий линейной системы с разрывными коэффициентами при управлении в условиях приближения последнего к тому или иному одноимпульсному режиму.

1 Введение

В статье рассматривается линейная управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)b(t) \tag{1.1}$$

на единичном промежутке времени; фазовое пространство системы (1.1) совпадает с $\mathbf{R}^n$, где n - натуральное число. Полагаем, что у системы (1.1) фиксировано начальное условие: $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$. В (1.1): $t \in [0, 1[$; $A(t)$ есть $n \times n$-матрица, коэффициенты которой изменяются непрерывно на отрезке $[0, 1]$ ($A(t)$ есть непрерывный $n \times n$-матрицант на $[0, 1]$); $b = b(\cdot)$ есть n-вектор-функция на $[0, 1[$ с компонентами $b_1, \ldots, b_n$; f есть вещественнозначная (в/з) неотрицательная функция на $[0, 1[$. Нас будет интересовать случай, когда $f(t)$ отлична от нуля лишь на некотором подмножестве (п/м) промежутка времени, имеющего "малую"длину. Последнее условие будем интерпретировать как близость к одноимпульсному режиму управления (отметим, что одноимпульсные управления широко используются при решении многих прикладных задач и, в частности, задач космической навигации [2]). В связи с математической формализацией импульсных режимов управления отметим [3, 4, 6, 7]. Подчеркнем, что относительно $b = b(\cdot)$ будет допускаться возможность того, что данная вектор-функция разрывна. Управления

$$f : [0, 1[\to [0, \infty[\tag{1.2}$$

будут предполагаться кусочно-постоянными (к.-п.) и непрерывными справа (н.спр.) функциями, что естественно с точки зрения инженерной реализуемости. С использованием формулы Коши [1, 3, 8], для каждого такого управления f (1.2) может быть построена траектория системы (1.1). Нас будут интересовать асимптотики таких естественных траекторий при условии, что множество моментов $t \in [0, 1[$, для которых $f(t) \neq 0$, неограниченно уменьшается. Полагаем, однако, что в каждом конкретном случае управления системой (1.1) ресурс управления (т.е. "запас топлива") расходуется полностью. Разумеется, предельное представление для таких аппроксимативных режимов не определяется однозначно. Мы будем использовать конструкцию на основе множеств притяжения (МП), используемых в [12, 11, 13] (и во многих других работах)в связи с задачами об асимптотической достижимости и асимптотической оптимизации. В рамках этого подхода наша задача об отыскании пучка предельных траекторий может рассматриваться как задача об (асимптотической) достижимости в бесконечномерном топологическом пространстве (ТП) n-вектор-функций на отрезке $[0,1]$. В этом ТП и будет рассматриваться требуемое МП; будем использовать при этом топологию поточечной сходимости, что естественно в случае применения управлений с импульсными ограничениями. Для представления данного МП будет использоваться обобщенная конструкция [10], реализуемая в классе конечно-аддитивных (к.-а.) управлений-мер, что, в идейном отношении, соответствует подходу [1, 5, 14, 15] для задач управления с геометрическими ограничениями.

2 Общие определения и обозначения

Исследуемая задача управления с импульсными ограничениями будет впоследствии сведена к обобщенной задаче управления с использованием к.-а. мер; общий вариант этой задачи был рассмотрен в [10]. Как видно из конструкции, представленной в [10], при построении расширения (т.е. упомянутой обобщенной задачи) требуется использовать элементы общей топологии и к.-а. теории меры [18]. Эти сведения мы рассмотрим в виде краткой сводки, отсылая за более подробными построениями к [10, 11, 12, 13].

Мы используем кванторы, связки, специальные символы def (по определению) и $\triangleq$ (равно по определению). Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X. Через B^A обозначаем множество всех функций, действующих из множества A в множество B; если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то через $f^1(C)$ обозначаем образ множества C при действии f (см. [19, с.17]). Если $k,\ l,\ s\ \in \mathbb{N}$, то $\overline{k,l} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid k \leqslant i \leqslant l\}$, и $\overrightarrow{s,\infty} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid s \leqslant i\}$. Если X - множество, то полагаем

$$\mathcal{B}[X] \triangleq \{\Im \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid \forall A \in \Im\ \forall B \in \Im\ \ \exists C \in \Im : C \subset A \cap B\};$$

в виде $\mathcal{B}_0[X] \triangleq \{\mathcal{X} \in \mathcal{B}[X] \mid \varnothing \notin \mathcal{X}\}$ получаем множество всех базисов фильтров X. Мы используем сходимость (направленностей) по Мору-Смиту (см. [17, гл.2]). Для обозначения направленности в множестве H используем триплеты вида $(D, \preceq, h)$, где $(D, \preceq)$ есть непустое $(D \neq \varnothing)$ направленное множество и $h \in H^D$; при этом

$$(H - ass)[D; \preceq; h] \triangleq \{V \in \mathcal{P}(H) \mid \exists d \in D\ \forall \delta \in D\ \ ((d \preceq \delta) \Rightarrow (h(\delta) \in V))\}$$

есть фильтр H, ассоциированный с $(D, \preceq, h)$. Если, к тому же, H оснащено топологией τ, $z \in H$ и $N_\tau(z)$ есть def фильтр всех окрестностей [17, 20] точки z в ТП (H, τ), то def

$$((D, \preceq, h) \xrightarrow{\tau} z) \Leftrightarrow (N_\tau(z) \subset (H - ass)[D; \preceq; h])$$

(сходимость по Мору-Смиту). Если (X,τ) есть ТП и $M \in \mathcal{P}(X)$, то через $cl(M,\tau)$ обозначим замыкание множества M в (X,τ).

Как и [10, 11, 13], определяем МП в задаче о достижимости при последовательном ослаблении ограничений. Если U – непустое множество, $\mathcal{U} \in \mathcal{B}[U]$, (V,τ) есть ТП и $t \in V^U$, то МП

$$(\tau - LIM)[\mathcal{U} \mid t] \triangleq \bigcap_{H \in \mathcal{U}} cl(t^1(H),\tau) \qquad (2.1)$$

есть (одновременно) множество всех $v \in V$ таких, что для некоторой направленности $(D,\preceq,h)$ в U имеет место

$$(\mathcal{U} \subset (U-ass)[D;\preceq;h])\ \&\ ((D,\preceq,t\circ h) \xrightarrow{\tau} v);$$

см. [10, 11, 12, 13]. Заметим, что при некоторых естественных условиях данное МП допускает исчерпывающую секвенциальную реализацию [11, с.38].

Через $(\tau - comp)[X]$ обозначаем семейство всех компактных [16, с.195] в ТП (X,τ) п/м X. Если даны два ТП (U,τ'), $U \neq \varnothing$ и (V,τ''), $V \neq \varnothing$, то через $C(U,\tau',V,\tau'')$ обозначаем множество всех функций $f \in V^U$, непрерывных [16, 20, 17] в смысле ТП (U,τ') и (V,τ'').

В дальнейшем "стрелку"

$$I \triangleq [0,1[\qquad (2.2)$$

мы рассматриваем как измеримое пространство (ИП) с полуалгеброй (п/а) множеств. Само множество I (2.2) рассматриваем как "единицу"данного ИП. Упомянутую п/а $\mathcal{L}$ определяем простейшим образом

$$\mathcal{L} \triangleq \{\ [a,b[:\ a \in I,\ b \in [0,1]\} = \{[a,b[:\ a \in [0,1],\ b \in [0,1]\}; \qquad (2.3)$$

$(I,\mathcal{L})$ есть требуемое ИП-стрелка. В связи с (2.3) будут введены дополнительные требования к $b = b(\cdot)$.

Через $(add)_+[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$ (в связи с определением к.-а. мер на п/а множеств см. [11, 12, 13], [24, §I.6]). Пусть

$$\mathbf{P}(\mathcal{L}) \triangleq \{\mu \in (add)_+[\mathcal{L}] \mid \mu(I) = 1\}; \qquad (2.4)$$

(2.4) есть множество всех к.-а. вероятностей (КАВ) на п/а $\mathcal{L}$. Кроме того, через $\mathbf{T}(\mathcal{L})$ обозначаем далее множество всех КАВ $\mu \in \mathbf{P}(\mathcal{L})$ таких, что $\forall\ L \in \mathcal{L}\quad (\mu(L)=0)\bigvee(\mu(L)=1)$.

Пусть $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ есть def множество всех в/з к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$; см. [11, 12, 13]. В виде $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ имеем линейное пространство, а полная вариация (к.-а. мер из $\mathbf{A}(\mathcal{L})$) определяет т.н. сильную норму $\mathbf{A}(\mathcal{L})$.

Через $\mathbf{B}_0(I, \mathcal{L})$ обозначаем множество всех ступенчатых, в смысле ИП $(I, \mathcal{L})$ в/з функций на множестве I. В нашем конкретном случае $\mathbf{B}_0(I, \mathcal{L})$ есть множество всех к.-п. и н.спр. в/з функций на I. Как обычно [22, с.261], оснащаем множество $\mathbf{B}(I)$ всех ограниченных в/з функций на I sup-нормой. Замыкание $\mathbf{B}_0(I, \mathcal{L})$ в топологии sup-нормы множества $\mathbf{B}(I)$ обозначаем в согласии с [22, гл. IV] через $\mathbf{B}(I, \mathcal{L})$, получая множество всех равномерных пределов к.-п. и н.спр. в/з функций на I; $\mathbf{B}(I, \mathcal{L})$ является аналогом пространства $\mathbf{B}(S, \Sigma)$ [22, гл. IV]. Оснащая (линейное) пространство $\mathbf{B}(I, \mathcal{L})$ топологией sup-нормы, мы получаем банахово пространство, для которого пространство $\mathbf{B}^*(I, \mathcal{L})$, топологически сопряженное к $\mathbf{B}(I, \mathcal{L})$, оказывается изометрически изоморфным [12, гл.3] $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме. Сам изометрический изоморфизм $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ на $\mathbf{B}^*(I, \mathcal{L})$ определяется простейшей операцией интегрирования [12, гл.3] (другие, по форме, определения интеграла по к.-а. мере см. в [18, 22, 21]). Всюду в дальнейшем μ-интеграл [12] функций из $\mathbf{B}(I, \mathcal{L})$, где $\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$, определяется в соответствии с [12, 13]. В этих условиях оператор

$$\mu \mapsto \left(\int_I f d\mu \right)_{f \in \mathbf{B}(I, \mathcal{L})} \quad : \ \mathbf{A}(\mathcal{L}) \to \mathbf{B}^*(I, \mathcal{L})$$

есть конкретный изометрический изоморфизм $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме на $\mathbf{B}^*(I, \mathcal{L})$ при традиционном нормировании последнего. Используя отождествимость $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ и $\mathbf{B}^*(I, \mathcal{L})$, мы оснащаем $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$, получая при этом локально выпуклый σ-компакт

$$(\mathbf{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})). \tag{2.5}$$

Через $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}})$ обозначаем топологию множества $\mathbf{R}^{\mathcal{L}}$, соответствующую тихоновскому произведению [17, 20, 16] экземпляров $(\mathbf{R}, \tau_{\mathbf{R}})$, где $\tau_{\mathbf{R}}$ есть обычная $|\cdot|$-топология вещественной прямой $\mathbf{R}$, при использовании п/а $\mathcal{L}$ в качестве индексного множества; через $\tau_{\otimes}(\mathcal{L})$ обозначаем топологию множества $\mathbf{A}(\mathcal{L})$, рассматриваемого как подпространство (п/п) упомянутого тихоновского произведения $(\mathbf{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}}))$. Напомним, что [12, §4.2] для всякого сильно ограниченного множества $\mathbf{B}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}(\mathcal{L})$, топологии $\mathbf{B}$, индуцированные

[17, с.77] из ТП
$$(\mathbf{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})),\ (\mathbf{A}(\mathcal{L}), \tau_\otimes(\mathcal{L}))$$
(в множестве $\mathbf{B}$), совпадают:
$$\tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{B}} = \tau_\otimes(\mathcal{L})|_{\mathbf{B}}, \tag{2.6}$$
где (здесь и ниже) в виде $\cdot|_{\mathbf{B}}$ используется операция перехода к п/п ТП с "единицей". Напомним, что условия компактности в ТП (2.5) определяются известной теоремой Алаоглу (см. [22, гл.V]); в данном частном случае эти конкретизированные условия см. в [12, §3.4].

Для нашего весьма конкретного случая ИП $(I, \mathcal{L})$ (с п/а множеств) полезно напомнить некоторые простейшие конструкции [23, §15]. Если $g \in \mathbf{R}^{[0,1]}$ (т.е. g есть в/з функция,определенная на $[0,1]$), то [23, с.114] полагаем, что
$$(st)[g]:\ \mathcal{L} \to \mathbf{R} \tag{2.7}$$
есть такая функция, что $(st)[g](\varnothing) \triangleq 0$ и
$$(st)[g](L) \triangleq g(sup(L)) - g(inf(L)) \quad \forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}; \tag{2.8}$$
ясно, что для $a \in [0,1]$ и $b \in [0,1]$ со свойством $a < b$ непременно
$$(st)[g]([a,b[) = g(b) - g(a).$$
Ясно, что в (2.7), (2.8) мы всегда имеем в/з к.-а. меру на $\mathcal{L}$. Среди всех в/з функций g, используемых в (2.7), выделяем монотонно неубывающие. Пусть, как и в [23, с.114],
$$(mo)_+[0;1] \triangleq \{g \in \mathbf{R}^{[0,1]} \mid \forall t_1 \in [0,1]\ \forall t_2 \in [0,1] \quad ((t_1 \leqslant t_2) \Rightarrow (g(t_1) \leqslant g(t_2)))\}.$$
Тогда имеем с очевидностью
$$(st)[g] \in (add)_+[\mathcal{L}] \quad \forall g \in (mo)_+[0;1]. \tag{2.9}$$
Условимся теперь о следующем обозначении:
$$(\mathbf{P} - mo)_+[0;1] \triangleq \{g \in (mo)_+[0;1] \mid (g(0) = 0) \& (g(1) = 1)\}. \tag{2.10}$$
Тогда в силу (2.7), (2.8), (2.10), у нас $\forall g \in (\mathbf{P} - mo)_+[0;1]$
$$(st)[g](I) = g(1) - g(0) = 1.$$
С учетом (2.4) и (2.9) получаем теперь
$$(st)[g] \in \mathbf{P}(\mathcal{L}) \quad \forall g \in (\mathbf{P} - mo)_+[0;1]. \tag{2.11}$$

В качестве примера функции из множества (2.10) отметим тождественное отображение $[0,1]$ в себя, т.е. функцию g_0 из $[0,1]$ в $[0,1]$, для которой $g_0(t) \equiv t$. Нам, однако, такая функция не подойдет.

Как и в случае $I = [0,1[$, условимся обозначать через $\mathbf{B}([0,1])$ множество всех ограниченных в/з функций на $[0,1]$; если L есть п/м отрезка $[0,1]$, то $\chi_L \in \mathbf{B}([0,1])$ есть def такая функция, что

$$(\chi_L(x) \triangleq 1 \ \ \forall x \in L) \ \ \& \ \ (\chi_L(x) \triangleq 0 \ \ \forall x \in [0,1] \setminus L).$$

Тем самым, в рассмотрение введены индикаторы [24, с.56] произвольных п/м $[0,1]$; они определены как отображения из $[0,1]$ в двоеточие $\{0;1\}$. В частности, каждая из функций $(\chi_{\{1\}} \in \mathbf{B}([0,1])) \ \ \& \ \ (\chi_{]0,1]} \in \mathbf{B}([0,1]))$ не убывает на $[0,1]$, принимает нулевое значение в точке 0 и единичное - в точке 1. Поэтому (см.(2.10))

$$(\chi_{\{1\}} \in (\mathbf{P} - mo)_+[0;1]) \ \ \& \ \ (\chi_{]0,1]} \in (\mathbf{P} - mo)_+[0;1]). \tag{2.12}$$

Далее, если $t \in]0,1[$ и $\alpha \in [0,1]$, то (линейные операции, умножение и порядок в пространствах в/з функций с общей областью определения понимаем в поточечном смысле) функция

$$v_\alpha[t] \triangleq \alpha \chi_{\{t\}} + \chi_{]t,1]} \in \mathbf{B}([0,1]); \tag{2.13}$$

при этом, очевидно, удовлетворяет следующим условиям:

$$(v_\alpha[t](\xi) = 0 \ \ \forall \xi \in [0,t[) \ \& \ (v_\alpha[t](t) = \alpha) \ \& \ (v_\alpha[t](\zeta) = 1 \ \ \forall \zeta \in]t,1]),$$

является монотонно неубывающей на отрезке [0,1] и такой, что $v_\alpha[t](0) = 0$ и $v_\alpha[t](1) = 1$. Стало быть, у нас $\forall t \in]0,1[\ \ \forall \alpha \in [0,1]$

$$v_\alpha[t] \in (\mathbf{P} - mo)_+[0;1]; \tag{2.14}$$

см. (2.10), (2.13). С учетом (2.12) и (2.14) имеем, что каждое из множеств $\mathcal{R}_1 \triangleq \{\chi_{\{1\}}\}$, $\mathcal{R}_2 \triangleq \{\chi_{]0,1]}\}$, $\mathcal{R}_3 \triangleq \{ v_\alpha[t] : \ \ t \in]0,1[, \ \alpha \in [0,1]\}$ является п/м $(\mathbf{P} - mo)_+[0;1]$. Полагаем теперь

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3; \tag{2.15}$$

тогда $\mathcal{R} \subset (\mathbf{P} - mo)_+[0;1]$. С учетом (2.11) имеем теперь для функций из множества (2.15) свойство $(st)[g] \in \mathbf{P}(\mathcal{L}) \ \ \forall g \in \mathcal{R}$. Иными словами, у нас

$$\mathbf{P}_*(\mathcal{L}) \triangleq \{(st)[r] : \ r \in \mathcal{R}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{P}(\mathcal{L})). \tag{2.16}$$

Полагаем далее, что $\lambda \triangleq (st)[g_0]$. Тогда по определению g_0 (напомним, что $g_0(t) \equiv t$) имеем из (2.8), что $\lambda(\varnothing) = 0$ и $\lambda(L) = sup(L) - inf(L)$ при $L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$; стало быть, при $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$, $a < b$ у нас $\lambda([a,b[) = b - a$. Итак, λ есть функция длины (след меры Лебега на п/а $\mathcal{L}$. С другой стороны, $g_0 \in (\mathbf{P} - mo)_+[0;1]$, а поэтому $\lambda \in \mathbf{P}(\mathcal{L})$ согласно (2.11).

Следуя [23, гл. 2], используем обозначения для неопределенного интеграла функции из $\mathbf{B}(I,\mathcal{L})$ относительно λ: если $f \in \mathbf{B}(I,\mathcal{L})$, то

$$f * \lambda \in \mathbf{A}(\mathcal{L}) \tag{2.17}$$

понимается в соответствии с [23, с. 108,109]; упомянутая к.-а. мера (2.17) имеет своими значениями интегралы функции f на множествах $L \in \mathcal{L}$, т.е.

$$(f * \lambda)(L) = \int\limits_L f d\lambda. \tag{2.18}$$

Сейчас мы напомним одно простое, но полезное для наших целей, свойство к.-а. меры (2.17), (2.18). Прежде всего заметим, что

$$fg = (f(t)g(t))_{t \in I} \in \mathbf{B}(I,\mathcal{L}) \quad \forall f \in \mathbf{B}(I,\mathcal{L}) \; \forall g \in \mathbf{B}(I,\mathcal{L});$$

см. [23, с. 109]. Требуемое свойство состоит в следующем (см. [23, с. 111]):

$$\int\limits_L gs d\lambda = \int\limits_L g d(s * \lambda). \tag{2.19}$$

Заметим, что в нашем случае ИП $(I,\mathcal{L})$ справедливо [12, §4.4] свойство:
$\forall L \in \mathcal{L} \; \forall \mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$

$$(\lambda(L) = 0) \Rightarrow (\mu(L) = 0). \tag{2.20}$$

В этом случае все к.-а. меры из $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ обладают аппроксимативным свойством, определяемым в теореме 4.3.3 [12]. Для наших целей, однако, будет достаточным использовать упомянутую аппроксимативную схему [12] только для $\mu \in \mathbf{P}(\mathcal{L})$.

Пусть $\mathbf{B}_0^+(I,\mathcal{L})$ есть def множество всех неотрицательных функций из $\mathbf{B}_0(I,\mathcal{L})$; полагаем

$$\mathbb{F} \triangleq \{f \in \mathbf{B}_0^+(I,\mathcal{L}) \;\mid\; \int\limits_I f d\lambda = 1\}. \tag{2.21}$$

По аналогии со свойством $\mathbf{A}(\mathcal{L})$, определяемым в (2.20), при $\mu \in (add)_+[\mathcal{L}]$ и $L \in \mathcal{L}$ имеем импликацию (2.20). Тогда множество $(add)^+[\mathcal{L};\lambda]$ [12, гл. 4] совпадает с $(add)_+[\mathcal{L}]$ и в согласии с теоремой 4.3.4 [12] имеем, в частности (см. (2.4)),

$$\mathbf{P}(\mathcal{L}) = cl(\{f * \lambda \ : \ f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L})) \tag{2.22}$$

Свойство (2.22) будет существенно в вопросах представления $\mathbf{P}_*(\mathcal{L})$, $\mathbf{P}_*(\mathcal{L}) \subset \mathbf{P}(\mathcal{L})$.

Вернемся к системе (1.1), рассматриваемой на промежутке $[0,1]$. Напомним, что каждая компонента $A_{i,j} = A_{i,j}(\cdot)$ матрицанта A, где $i \in \overline{1,n}$ и $j \in \overline{1,n}$, есть непрерывная на отрезке $[0,1]$ в/з функция. Относительно компонент $b_i = b_i(\cdot)$, $\ i \in \overline{1,n}$, вектор-функции $b = b(\cdot)$ предполагаем далее, что все эти компоненты - суть элементы $\mathbf{B}(I,\mathcal{L})$; мы учитываем здесь (2.2). Итак,

$$b_i \in \mathbf{B}(I,\mathcal{L}) \ \ \forall i \in \overline{1,n}.$$

Через $\Phi = \Phi(\cdot,\cdot)$ условимся обозначать фундаментальную матрицу решений однородной системы $\dot{x} = A(t)x \ : \Phi(t,\tau)$ есть $n \times n$-матрица при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$. Если теперь $f \in \mathbf{B}(I,\mathcal{L})$, то при $t \in [0,1]$ вектор $\int\limits_{[0,t[} f(\tau)\Phi(t,\tau)b(\tau)\lambda(d\tau) \ \in \mathbf{R}^n$ определяется традиционно, т.е. покомпонентно (имеется в виду покомпонентное интегрирование вектор-функции с компонентами из $\mathbf{B}(I,\mathcal{L})$; напомним здесь же, что при $t \in [0,1]$ функция $\Phi(t,\cdot)$ непрерывна на $[0,t]$ и, стало быть, имеет компоненты, продолжимые на $[0,1]$ до непрерывных в/з функций). Если $f \in \mathbf{B}(I,\mathcal{L})$, то определяем $\varphi_f \in C_n([0,1])$, где $C_n([0,1])$ есть множество всех непрерывных функций из $[0,1]$ в $\mathbf{R}^n$, по формуле Коши [1]

$$\varphi_f(t) \triangleq \Phi(t,0)x_0 + \int\limits_{[0,t[} f(\tau)\Phi(t,\tau)b(\tau)\lambda(d\tau) \tag{2.23}$$

(напомним, что λ-интегрирование в (2.23) осуществляется покомпонентно). Наряду с "обычными"траекториями (2.23) введем (обобщенные) "траектории", порожденные к.-а. мерами из $\mathbf{A}(\mathcal{L})$, следуя [10]. Именно, придерживаясь правила покомпонентного интегрирования, полагаем в соответствии с [10, с.69], что $\forall \mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L}) \ \ \forall t \in [0,1]$

$$\tilde{\varphi}_\mu(t) \triangleq \Phi(t,0)x_0 + \int\limits_{[0,t[} \Phi(t,\tau)b(\tau)\mu(d\tau). \tag{2.24}$$

При $\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$ рассматриваем функцию

$$\tilde{\varphi}_\mu \ : \ \ [0,1] \to \mathbf{R}^n, \tag{2.25}$$

значения которой определены в (2.24). В качестве μ в (2.24), (2.25) допустимо, в частности, использовать $\mu \in \mathbf{P}_*(\mathcal{L})$.

Отметим, что в (2.23) и (2.24) можно рассматривать значения $\varphi_f(1)$ и $\tilde{\varphi}_\mu(1)$ с целью исследования свойств области достижимости (ОД). Однако, по аналогии с [10] (см., например, соотношение (8.14) в [10]), мы будем рассматривать более общую постановку, связанную, в частности, с построением множеств притяжения (МП) в пространстве траекторий.

Если $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ оснащается в соответствии с (2.5), а $\mathbf{R}^n$ оснащается обычной топологией $\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}$ покоординатной сходимости, то оператор

$$\mu \mapsto \tilde{\varphi}_\mu(1) \ : \ \ \mathbf{A}(\mathcal{L}) \to \mathbf{R}^n \tag{2.26}$$

непрерывен (см.(2.24) и определение $\tau_*(\mathcal{L})$). Введем топологию

$$\tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L}) \triangleq \tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{P}(\mathcal{L})}.$$

Тогда $(\mathbf{P}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L}))$ - непустой компакт, а отображение ω вида

$$\mu \mapsto \tilde{\varphi}_\mu(1) \ : \ \ \mathbf{P}(\mathcal{L}) \to \mathbf{R}^n, \tag{2.27}$$

являющееся сужением (2.26) на $\mathbf{P}(\mathcal{L})$, непрерывно в смысле ТП

$$(\mathbf{P}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})), \ \ (\mathbf{R}^n, \tau_{\mathbf{R}}^{(n)}). \tag{2.28}$$

Известно [16, гл.1], что в этих условиях отображение ω является замкнутым, а тогда ω-образ замыкания множества M, $\quad M \subset \mathbf{P}_*(\mathcal{L})$, в смысле $\tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})$, совпадает с замыканием ω-образа самого множества M в ТП $(\mathbf{R}^n, \tau_{\mathbf{R}}^{(n)})$.

Пусть $\mathfrak{X}$ есть def множество всех отображений из $[0,1]$ в $\mathbf{R}^n$, т.е.

$$\mathfrak{X} = \{[0,1] \to \mathbf{R}^n\}.$$

Мы оснащаем $\mathfrak{X}$ топологией $\otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}]$ тихоновского произведения [17] экземпляров ТП

$$(\mathbf{R}^n, \tau_{\mathbf{R}}^{(n)})$$

с индексным множеством $[0,1]$. Итак, далее рассматривается хаусдорфово ТП

$$(\mathfrak{X}, \ \ \otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}]).$$

Введем в рассмотрение оператор

$$\mathbf{g} : \ \ \mathbf{P}(\mathcal{L}) \to \mathfrak{X} \tag{2.29}$$

посредством следующего правила

$$\mathbf{g}(\mu) \triangleq \tilde{\varphi}_\mu \quad \forall \mu \in \mathbf{P}(\mathcal{L}). \tag{2.30}$$

Из (2.24) легко следует по определению $*$-слабой топологии, что при $t \in [0,1]$ отображение $\mu \mapsto \tilde{\varphi}_\mu(t) : \mathbf{P}(\mathcal{L}) \to \mathbf{R}^n$ непрерывно в смысле ТП (2.28). По определению $\otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}]$ имеем тогда [11, с. 35] (см. (2.25), (2.30)), что оператор $\mathbf{g}$ непрерывен в смысле ТП

$$(\mathbf{P}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})), \ \ (\mathfrak{X}, \otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}]), \tag{2.31}$$

т.е. справедливо

$$\mathbf{g} \in C(\mathbf{P}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L}), \mathfrak{X}, \otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}]). \tag{2.32}$$

Свойство (2.32) оператора (2.29) как раз и выражает упомянутую непрерывность в смысле ТП (2.31). По смыслу, (2.30) есть усложненная версия (2.27). Кроме того, (2.30) можно рассматривать в виде обобщенной версии оператора

$$\mathbf{s} : \ \ \mathbb{F} \to \mathfrak{X}, \tag{2.33}$$

определяемого следующим правилом

$$\mathbf{s}(f) \triangleq \varphi_f \quad \forall f \in \mathbb{F}. \tag{2.34}$$

В (2.33), (2.34) определен естественный оператор системы, связанный с интегрированием обычных управлений. Введем теперь ограничение асимптотического характера, формализуемые, как и в [11, 12, 13], в виде семейств множеств со свойством "полумультипликативности".

Если $\delta \in]0, \infty[$, то полагаем

$$F_\delta \triangleq \{f \in \mathbb{F} \ \mid \exists t \in I : \{\tau \in I \mid f(\tau) \neq 0\} \subset [t, t+\delta[\}. \tag{2.35}$$

Кроме того, будем рассматривать непустое семейство

$$\mathcal{F}_1 \triangleq \{F_\delta : \delta \in]0, \infty[\}. \tag{2.36}$$

Из (2.35), (2.36) легко следует свойство

$$\mathcal{F}_1 \in \mathcal{B}[\mathbb{F}]. \tag{2.37}$$

В (2.37) мы учли следующее свойство (см.(2.35)): если $\delta_1 \in]0, \infty[$, $\delta_2 \in]0, \infty[$ и $\delta_1 < \delta_2$, то $F_{\delta_1} \subset F_{\delta_2}$. В самом деле, пусть $f \in F_{\delta_1}$. Тогда, в силу (2.35), для некоторого $t \in I$ имеет место

$$\{\tau \in I \mid f(\tau) \neq 0\} \subset [t, t+\delta_1[\ \subset \ [t, t+\delta_2[.$$

Значит, найдется момент $t \in I$ такой, что $\{\tau \in I | f(\tau) \neq 0\} \subset [t, t + \delta_2[$; последнее означает в силу (2.35), что $f \in F_{\delta_2}$. С учетом установленной монотонности отображения $\delta \mapsto F_\delta\ :]0, \infty[\to \mathcal{P}(\mathbb{F})$ мы и получаем (2.37).

Отметим, что при $t \in I$ и $\alpha \in\ ]0, \infty[$ множество $[t, t + \delta[\cap I$ непременно является элементом $\mathcal{L}$, а тогда индикатор [24, с.51] этого множества, определенный на I, есть элемент $\mathbf{B}_0(I, \mathcal{L})$. В этой связи условимся о следующем обозначении: если $A \in \mathcal{P}(I)$, то $\mathbb{X}_A$ есть def такая функция из I в двоеточие $\{0; 1\}$, что $(\mathbb{X}_A(t') \triangleq 1 \quad \forall t' \in A) \& (\mathbb{X}_A(t'') \triangleq 0 \quad \forall t'' \in I \setminus A)$; рассматриваемый сейчас вариант $\mathbb{X}_A$ индикатора множества A отличается от упоминаемого ранее областью определения. Возвращаясь к упомянутому случаю $t \in I$ и $\alpha \in]0, \infty[$, заметим, что $[t, t + \alpha[\cap I = [t, \inf(\{t + \alpha; 1\})[= [t, t + \inf(\{\alpha; 1 - t\})[\in \mathcal{L}$, где $\inf(\{\alpha; 1 - t\}) > 0$ и $\mathbb{X}_{[t,t+\alpha[\cap I} \in \mathbf{B}_0^+(I, \mathcal{L})$, причем, как легко видеть, $\int\limits_I \mathbb{X}_{[t,t+\alpha[\cap I} d\lambda = \lambda([t, t + \alpha[\cap I) = \lambda([t, t + \inf(\{\alpha; 1 - t\})[) = \inf(\{\alpha; 1 - t\})$; как следствие, получаем

$$f^0_{t,\alpha} \triangleq \frac{1}{\inf(\{\alpha; 1 - t\})} \mathbb{X}_{[t,t+\alpha[\cap I} \ \in \mathbb{F}. \tag{2.38}$$

Полагаем с учетом (2.38), что $\forall \delta \in]0, \infty[$

$$F^0_\delta \triangleq \{f^0_{t,\alpha}\ :\ t \in I,\ \alpha \in]0, \delta]\}\ \in \mathcal{P}(\mathbb{F}). \tag{2.39}$$

Через $\mathcal{F}_2$ обозначаем семейство всех множеств $F^0_\delta, \ \ \delta \in]0, \infty[$:

$$\mathcal{F}_2 \triangleq \{F^0_\delta : \delta \in]0, \infty[\}.$$

Если $\delta_1 \in]0, \infty[,\ \delta_2 \in]0, \infty[$ и $\delta_1 < \delta_2$, то $]0, \delta_1] \subset]0, \delta_2]$ и, в силу (2.39)

$$F^0_{\delta_1} \subset F^0_{\delta_2}. \tag{2.40}$$

Свойство (2.40) означает, в частности, что

$$\mathcal{F}_2 \in \mathcal{B}[\mathbb{F}]. \tag{2.41}$$

Сравним $\mathcal{F}_1$ (2.37) и $\mathcal{F}_2$ (2.41). Если $t \in I$ и $\alpha \in\ ]0, \infty[$, то

$$\{\tau \in I \mid f^0_{t,\alpha}(\tau) \neq 0\} \subset\ [t, t + \alpha[\cap I\ =\ [t, t + \inf(\{\alpha; 1 - t\})[\subset\ [t, t + \alpha[; \tag{2.42}$$

если же теперь $\alpha \in\ ]0, \delta]$, то из (2.42) тем более следует, что

$$\{\tau \in I \mid f^0_{t,\alpha}(\tau) \neq 0\} \subset [t, t + \delta[.$$

В силу (2.35), (2.38) имеем в последнем случае (при заданном $\delta > 0$) $f^0_{t,\alpha} \in F_\delta$. С учетом (2.39) имеем в виде следствия свойство: если $\delta \in]0, \infty[$, то

$$F^0_\delta \subset F_\delta. \tag{2.43}$$

Из (2.36), (2.43) получаем, что

$$\forall F' \in \mathcal{F}_1 \;\; \exists F'' \in \mathcal{F}_2 : \quad F'' \subset F'. \tag{2.44}$$

Как следствие, мы получаем $\forall F' \in \mathcal{F}_1$

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}_2} cl(\mathbf{s}^1(F), \otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}]) \;\subset\; cl(\mathbf{s}^1(F'), \otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}]).$$

Следовательно, имеет место выражение

$$(\otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}] - LIM)[\mathcal{F}_2|\mathbf{s}] \;\subset\; (\otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}] - LIM)[\mathcal{F}_1|\mathbf{s}]. \tag{2.45}$$

Далее будем использовать теорему 2.5.2 [12]. Для этого построим специальную процедуру компактификации множества $\mathbb{F}$, определяя (см.(2.22)) отображение

$$\mathbf{m} : \; \mathbb{F} \to \mathbf{P}(\mathcal{L})$$

по правилу:

$$\mathbf{m}(f) \triangleq f * \lambda \;\; \forall f \in \mathbb{F}.$$

Иными словами, $\mathbf{m}$ есть

$$f \mapsto f * \lambda \;\; : \;\; \mathbb{F} \to \mathbf{P}(\mathcal{L}), \tag{2.46}$$

причем (см.(2.22))

$$\mathbf{P}(\mathcal{L}) = cl(\mathbf{m}^1(\mathbb{F}), \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})). \tag{2.47}$$

Из (2.23), (2.24) и (2.46) вытекает, что при $f \in \mathbb{F}$, $\mu \triangleq \mathbf{m}(f) = f * \lambda$ и $t \in [0,1]$ непременно

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\mu(t) = \tilde{\varphi}_{f*\lambda}(t) &= \Phi(t,0)x_0 + \int\limits_{[0,t[} \Phi(t,\tau)b(\tau)(f*\lambda)(d\tau) = \\ &= \Phi(t,0)x_0 + \int\limits_{[0,t[} f(\tau)\Phi(t,\tau)b(\tau)\lambda(d\tau) = \; \varphi_f(t). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Коль скоро в (2.48) выбор t был произвольным, имеем для $f \in \mathbb{F}$ равенство:

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{m})(f) = \mathbf{g}(\mathbf{m}(f)) = \tilde{\varphi}_{\mathbf{m}(f)} = \tilde{\varphi}_{f*\lambda} = \varphi_f = \mathbf{s}(f).$$

Стало быть, у нас имеет место

$$\mathbf{s} = \mathbf{g} \circ \mathbf{m}. \tag{2.49}$$

Из (2.49) и теоремы 2.5.2 монографии [12] получаем (с учетом компактности первого ТП в (2.28)) $\forall \mathcal{X} \in \mathcal{B}[\mathbb{F}]$

$$\bigcap_{U \in \mathcal{X}} cl(\mathbf{s}^1(U), \otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}]) \ = \ \mathbf{g}^1(\bigcap_{U \in \mathcal{X}} cl(\mathbf{m}^1(U), \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L}))) \tag{2.50}$$

В качестве $\mathcal{X}$ в (2.50) допустимо (см. (2.36), (2.41)) использовать $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. В целях сокращения обозначений условимся полагать $\forall \mathcal{X} \in \mathcal{B}[\mathbb{F}]$

$$(att)[\mathcal{X}] \triangleq \bigcap_{U \in \mathcal{X}} cl(\mathbf{m}^1(U), \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})). \tag{2.51}$$

С учетом (2.1), (2.50), (2.51) имеем $\forall \mathcal{X} \in \mathcal{B}[\mathbb{F}]$

$$(\otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}] - LIM)[\mathcal{X}|\mathbf{s}] = \mathbf{g}^1((att)[\mathcal{X}]). \tag{2.52}$$

В связи с использованием в (2.51), (2.52) конкретных версий $\mathcal{X}$ отметим (см. (2.36)), что

$$(att)[\mathcal{F}_1] = \bigcap_{\delta \in]0,\infty[} cl(\mathbf{m}^1(F_\delta), \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})) = \bigcap_{\delta \in]0,\infty[} cl(\{f * \lambda : f \in F_\delta\}, \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})). \tag{2.53}$$

Точно так же, используя (2.51) и определения $\mathcal{F}_2$, мы получаем, что

$$(att)[\mathcal{F}_2] = \bigcap_{\delta \in]0,\infty[} cl(\mathbf{m}^1(F_\delta^0), \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})) = \bigcap_{\delta \in]0,\infty[} cl(\{f * \lambda : f \in F_\delta^0\}, \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})). \tag{2.54}$$

Из (2.44), (2.53), (2.54) имеем $\forall H \in \mathcal{F}_1$

$$(att)[\mathcal{F}_2] \subset cl(\{f * \lambda : f \in H\}, \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})).$$

Как следствие (см.(2.53))

$$(att)[\mathcal{F}_2] \subset (att)[\mathcal{F}_1]. \tag{2.55}$$

3 Структура множеств притяжения

Наша ближайшая цель будет состоять в установлении совпадения множеств, участвующих в (2.55); для получающегося при этом МП в пространстве обобщенных управлений-мер будет получено представление в терминах множества (2.16).

Лемма 3.1 *Имеет место вложение* $(att)[\mathcal{F}_1] \subset \mathbf{P}_*(\mathcal{L})$

Доказательство. Пусть $\mu \in (att)[\mathcal{F}_1]$. Из (2.51), (2.53) следует, в частности, что

$$\mu \in \mathbf{P}(\mathcal{L}). \tag{3.1}$$

Из (2.37), (2.51), (2.53) следует, что [12, §5.2] для некоторой направленности $(D, \preceq, u)$ в $\mathbb{F}$ выполняются условия

$$(\forall H \in \mathcal{F}_1 \ \exists d_1 \in D \ \forall d_2 \in D \ (d_1 \preceq d_2) \Rightarrow (u(d_2) \in H)) \ \& \ ((D, \preceq, \mathbf{m} \circ u) \stackrel{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu). \tag{3.2}$$

Из (2.36), (3.2) получаем, что

$$(\forall \delta \in]0, \infty[\ \exists d_1 \in D \ \forall d_2 \in D \ (d_1 \preceq d_2) \Rightarrow (u(d_2) \in F_\delta)) \ \& \ ((D, \preceq, \mathbf{m} \circ u) \stackrel{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu). \tag{3.3}$$

Отметим, что $u : D \to \mathbb{F}$, а тогда $u(d) : I \to [0, \infty[$ при $d \in D$. Введем $\forall d \in D$

$$T_d \triangleq \{\tau \in I \mid u(d)(\tau) \neq 0\}. \tag{3.4}$$

Из (2.35), (3.3) и (3.4) следует, что $\forall \delta \in]0, \infty[\ \ \exists d_1 \in D \ \forall d_2 \in D$

$$(d_1 \preceq d_2) \Rightarrow (\exists t \in I : \ T_{d_2} \subset [t, t + \delta[). \tag{3.5}$$

Напомним, что в силу (2.21) при $\mathbf{d} \in D$ имеет место $u(\mathbf{d}) \in \mathbb{F}$, что означает, в частности, свойство $u(\mathbf{d}) \in \mathbf{B}_0^+(I, \mathcal{L})$ и, кроме того,

$$\int_I u(\mathbf{d}) d\lambda = 1; \tag{3.6}$$

стало быть, $u(\mathbf{d}) : I \to [0, \infty[$, причем, в силу (3.6),

$$\exists \tau \in I : u(\mathbf{d})(\tau) \neq 0.$$

Стало быть, имеет место $T_{\mathbf{d}} \in \mathcal{P}'(I) \ \ \forall \mathbf{d} \in D$. Поэтому корректно определяется

$$\tau_{\mathbf{d}} \triangleq \inf(T_{\mathbf{d}}) \in I \ \ \forall d \in D.$$

Вернемся к (3.5): при $\delta \in]0, \infty[$ имеем некоторое $d_1 \in D$ такое, что для $d_2 \in D$ со свойством $d_1 \preceq d_2$ имеет место

$$T_{d_2} \subset [t, t + \delta[\tag{3.7}$$

для некоторого $t \in I$; стало быть, t - миноранта T_{d_2}, а поэтому $t \leqslant \tau_{d_2}$ и, как следствие, $t + \delta \leqslant \tau_{d_2} + \delta$ и, согласно (3.7),

$$T_{d_2} \subset [\tau_{d_2}, \tau_{d_2} + \delta[.$$

Данное рассуждение показывает, что $\forall \delta \in]0, \infty[\ \exists d' \in D\ \forall d \in D$

$$(d' \preceq d) \Rightarrow (\ T_d \subset [\tau_d, \tau_d + \delta[\ ). \tag{3.8}$$

При этом триплет $(D, \preceq, (\tau_d)_{d \in D})$ является направленностью в I; в частности, $(D, \preceq, (\tau_d)_{d \in D})$ - направленность в $[0,1]$. С учетом компактности отрезка $[0,1]$ можно указать момент $t_* \in [0,1]$, непустое направленное множество $(\mathcal{D}, \sqsubseteq)$ и оператор

$$\mathcal{J} : \mathcal{D} \to D,$$

для которых имеют место свойства

$$\begin{gathered}(\forall \alpha_1 \in \mathcal{D}\ \forall \alpha_2 \in \mathcal{D}\ \ (\alpha_1 \sqsubseteq \alpha_2) \Rightarrow (\mathcal{J}(\alpha_1) \preceq \mathcal{J}(\alpha_2)))\ \& \\ \&\ (\forall d \in D\ \exists \alpha \in \mathcal{D} :\ d \preceq \mathcal{J}(\alpha))\ \ \&\ \ ((\mathcal{D}, \sqsubseteq, (\tau_{\mathcal{J}(\alpha)})_{\alpha \in \mathcal{D}}) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{R}}} t_*)\ ;\end{gathered} \tag{3.9}$$

см. [13, с.39]. Из первых двух утверждений в (3.9) вытекает, что $\forall d \in D$ $\exists \alpha_1 \in \mathcal{D}\ \forall \alpha_2 \in \mathcal{D}$

$$(\alpha_1 \sqsubseteq \alpha_2) \Rightarrow (d \preceq \mathcal{J}(\alpha_2)). \tag{3.10}$$

Из (3.3) и (3.10) вытекает, в частности, что $\forall \delta \in]0, \infty[\ \exists \alpha_1 \in \mathcal{D}\ \forall \alpha_2 \in \mathcal{D}$

$$(\alpha_1 \sqsubseteq \alpha_2) \Rightarrow ((u \circ \mathcal{J})(\alpha_2) \in F_\delta). \tag{3.11}$$

Из последнего в (3.3) положения и (3.10) следует, что

$$(\mathcal{D},\ \sqsubseteq,\ \mathbf{m} \circ u \circ \mathcal{J}) \xrightarrow{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})} \mu. \tag{3.12}$$

В самом деле, пусть $Y \in N_\tau(\mu)$ при $\tau = \tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})$. По определению сходимости по Мору-Смиту имеем из (3.3), что $Y \subset (\mathbf{P}(\mathcal{L}) - ass)[D; \preceq; \mathbf{m} \circ u]$, т.е. для некоторого $d_Y \in D$ имеет место $\forall d \in D$

$$(d_Y \preceq d) \Rightarrow ((\mathbf{m} \circ u)(d) \in Y). \tag{3.13}$$

В силу (3.10) найдется $\alpha_Y \in \mathcal{D}$ такое, что $\forall \alpha \in \mathcal{D}$

$$(\alpha_Y \sqsubseteq \alpha) \Rightarrow (d_Y \preceq \mathcal{J}(\alpha)).$$

С учетом (3.13) получаем $\forall \alpha \in \mathcal{D}$

$$(\alpha_Y \sqsubseteq \alpha) \Rightarrow ((\mathbf{m} \circ u \circ \mathcal{J})(\alpha) \in Y).$$

Это означает, что у нас

$$Y \in (\mathbf{P}(\mathcal{L}) - ass)[\mathcal{D}; \sqsubseteq; \mathbf{m} \circ u \circ \mathcal{J}].$$

Коль скоро Y выбиралось произвольно,

$$N_{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})}(\mu) \subset (\mathbf{P}(\mathcal{L}) - ass)[\mathcal{D}; \sqsubseteq; \mathbf{m} \circ u \circ \mathcal{J}]$$

или, что то же самое, справедливо (3.12). Тем самым, (3.12) установлено. С учетом (2.6) из (3.12) имеем, в частности, сходимость

$$(\mathcal{D}, \sqsubseteq, \mathbf{m} \circ u \circ \mathcal{J}) \stackrel{\tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_{\mathbf{P}(\mathcal{L})}}{\longrightarrow} \mu.$$

Иными словами, у нас

$$(\mathcal{D}, \sqsubseteq, \mathbf{m} \circ u \circ \mathcal{J}) \stackrel{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}})}{\longrightarrow} \mu; \tag{3.14}$$

[13, с.36], поскольку $\tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_{\mathbf{P}(\mathcal{L})} = \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}})|_{\mathbf{P}(\mathcal{L})}$. Из (3.14) вытекает, что $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(\mathcal{D}, \sqsubseteq, ((\mathbf{m} \circ u \circ \mathcal{J})(d)(L))_{d \in \mathcal{D}}) \stackrel{\tau_{\mathbf{R}}}{\longrightarrow} \mu(L). \tag{3.15}$$

С учетом определения $\mathbf{m}$ имеем из (3.15) $\forall L \in \mathcal{L}$ сходимость

$$(\mathcal{D}, \sqsubseteq, (((u \circ \mathcal{J})(d) * \lambda)(L))_{d \in \mathcal{D}}) \stackrel{\tau_{\mathbf{R}}}{\longrightarrow} \mu(L). \tag{3.16}$$

С учетом (2.19) и (2.46) имеем $\forall \alpha \in \mathcal{D}$

$$((u \circ \mathcal{J})(\alpha) * \lambda)(L) = \int\limits_L (u \circ \mathcal{J})(\alpha) d\lambda.$$

Поэтому (3.16) означает на самом деле, что

$$(\mathcal{D}, \sqsubseteq, (\int\limits_L (u \circ \mathcal{J})(\alpha) d\lambda)_{\alpha \in \mathcal{D}}) \stackrel{\tau_{\mathbf{R}}}{\longrightarrow} \mu(L) \quad \forall L \in \mathcal{L}. \tag{3.17}$$

Напомним, что (см. (3.1)), что $\mu(\varnothing) = 0$. Пусть теперь

$$r : [0, 1] \to [0, \infty[\tag{3.18}$$

есть def такая функция, что

$$r(t) \triangleq \mu([0, t[) \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{3.19}$$

Из (3.1) и (3.19) имеем, в частности, что

$$r(0) = \mu(\varnothing) = 0, \tag{3.20}$$

$$r(1) = \mu(I) = 1. \tag{3.21}$$

Если у нас $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, то множества $[0, a[\in \mathcal{L}$ и $[a, b[\in \mathcal{L}$ составляют разбиение множества $[0, b[$ и, с учетом аддитивности μ, получаем

$$\mu([0, b[) = \mu([0, a[) + \mu([a, b[),$$

или, с учетом (3.19), имеем

$$r(b) = r(a) + \mu([a, b[) \geqslant r(a) \tag{3.22}$$

в силу неотрицательности μ. В частности, $\forall a \in [0, 1]$

$$r(a) \leqslant r(1) = 1 \tag{3.23}$$

Соотношения (3.20)-(3.23) в достаточной мере характеризуют r (3.18). Из (3.19), (3.20)-(3.23) имеем свойство

$$r \in (mo)_+[0; 1].$$

В этом случае имеем функцию $(st)[r] : \mathcal{L} \to \mathbf{R}$, для которой $(st)[r](\varnothing) = 0$ и $\forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$ $(st)[r](L) = r(\sup(L)) - r(\inf(L))$. Последнее означает, что при $a \in I$ и при $b \in]a, 1]$

$$(st)[r]([a, b[) = r(b) - r(a).$$

С учетом (3.22) мы имеем, что $\forall a \in I \;\; \forall b \in]a, 1]$

$$(st)[r]([a, b[) = \mu([a, b[) \tag{3.24}$$

Из (3.24) следует, что справедливо

$$\mu = (st)[r]. \tag{3.25}$$

В самом деле, $\mu(\varnothing) = 0 = (st)[r](\varnothing)$; пусть $\tilde{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$. Тогда в силу (2.3) имеем $\tilde{L} = [\tilde{a}, \tilde{b}[$ для некоторых $\tilde{a} \in I$ и $\tilde{b} \in [0, 1]$. В силу непустоты $\tilde{L}$ верно $\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$, а тогда $\tilde{a} \in I$ и $\tilde{b} \in]\tilde{a}, 1]$, что, в силу (3.24) дает

$$(st)[r](\tilde{L}) = (st)[r]([\tilde{a}, \tilde{b}[) = \mu([\tilde{a}, \tilde{b}[) = \mu(\tilde{L}).$$

Поскольку выбор $\tilde{L}$ был произвольным, то $(st)[r](L) = \mu(L)$ $\forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$. Тогда, с учетом совпадения $\mu(\varnothing)$ и $(st)[r](\varnothing)$, имеем $(st)[r] = \mu$, т.е. справедливо (3.25). Заметим, что (3.17) справедливо, в частности, при $L = [0, t[$, где $t \in [0, 1]$. Тогда из (3.17) и (3.19) имеем $\forall t \in [0, 1]$

$$(\mathcal{D}, \sqsubseteq, (\int\limits_{[0,t[} (u \circ \mathcal{J})(\alpha) d\lambda)_{\alpha \in \mathcal{D}}) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{R}}} r(t). \tag{3.26}$$

Вернемся к последнему утверждению в (3.9) с целью установить вид функции r (3.18). Будем учитывать при этом, что $(u \circ \mathcal{J})(\alpha) = u(\mathcal{J}(\alpha))\ \forall \alpha \in \mathcal{D}$. Разумеется, при этом $\mathcal{J}(\alpha) \in D$, $\alpha \in \mathcal{D}$. Это позволяет нам определить $T_{\mathcal{J}(\alpha)}$ при $\alpha \in \mathcal{D}$. В частности, $\tau_{\mathcal{J}(\alpha)}$ для любого $\alpha \in \mathcal{D}$. Наконец,

$$\tau_{\mathcal{J}(\alpha)} = \inf(T_{\mathcal{J}(\alpha)}) \quad \forall \alpha \in \mathcal{D}.$$

В силу (3.9) имеем, в частности, что $\forall \delta \in]0, \infty[\ \exists \alpha_1 \in \mathcal{D}\ \forall \alpha_2 \in \mathcal{D}$

$$(\alpha_1 \sqsubseteq \alpha_2) \Rightarrow (|\tau_{\mathcal{J}(\alpha_2)} - t_*| < \delta). \tag{3.27}$$

Воспользуемся (3.8). Из (3.8), (3.10) вытекает, что $\forall \delta \in]0, \infty[\ \exists \alpha_1 \in \mathcal{D}$ $\forall \alpha_2 \in\ \mathcal{D}$

$$(\alpha_1 \sqsubseteq \alpha_2) \Rightarrow (T_{\mathcal{J}(\alpha_2)} \subset [\tau_{\mathcal{J}(\alpha_2)}, \tau_{\mathcal{J}(\alpha_2)} + \delta[\ ). \tag{3.28}$$

Свойство (3.28) будем использовать в следующих трех возможных случаях реализации момента $t \in [0, 1]$ в соотношении (3.26): 1) $t < t_*$, 2) $t_* < t$, 3) $t = t_*$. Рассмотрим эти случаи.

1) Итак, пусть у нас $t < t_*$. Тогда, в силу (3.27) для некоторого $\alpha' \in \mathcal{D}$ имеем $\forall \alpha \in \mathcal{D}$

$$(\alpha' \sqsubseteq \alpha) \Rightarrow (t < T_{\mathcal{J}(\alpha)}). \tag{3.29}$$

По выбору τ_d, $d \in D$, имеем при $\alpha \in \mathcal{D},\ \ \alpha' \sqsubseteq \alpha$ свойство

$$T_{\mathcal{J}(\alpha)} \subset [t, 1[;$$

см. (3.4). Это означает, что для $\alpha \in \mathcal{D},\ \ \alpha' \sqsubseteq \alpha$,

$$(u \circ \mathcal{J})(\alpha)(\tau) = u(\mathcal{J}(\alpha))(\tau) = 0 \qquad \forall \tau \in [0, t[. \tag{3.30}$$

Из (3.30) получаем, что при $\alpha \in \mathcal{D},\ \ \alpha' \sqsubseteq \alpha$,

$$\int\limits_{[0,t[} (u \circ \mathcal{J})(\alpha) d\lambda = 0. \tag{3.31}$$

В силу (3.26) и (3.31) получаем, что $r(t) = 0$ в нашем первом случае, т.е. в случае $t < t_*$. Итак, $(t < t_*) \Rightarrow (r(t) = 0))$. Поскольку выбор t был произвольным, установлено, что

$$r(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, t_*[. \tag{3.32}$$

2) Пусть $t \in]t_*, 1]$. Тогда $\frac{t - t_*}{2} \in]0, \infty[$ можно использовать в качестве δ в (3.5), (3.27) и (3.28). В самом деле, в силу (3.27) мы можем подобрать $\alpha'_* \in \mathcal{D}$ так, что $\forall \alpha \in \mathcal{D}$

$$(\alpha'_* \sqsubseteq \alpha) \Rightarrow (|\tau_{\mathcal{J}(\alpha)} - t_*| < \frac{t - t_*}{2}). \tag{3.33}$$

С другой стороны, с учетом (3.28) подберем $\alpha''_* \in \mathcal{D}$ так, что при этом $\forall \alpha \in \mathcal{D}$

$$(\alpha''_* \sqsubseteq \alpha) \Rightarrow (T_{\mathcal{J}(\alpha)} \subset [\tau_{\mathcal{J}(\alpha)}, \tau_{\mathcal{J}(\alpha)} + \frac{t - t_*}{2}[). \tag{3.34}$$

Подберем теперь $\alpha_* \in \mathcal{D}$ так, что

$$(\alpha'_* \sqsubseteq \alpha_*) \ \& \ (\alpha''_* \sqsubseteq \alpha_*). \tag{3.35}$$

Такой выбор (3.35) всегда возможен по аксиомам направленных множеств. Пусть теперь $\alpha \in \mathcal{D}$ и $\alpha_* \sqsubseteq \alpha$; тогда из (3.33) и (3.34) следуют свойства

$$(|\tau_{\mathcal{J}(\alpha)} - t_*| < \frac{t - t_*}{2}) \ \& \ (T_{\mathcal{J}(\alpha)} \subset [\tau_{\mathcal{J}(\alpha)}, \tau_{\mathcal{J}(\alpha)} + \frac{t - t_*}{2}[).$$

При этом, конечно, $\tau_{\mathcal{J}(\alpha)} + \frac{t-t_*}{2} < (t_* + \frac{t-t_*}{2}) + \frac{t-t_*}{2} = t$. Это означает, в силу (3.4), что

$$T_{\mathcal{J}(\alpha)} \subset [0, t[, \tag{3.36}$$

а потому, вновь используя (3.4), мы имеем

$$\int\limits_I (u \circ \mathcal{J})(\alpha) d\lambda = \int\limits_{[0,t[} (u \circ \mathcal{J})(\alpha) d\lambda + \int\limits_{[t,1[} (u \circ \mathcal{J})(\alpha) d\lambda = \int\limits_{[0,t[} (u \circ \mathcal{J})(\alpha) d\lambda,$$

поскольку $(u \circ \mathcal{J})(\alpha)(\tau) = u(\mathcal{J}(\alpha))(\tau) = 0$ на $[t, 1[$ в силу (3.4) и (3.36). Но, поскольку $u(\mathcal{J}(\alpha)) \subset \mathbb{F}$, то, (см.(2.21))

$$\int\limits_I (u \circ \mathcal{J})(\alpha) d\lambda = \int\limits_I u(\mathcal{J}(\alpha)) d\lambda = 1.$$

Стало быть, у нас

$$\int\limits_{[0,t[} (u \circ \mathcal{J})(\alpha) d\lambda = 1. \tag{3.37}$$

Коль скоро выбор α был произвольным, имеем из (3.37) свойство $\forall \tilde{\alpha} \in \mathcal{D}$

$$(\alpha_* \sqsubseteq \tilde{\alpha}) \Rightarrow \left(\int\limits_{[0,t[} (u \circ \mathcal{J})(\tilde{\alpha}) d\lambda = 1 \right).$$

В силу (3.26) это означает, что $r(t) = 1$ в нашем случае 2). Итак,

$$r(t) = 1 \qquad \forall t \in]t_*, 1]. \tag{3.38}$$

Осталось рассмотреть случай $t = t_*$.

3)Пусть $t = t_*$. Напомним, что

$$r(t_*) = \mu([0, t_*[) \in [0, \infty[. \tag{3.39}$$

С другой стороны, $t_* \in [0, 1]$, а потому $[0, t_*[\subset I$, и, в силу конечной аддитивности μ, получаем из (3.39) неравенства

$$0 \leqslant r(t_*) \leqslant \mu(I) \leqslant 1. \tag{3.40}$$

Мы установили, что $r(t_*) \in [0, 1]$. Стало быть, наша функция r действует из $[0, 1]$ в $[0, \infty[$ по следующему правилу (см. (3.32), (3.38), (3.40)):

$$(\ r(t) = 0 \ \ \forall t \in [0, t_*[\ ) \ \& \ (\ r(t_*) = \mu([0, t_*[) \in [0, 1]\ ) \ \& \ (r(t) = 1 \ \ \forall t \in]t_*, 1]\ ). \tag{3.41}$$

С другой стороны, t_* таково, что

$$(t_* = 0) \vee (t_* \in]0, 1[) \vee (t_* = 1).$$

Если $t_* = 0$, то наша функция r имеет следующий вид (см. (3.20))

$$(\ r(0) = 0\ ) \ \& \ (r(t) = 1 \ \ \forall t \in]0, 1]\ ). \tag{3.42}$$

Из (3.42) следует, что, в рассматриваемом случае $t_* = 0$ имеет место

$$r = \chi_{]0,1]} \in \mathcal{R}_2,$$

где $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}$. Стало быть, у нас

$$(t_* = 0) \Rightarrow (r \in \mathcal{R}). \tag{3.43}$$

Пусть $t_* \in]0, 1[$. Полагаем $\alpha_* \triangleq \mu([0, t_*[)$; из (3.41) имеем для r представление

$$(\ r(t) = 0 \ \ \forall t \in [0, t_*[\ ) \ \& \ (\ r(t_*) = \alpha_*\ ) \ \& \ (r(t) = 1 \ \ \forall t \in]t_*, 1]\ ).$$

Это означает, в силу представления функции (2.13), что для $\alpha_* \in [0, 1]$

$$r = v_{\alpha_*}[t_*],$$

т.е. $r \in \mathcal{R}_3$, и, в частности, $r \in \mathcal{R}$. Итак,

$$(t_* \in]0, 1[) \Rightarrow (r \in \mathcal{R}). \tag{3.44}$$

Пусть теперь $t_* = 1$. Тогда из (3.41) имеем, что

$$(\ r(t) = 0 \ \ \forall t \in I) \ \& \ (r(1) = 1); \tag{3.45}$$

Из (3.45) имеем следующее равенство $r = \chi_{\{1\}} \in \mathcal{R}_1$. В частности, $r \in \mathcal{R}$ и при $t_* = 1$. Итак,

$$(t_* = 1) \Rightarrow (r \in \mathcal{R}). \tag{3.46}$$

Из (3.43), (3.44), (3.46) получаем во всех случаях свойство

$$r \in \mathcal{R}. \tag{3.47}$$

Из (2.16), (3.25), (3.47) вытекает, что $\mu \in \mathbf{P}_*(\mathcal{L})$. Поскольку выбор μ был произвольным, установлено вложение $(att)[\mathcal{F}_1] \subset \mathbf{P}_*(\mathcal{L})$. $\square$

С учетом (2.15) полезно ввести представление $\mathbf{P}_*(\mathcal{L})$ в виде объединения, полагая

$$\mathbf{P}_*^{(1)}(\mathcal{L}) \triangleq \{(st)[r] : r \in \mathcal{R}_1\} = \{(st)[\chi_{\{1\}}]\}, \tag{3.48}$$

$$\mathbf{P}_*^{(2)}(\mathcal{L}) \triangleq \{(st)[r] : r \in \mathcal{R}_2\} = \{(st)[\chi_{]0,1]}]\}, \tag{3.49}$$

$$\mathbf{P}_*^{(3)}(\mathcal{L}) \triangleq \{(st)[r] : r \in \mathcal{R}_3\}; \tag{3.50}$$

множества (3.48), (3.49) одноэлементны. Из (2.15), (2.16), (3.48)-(3.50) имеем

$$\mathbf{P}_*(\mathcal{L}) = \mathbf{P}_*^{(1)}(\mathcal{L}) \cup \mathbf{P}_*^{(2)}(\mathcal{L}) \cup \mathbf{P}_*^{(3)}(\mathcal{L}). \tag{3.51}$$

Лемма 3.2 $(st)[\chi_{\{1\}}] \in (att)[\mathcal{F}_2]$.

Доказательство. Пусть

$$\mu_* \triangleq (st)[\chi_{\{1\}}]. \tag{3.52}$$

Для представления (3.52) напомним, что (см. (2.12))

$$\chi_{\{1\}} \in (\mathbf{P} - mo)_+[0;1],$$

а потому, согласно (2.11) и (3.52)

$$\mu_* \in \mathbf{P}(\mathcal{L}). \tag{3.53}$$

Если $\delta \in]0,1[$, то полагаем, что $f_\delta^* \in \mathbf{B}_0^+(I,\mathcal{L})$ определяется условиями

$$(\ f_\delta^*(t) \triangleq 0 \ \ \forall t \in [0, 1-\delta[\ ) \ \&\ (\ f_\delta^*(t) \triangleq \frac{1}{\delta} \ \ \forall t \in [1-\delta, 1[\ ). \tag{3.54}$$

Тогда λ-интеграл каждой функции (3.54) есть 1, а потому (см. (2.21))

$$f_\delta^* \in \mathbb{F} \ \ \forall \delta \in]0,1[. \tag{3.55}$$

С учетом (3.55) введем оператор

$$\beta :]0,1[\ \to \ \mathbb{F},$$

для которого $\beta(\delta) \triangleq f^*_\delta \in \mathbb{F}\ \forall \delta \in]0,1[$. Мы оснащаем непустое множество $]0,1[$ направлением $\angle$, двойственным к обычной упорядоченности, т.е. $\angle$ есть бинарное отношение в $]0,1[$, для которого $\forall \delta_1 \in]0,1[\ \forall \delta_2 \in]0,1[\ \ def$

$$(\delta_1 \angle \delta_2) \Leftrightarrow (\delta_2 \leqslant \delta_1).$$

Итак, $(]0,1[, \angle, \beta)$ есть направленность в $\mathbb{F}$. Напомним, что (см. (2.1), (2.51))

$$(att)[\mathcal{F}_2] = (\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}) - LIM)[\mathcal{F}_2 | \mathbf{m}]),$$

а потому, (см. пояснение к (2.1)) $(att)[\mathcal{F}_2]$ есть множество всех $\mu \in \mathbf{P}(\mathcal{L})$ таких, что для некоторой направленности $(D, \preceq, h)$ в $\mathbb{F}$ выполняется

$$(\ \mathcal{F}_2 \subset (\mathbb{F} - ass)[D; \preceq; h]\ )\ \ \&\ \ (\ (D, \preceq, \mathbf{m} \circ h) \overset{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu). \tag{3.56}$$

Покажем, что $(]0,1[, \angle, \beta)$ может быть использована в (3.56) для случая $\mu = \ \mu_*$. В самом деле, пусть $\Phi \in \mathcal{F}_2$. С учетом определения $\mathcal{F}_2$ подберем $\gamma \in]0, \infty[$ так, что $\Phi = F^0_\gamma$. Стало быть, в силу (2.39)

$$\Phi = \{f^0_{t,\alpha} : t \in I, \alpha \in]0, \gamma]\}. \tag{3.57}$$

Пусть $\overline{\gamma} \triangleq \inf(\{\frac{1}{2}; \gamma\})$. Тогда $\overline{\gamma} \in]0,1[$. Пусть $\overline{\delta} \in]0,1[$ таково, что $\overline{\gamma} \angle \overline{\delta}$. Тогда, по определению $\angle$, имеем

$$\overline{\delta} \leqslant \overline{\gamma}.$$

Рассмотрим $\beta(\overline{\delta}) = f^*_{\overline{\delta}} \in \mathbb{F}$. При этом $\beta(\overline{\delta}) \in \mathbf{B}^+_0(I, \mathcal{L})$, и, кроме того, имеют место свойства $(\beta(\overline{\delta})(t) = 0\ \ \forall t \in [0, 1 - \overline{\delta}[\ )\ \ \&\ \ (\beta(\overline{\delta})(t) = \frac{1}{\overline{\delta}}\ \ \forall t \in [1 - \overline{\delta}, 1[\ )$. Рассмотрим момент $\overline{t} \triangleq 1 - \overline{\delta} \in I$ и функцию

$$f^0 \triangleq f^0_{\overline{t}, \overline{\delta}} \in \mathbb{F}. \tag{3.58}$$

В частности, $f^0 : I \ \ \rightarrow\ \ [0, \infty[$. Заметим, что $\overline{\delta} = 1 - \overline{t}$, а потому в силу (2.38) и (3.58) имеем

$$f^0 = \frac{1}{\overline{\delta}} \mathbb{X}_{[\overline{t}, \overline{t} + \overline{\delta}[\cap I}. \tag{3.59}$$

Но $\overline{t} + \overline{\delta} = 1$, $\overline{t} \geqslant 1 - \overline{\gamma} \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$. Стало быть, $\overline{t} \in]0,1[$ и $[\overline{t}, \overline{t} + \delta[= [\overline{t}, 1[\subset I$, а тогда (см. (3.59))

$$f^0 = \frac{1}{\overline{\delta}} \mathbb{X}_{[\overline{t}, 1[} = \frac{1}{\overline{\delta}} \mathbb{X}_{[1 - \overline{\delta}, 1[} = \beta(\overline{\delta}). \tag{3.60}$$

С другой стороны, у нас $\overline{\delta} \in]0,\gamma]$ (т.к. $\overline{\gamma} \leqslant \gamma$) и $\overline{t} \in I$, а потому в согласии с (3.57)

$$f^0 \in \Phi.$$

В итоге (см. (3.60)) $\beta(\overline{\delta}) \in \Phi$ (при условии $\overline{\gamma}\angle\overline{\delta}$). Поскольку выбор $\overline{\delta}$ был произвольным, установлено, что $\forall \delta \in]0,1[$

$$(\overline{\gamma}\angle\delta) \Rightarrow (\beta(\delta) \in \Phi).$$

Мы установили, что $\exists\hat{\delta} \in]0,1[\ \ \forall\delta \in]0,1[$

$$(\hat{\delta}\angle\delta) \Rightarrow (\beta(\delta) \in \Phi).$$

Это означает, что справедливо

$$\Phi \in (\mathbb{F} - ass)[\ ]0,1[;\angle;\beta].$$

Поскольку Φ выбиралось произвольно, установлено

$$\mathcal{F}_2 \subset (\mathbb{F} - ass)[\ ]0,1[;\angle;\beta]. \tag{3.61}$$

Напомним, что (см.(2.6))

$$\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}) = \tau_\otimes(\mathcal{L})|_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}). \tag{3.62}$$

По определению топологии $\tau_\otimes(\mathcal{L})$ имеем из (3.62), что

$$\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}) = \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}})|_{\mathbf{P}(\mathcal{L})}. \tag{3.63}$$

см. в этой связи [12, §4.2]. Покажем, что

$$(\ ]0,1[,\angle,\mathbf{m}\circ\beta\ ) \stackrel{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu_*. \tag{3.64}$$

С учетом (3.63) для доказательства (3.64) достаточно установить сходимость

$$(\ ]0,1[,\angle,\mathbf{m}\circ\beta\ ) \stackrel{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}})}{\longrightarrow} \mu_*; \tag{3.65}$$

(см. [13, с. 36]). По определению $\mathbf{m}$ (см. (2.46)) $\mathbf{m}\circ\beta$ есть оператор

$$\xi \mapsto \beta(\xi) * \lambda\ \ :]0,1[\to \mathbf{P}(\mathcal{L}).$$

Иными словами, $\mathbf{m}\circ\beta$ переводит $]0,1[$ в $\mathbf{P}(\mathcal{L})$ по правилу

$$(\mathbf{m}\circ\beta)(\delta) = f^*_\delta * \lambda \quad \forall\lambda \in]0,1[. \tag{3.66}$$

Из (3.66) имеем, в частности, $\forall \delta \in]0,1[\ \forall L \in \mathcal{L}$

$$(\mathbf{m} \circ \beta)(\delta)(L) = \int\limits_L f_\delta^* d\lambda. \tag{3.67}$$

При $L = \varnothing$ из (3.67) по свойству конечной аддитивности $\forall \delta \in]0,1[$

$$(\mathbf{m} \circ \beta)(\delta)(L) = \int\limits_L f_\delta^* d\lambda = 0 = \mu_*(L).$$

Это означает, в частности, что

$$(\ ]0,1[, \angle, ((\mathbf{m} \circ \beta)(\delta)(\varnothing))_{\delta \in]0,1[}\ ) \overset{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}})}{\longrightarrow} \mu_*(\varnothing). \tag{3.68}$$

Рассмотрим случай, когда $L \in \mathcal{L}$, $L \neq \varnothing$. Тогда по определению $\mathcal{L}$ имеем, что $L = [a, b[$ для некоторых $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$, $a < b$. Обсудим отдельно следующие два возможных случая: 1) $b \in I$, 2) b=1.

1) Пусть $b \in I$, т.е. $0 \leqslant a < b < 1$ и $\kappa \triangleq 1 - b \in]0,1[$. Пусть $\delta' \in]0,1[$ таково, что $\kappa \angle \delta'$. Это означает, что $\delta' \leqslant \kappa$. Из определения $f_{\delta'}^*$ следует, что $f_{\delta'}^*(t) = 0$ при $t \in [0, 1-\delta'[$. Но $b = 1 - \kappa \leqslant 1 - \delta'$, а тогда $f_{\delta'}^*(t) = 0\ \forall t \in [0, b[$. Как следствие, у нас

$$\int\limits_L f_{\delta'}^* d\lambda = \int\limits_{[a,b[} f_{\delta'}^* d\lambda = 0.$$

Поскольку выбор δ' был произвольным, установлено, что $\forall \delta \in]0,1[$

$$(\kappa \angle \delta) \Rightarrow \left(\int\limits_L f_\delta^* d\lambda = 0 \right).$$

Поэтому имеет место $\exists \delta_1 \in]0,1[\ \ \forall \delta_2 \in]0,1[$

$$(\delta_1 \angle \delta_2) \Rightarrow \left(\int\limits_L f_{\delta_2}^* d\lambda \right) = 0 \tag{3.69}$$

С другой стороны, $a < b < 1$ и [23, с.114]

$$\mu_*(L) = \mu_*([a,b[) = (st)[\chi_{\{1\}}]([a,b[) = [\chi_{\{1\}}](b) - [\chi_{\{1\}}](a) = 0.$$

С учетом (3.69) имеем теперь в случае 1), что $\exists \delta_1 \in]0,1[\ \ \forall \delta_2 \in]0,1[$

$$(\delta_1 \angle \delta_2) \Rightarrow \left(\int\limits_L f_{\delta_2}^* d\lambda = \mu_*(L) \right).$$

Итак, истинна импликация

$$(b \in I) \Rightarrow (\exists \delta_1 \in]0,1[\ \ \forall \delta_2 \in]0,1[\ \ ((\delta_1 \angle \delta_2) \Rightarrow (\int\limits_L f^*_{\delta_2} d\lambda = \mu_*(L)))). \qquad (3.70)$$

2) Пусть $b = 1$. Тогда $a < 1$ и $L = [a, 1[$, а потому (см.(3.52))

$$\mu_*(L) = (st)[\chi_{\{1\}}]([a, 1[) = [\chi_{\{1\}}](1) - [\chi_{\{1\}}](a) = 1 - 0 = 1; \qquad (3.71)$$

см. [23, с.114]. При этом $\overline{\zeta} \triangleq 1 - a \in]0, 1]$ и $\zeta \triangleq \frac{\overline{\zeta}}{2} \in]0, 1[$. Пусть $\delta'' \in]0, 1[$ таково, что $\zeta \angle \delta''$. Это означает, что $\delta'' \leqslant \zeta$ и $a = 1 - \overline{\zeta} \leqslant 1 - \zeta \leqslant 1 - \delta''$; последнее означает, что

$$[1 - \delta'', 1[\subset [a, 1[= L.$$

Поэтому имеем равенства

$$\int\limits_L f^*_{\delta''} d\lambda = \int\limits_{[a, 1-\delta''[} f^*_{\delta''} d\lambda + \int\limits_{[1-\delta'', 1[} f^*_{\delta''} d\lambda = 0 + \frac{1}{\delta''} \lambda([1 - \delta'', 1[) = 1.$$

Поскольку выбор δ'' был произвольным, установлено, что $\forall \delta \in]0, 1[$

$$(\zeta \angle \delta) \Rightarrow (\int\limits_L f^*_\delta d\lambda = \mu_*(L));$$

(см. (3.52)). Мы установили, что и в случае 2) имеет место $\exists \delta_1 \in]0, 1[$ $\forall \delta_2 \in]0, 1[$

$$(\delta_1 \angle \delta_2) \Rightarrow \left(\int\limits_L f^*_{\delta_2} d\lambda = \mu_*(L) \right).$$

Стало быть, истинна импликация

$$(b = 1) \Rightarrow (\exists \delta_1 \in]0,1[\ \ \forall \delta_2 \in]0,1[\ \ ((\delta_1 \angle \delta_2) \Rightarrow (\int\limits_L f^*_{\delta_2} d\lambda = \mu_*(L)))). \qquad (3.72)$$

Из (3.70), (3.72) следует, что во всех возможных случаях $\exists \delta_1 \in]0, 1[$ $\forall \delta_2 \in]0, 1[$

$$(\delta_1 \angle \delta_2) \Rightarrow \left(\int\limits_L f^*_{\delta_2} d\lambda = \mu_*(L) \right). \qquad (3.73)$$

Соотношение (3.73) определяет важный тип сходимости, связанный с топологией $\tau_0(\mathcal{L})$ [12, гл. IV] множества к.-а. мер ограниченной вариации. Эта топология в данной работе не используется. Поэтому ограничимся следствием (3.73): при $L \in \mathcal{L}$ и $L \neq \varnothing$

$$\left( ]0,1[, \angle, \left(\int\limits_L f_\delta^* d\lambda \right)_{\delta \in]0,1[} \right) \to \mu_*(L) .$$

С учетом (3.67) и (3.68) имеем

$$(\ ]0,1[, \angle, ((\mathbf{m} \circ \beta)(\delta)(L))_{\delta \in]0,1[}) \to \mu_*(L) \quad \forall L \in \mathcal{L}. \tag{3.74}$$

Из (3.74) имеем [11, с.35] сходимость (3.65), т.е.

$$(\ ]0,1[, \angle, \mathbf{m} \circ \beta\ ) \overset{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}})}{\longrightarrow} \mu_*.$$

Стало быть, верно и (3.64); с учетом (3.61) получаем

$$(\mathcal{F}_2 \subset (\mathbb{F} - ass)[]0,1[; \angle; \beta]) \ \&\ ((\ ]0,1[, \angle, \mathbf{m} \circ \beta\ ) \overset{\tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu_*).$$

В этом случае (см. (3.53), (3.56))

$$\mu_* \in (att)[\mathcal{F}_2];$$

с учетом (3.52) получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 3.3 $(st)[\chi_{]0,1]}] \in (att)[\mathcal{F}_2]$.

Доказательство. Введем в рассмотрение

$$\nu_* \triangleq (st)[\chi_{]0,1]}]. \tag{3.75}$$

При этом имеем согласно (2.12) свойство

$$\chi_{]0,1]} \in (\mathbf{P} - mo)_+[0;1]. \tag{3.76}$$

С учетом (2.11), (3.75) и (3.76) получаем, что

$$\nu_* \in \mathbf{P}(\mathcal{L}). \tag{3.77}$$

Если $\delta \in]0,1[$, то (в данном доказательстве)

$$f_\delta^* \in \mathbf{B}_0^+(I, \mathcal{L})$$

есть def такая функция, что

$$(\ f^*_\delta(t) \triangleq \frac{1}{\delta}\ \ \forall t \in [0,\delta[\ ) \ \&\ (\ f^*_\delta(t) \triangleq 0\ \ \forall t \in [\delta, 1[\ ). \tag{3.78}$$

Легко видеть, $f^*_\delta \in \mathbb{F} \quad \forall \delta \in]0,1[$. Как и в лемме (3.2) введем оператор

$$\beta :]0,1[\to \mathbb{F},$$

для которого $\forall \delta \in]0,1[$

$$\beta(\delta) \triangleq f^*_\delta \in \mathbb{F}.$$

Мы оснащаем непустое множество $]0,1[$ направлением $\angle$, двойственным к обычной упорядоченности $\leqslant$. Иными словами (как и в лемме (3.2)), $\angle$ есть бинарное отношение в множестве $]0,1[$ такое, что для $\delta_1 \in]0,1[$ и $\delta_2 \in]0,1[$ def

$$(\delta_1 \angle \delta_2) \Leftrightarrow (\delta_2 \leqslant \delta_1).$$

В виде $(\ ]0,1[, \angle, \beta)$ имеем направленность в $\mathbb{F}$. Отметим, что в данном рассуждении вновь используется представление $(att)[\mathcal{F}_2]$ в виде множества всех $\mu \in \mathbf{P}(\mathcal{L})$ таких, что для некоторой направленности $(D, \preceq, h)$ в $\mathbb{F}$ имеет место (3.56). Мы покажем, что в (3.56) можно использовать вариант

$$(D, \preceq, h) = (\ ]0,1[, \angle, \beta).$$

В самом деле, фиксируем, как и в лемме (3.2), множество $\Phi \in \mathcal{F}_2$, для которого подбираем $\gamma \in]0,\infty[$ так, что $\Phi = F^0_\gamma$, т.е. Φ есть множество всех управлений $f^0_{t,\alpha}$, $t \in I$, $\alpha \in]0,\gamma]$. Для $\overline{\gamma} \triangleq \inf(\{\frac{1}{2};\gamma\})$ покажем, что

$$\forall \delta \in]0,1[\quad ((\overline{\gamma} \angle \delta) \Rightarrow (\beta(\delta) \in \Phi)).$$

Пусть $\theta \in]0,1[$ обладает свойством $\overline{\gamma}\angle\theta$, что означает $\theta \leqslant \overline{\gamma}$. Рассмотрим $\beta(\theta) = f^*_\theta \in \mathbb{F}$. Для этого рассмотрим функцию

$$f^0 \triangleq f^0_{0,\theta} \in \mathbb{F} \tag{3.79}$$

(см.(2.38)). Здесь мы отметим, что $\inf(\{\theta; 1-t\}) = \theta$ при $t = 0$, а $[t, t+\theta[\cap I = [t, t+\theta[$ при том же значении t. В итоге, из (2.38) вытекает, что

$$f^0 = \frac{1}{\theta}\mathbb{X}_{[0,\theta[}. \tag{3.80}$$

Заметим теперь, что $\theta \in]0,\gamma]$, а поэтому

$$f^0_{t,\theta} \in \Phi \quad \forall t \in I.$$

В частности, из (3.79) следует, что

$$f^0 \in \Phi. \tag{3.81}$$

Рассмотрим теперь функцию $\beta(\theta) \in \mathbb{F}$. С учетом (3.78) имеем

$$(\beta(\theta)(t) = \frac{1}{\theta} \ \ \forall t \in [0, \theta[) \ \& \ (\beta(\theta)(t) = 0 \ \ \forall t \in [\theta, 1[).$$

С учетом (3.80) мы получаем $\beta(\theta) = f^0$. В силу (3.81) имеем

$$\beta(\theta) \in \Phi$$

(при условии $\overline{\gamma}\angle\theta$). Мы установили импликацию

$$(\overline{\gamma}\angle\theta) \Rightarrow (\beta(\theta) \in \Phi). \tag{3.82}$$

Так как выбор θ был произвольным, из (3.82) имеем:

$$\forall \alpha \in]0,1[\quad ((\overline{\gamma}\angle\alpha) \Rightarrow (\beta(\alpha) \in \Phi)).$$

Поскольку $\overline{\gamma} \in]0,1[$, установлено, что $\exists \delta_1 \in]0,1[\ \ \forall \delta_2 \in]0,1[$

$$(\delta_1 \angle \delta_2) \Rightarrow (\beta(\delta_2) \in \Phi).$$

Следовательно, имеет место

$$\Phi \in (\mathbb{F} - ass)[\,]0,1[; \angle; \beta].$$

Итак, поскольку выбор Φ был произвольным, вложение

$$\mathcal{F}_2 \subset (\mathbb{F} - ass)[\,]0,1[; \angle; \beta] \tag{3.83}$$

установлено. Осталось установить, что

$$[\,]0,1[, \angle, \mathbf{m} \circ \beta] \overset{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \nu_*. \tag{3.84}$$

Здесь мы снова учитываем, что

$$\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}) = \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}})|_{\mathbf{P}(\mathcal{L})}$$

(см. [12, §4.2]). Поскольку у нас

$$\mathbf{m} \circ \beta : \ ]0,1[\to \mathbf{P}(\mathcal{L})$$

и $\nu_* \in \mathbf{P}(\mathcal{L})$, то для обоснования (3.84) достаточно установить сходимость

$$[\,]0,1[, \angle, \mathbf{m} \circ \beta] \overset{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}})}{\longrightarrow} \nu_*; \tag{3.85}$$

см. [13, с.36]. С учетом этого ограничимся проверкой (3.85). Учтем, что сходимость (3.85) эквивалентна свойству

$$(\,]0,1[,\angle,((\mathbf{m}\circ\beta)(\delta)(L))_{\delta\in]0,1[})\to\nu_*(L)\quad\forall L\in\mathcal{L}. \tag{3.86}$$

см. [11, с.35]. С учетом этого будем проверять (3.86). При $L=\varnothing$ сходимость в (3.86) очевидна, поскольку $\nu_*(\varnothing)=0$ и

$$(\mathbf{m}\circ\beta)(\delta)(\varnothing)=0\quad\forall\delta\in]0,1[.$$

Итак, у нас имеет место

$$(\,]0,1[,\angle,((\mathbf{m}\circ\beta)(\delta)(\varnothing))_{\delta\in]0,1[})\to\nu_*(\varnothing). \tag{3.87}$$

Пусть $L\in\mathcal{L}\setminus\{\varnothing\}$. Тогда можно указать $a\in[0,1]$, $b\in[0,1]$, $a<b$, для которых $L=[a,b[$. При этом у нас

$$(a=0)\;\vee\;(0<a).$$

Рассмотрим оба случая отдельно.

1) Пусть $a=0$. Тогда $b\in]0,1]$. Разумеется, $b/2\in]0,1[$. Пусть $\overline{\delta}\in]0,1[$ таково, что $b/2\angle\overline{\delta}$. Тогда

$$\overline{\delta}\leqslant\frac{b}{2}<b.$$

Рассмотрим $\beta(\overline{\delta})\in\mathbb{F}$. При этом $\beta(\overline{\delta})=f^*_\delta|_{\delta=\overline{\delta}}$, а потому

$$(\beta(\overline{\delta})(t)=\frac{1}{\overline{\delta}}\quad\forall t\in[0,\overline{\delta}[)\;\&\;(\beta(\overline{\delta})(t)=0\quad\forall t\in[\overline{\delta},1[).$$

При этом, как легко видеть,

$$\begin{aligned}(\mathbf{m}\circ\beta)(\overline{\delta})(L)=(\mathbf{m}\circ\beta)(\overline{\delta})([a,b[)=\mathbf{m}(\beta(\overline{\delta}))([0,b[)=\\ =(\beta(\overline{\delta})*\lambda)([0,b[)=\int\limits_{[0,b[}\beta(\overline{\delta})d\lambda=\int\limits_{[0,\overline{\delta}[}\beta(\overline{\delta})d\lambda+\int\limits_{[\overline{\delta},b[}\beta(\overline{\delta})d\lambda=\\ =\int\limits_{[0,\overline{\delta}[}\beta(\overline{\delta})d\lambda+0=\frac{1}{\overline{\delta}}\lambda([0,\overline{\delta}[)=1.\end{aligned} \tag{3.88}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned}\nu_*(L)=\nu_*([a,b[)=\nu_*([0,b[)=(st)[\chi_{]0,1]}]([0,b[)=\\ =\chi_{]0,1]}(b)-\chi_{]0,1]}(0)=1-0=1,\end{aligned} \tag{3.89}$$

поскольку $0 < b \leqslant 1$. В этом случае у нас

$$(\mathbf{m} \circ \beta)(\overline{\delta})(L) = \nu_*(L),$$

(см. (3.88), (3.89)). Мы установили, что

$$(b/2 \angle \overline{\delta}) \Rightarrow ((\mathbf{m} \circ \beta)(\overline{\delta})(L) = \nu_*(L)). \tag{3.90}$$

Поскольку $\overline{\delta}$ выбиралось произвольно, установлено, что $\forall \delta \in]0, 1[$

$$(b/2 \angle \delta) \Rightarrow ((\mathbf{m} \circ \beta)(\delta)(L) = \nu_*(L)).$$

Мы установили, что в случае 1) $\exists \delta_1 \in]0, 1[\ \forall \delta_2 \in]0, 1[$

$$(\delta_1 \angle \delta_2) \Rightarrow ((\mathbf{m} \circ \beta)(\delta_2)(L) = \nu_*(L)). \tag{3.91}$$

2) Пусть теперь $0 < a$. При этом по выбору b имеем: $0 < a < b \leqslant 1$. Тогда, в частности,

$$a \in]0, 1[. \tag{3.92}$$

Пусть теперь (см.(3.92) выбрано произвольное число $\tilde{\delta} \in]0, 1[$, для которого

$$a \angle \tilde{\delta}. \tag{3.93}$$

По определению $\angle$ имеем, что $\tilde{\delta} \leqslant a$. Рассмотрим $f^*_{\tilde{\delta}} \in \mathbb{F}$:

$$\Big(f^*_{\tilde{\delta}}(t) \triangleq \frac{1}{\tilde{\delta}} \ \ \forall t \in [0, \tilde{\delta}[\ \Big) \ \& \ \Big(f^*_{\tilde{\delta}}(t) \triangleq 0 \ \ \forall t \in [\tilde{\delta}, 1[\ \Big).$$

При этом $\beta(\tilde{\delta}) = f^*_{\tilde{\delta}}$, а потому

$$\int\limits_L \beta(\tilde{\delta}) d\lambda = \int\limits_{[a,b[} f^*_{\tilde{\delta}} d\lambda = 0, \tag{3.94}$$

поскольку $f^*_{\tilde{\delta}} = 0$ на множестве $L = [a, b[$. При этом, согласно (2.46)

$$(\mathbf{m} \circ \beta)(\tilde{\delta})(L) = \mathbf{m}(\beta(\tilde{\delta}))(L) = (\beta(\tilde{\delta}) * \lambda)(L) = \int\limits_L \beta(\tilde{\delta}) d\lambda,$$

откуда в силу (3.94) следует

$$(\mathbf{m} \circ \beta)(\tilde{\delta})(L) = 0. \tag{3.95}$$

В силу (3.75) имеем равенство

$$\nu_*(L) = \chi_{]0,1]}(b) - \chi_{]0,1]}(a),$$

поскольку $a < b$. Поскольку $b \in]0, 1]$ и верно (3.92), то

$$\nu_*(L) = 1 - 1 = 0.$$

Из (3.95) получаем теперь, при условии (3.93) равенство

$$(\mathbf{m} \circ \beta)(\tilde{\delta})(L) = \nu_*(L). \tag{3.96}$$

Итак (см. (3.93), (3.96)), истинна импликация

$$(a \angle \tilde{\delta}) \Rightarrow ((\mathbf{m} \circ \beta)(\tilde{\delta})(L) = \nu_*(L)). \tag{3.97}$$

Поскольку выбор $\tilde{\delta}$ был произвольным, из (3.97) имеем

$$\forall \delta \in]0, 1[\quad ((a \angle \delta) \Rightarrow (\mathbf{m} \circ \beta)(\delta)(L) = \nu_*(L)). \tag{3.98}$$

С учетом (3.92) из (3.98) вновь имеем свойство, определяемое в (3.91): можно указать $\delta_1 \in]0, 1[$ так, что при $\delta_2 \in]0, 1[$ истинно (3.91).

Сопоставляя случаи 1) и 2), получаем сходимость

$$(\ ]0, 1[, \angle, ((\mathbf{m} \circ \beta)(\delta)(L))_{\delta \in]0,1[}) \to \nu_*(L); \tag{3.99}$$

где $L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$. С учетом (3.87) мы получаем свойство (3.99) для всякого $L \in \mathcal{L}$, т.е.

$$\forall L \in \mathcal{L} \quad (\ ]0, 1[, \angle, ((\mathbf{m} \circ \beta)(\delta)(L))_{\delta \in]0,1[}) \to \nu_*(L);$$

Мы установили (3.86) и, стало быть, (3.85), что, в свою очередь, влечет (3.84). Из (3.83), (3.84) имеем, что мера $\nu_* \in \mathbf{P}(\mathcal{L})$ такова, что для некоторой направленности $(\mathbb{D}, \preceq, \mathbf{h})$ в $\mathbb{F}$ выполняется

$$(\ \mathcal{F}_2 \subset (\mathbb{F} - ass)[\mathbb{D}; \preceq; \mathbf{h}]\ )\ \ \&\ \ (\ (\mathbb{D}, \preceq, \mathbf{m} \circ \mathbf{h}) \xrightarrow{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})} \nu_*).$$

Это означает (см. (3.56)), что $\nu_* \in (att)[\mathcal{F}_2]$, т.е. $(st)[\chi_{]0,1]}] \in (att)[\mathcal{F}_2]$. $\square$

Лемма 3.4 $\mathbf{P}_*^{(3)}(\mathcal{L}) \subset (att)[\mathcal{F}_2]$.

Доказательство. Напомним, что $\mathbf{P}_*^{(3)}(\mathcal{L})$ определено в (3.50). Пусть выбрано произвольно

$$\eta \in \mathbf{P}_*^{(3)}(\mathcal{L}). \tag{3.100}$$

С учетом (3.50) подберем $r \in \mathcal{R}_3$ так, что при этом

$$\eta = (st)[r]. \tag{3.101}$$

Согласно определению $\mathcal{R}_3$ можно указать $t \in]0,1[$ и $\alpha \in [0,1]$, для которых

$$r = v_\alpha[t]. \tag{3.102}$$

Из (2.13) и (3.102) следует, что

$$r = \alpha\chi_{\{t\}} + \chi_{]t,1]} \in \mathbf{B}[0;1]$$

определяется условиями:

$$(\ r(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in [0,t[\ )\ \&\ (\ r(t) = \alpha\ )\ \&\ (\ r(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in]t,1]\ ). \tag{3.103}$$

Покажем, что $\eta \in (att)[\mathcal{F}_2]$. Для этого достаточно установить, что существует направленность $(D, \preceq, h)$ в $\mathbb{F}$ такая, что

$$(\ \mathcal{F}_2 \subset (\mathbb{F} - ass)[D; \preceq; h]\ )\ \ \&\ \ (\ (D, \preceq, \mathbf{m} \circ h) \overset{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \eta).$$

В данном доказательстве в качестве $(D, \preceq, h)$ будем использовать последовательность в $\mathbb{F}$. Поскольку $t \in]0,1[$, то имеем

$$\kappa \triangleq \inf(\{t; 1-t\}) \in]0,1[. \tag{3.104}$$

Введем следующие две числовые последовательности, полагая $\forall k \in \mathbb{N}$

$$(\ t_k^{(1)} \triangleq t - \frac{\alpha\kappa}{2k}\ )\ \&\ (\ t_k^{(2)} \triangleq t + \frac{(1-\alpha)\kappa}{2k}\ ). \tag{3.105}$$

Из (3.105) следует, что каждая из последовательностей

$$(t_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}\ :\ \mathbb{N} \to \mathbf{R},$$

$$(t_k^{(2)})_{k\in\mathbb{N}}\ :\ \mathbb{N} \to \mathbf{R},$$

сходится к t, т.е.

$$((t_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}} \to t)\ \&\ ((t_k^{(2)})_{k\in\mathbb{N}} \to t). \tag{3.106}$$

При этом из (3.104), (3.105) имеем, что $\forall k \in \mathbb{N}$

$$0 = t - t \leqslant t - \kappa < t - \frac{\kappa}{2} \leqslant t - \frac{\alpha\kappa}{2} \leqslant t - \frac{\alpha\kappa}{2k} = t_k^{(1)} \leqslant t.$$

Иными словами, у нас $\forall k \in \mathbb{N}$

$$t_k^{(1)} \in]0,t]. \tag{3.107}$$

С другой стороны, из (3.104), (3.105) следует, что

$$t \leqslant t_k^{(2)} \leqslant t + \frac{(1-\alpha)\kappa}{2} \leqslant t + \frac{\kappa}{2} < t + \kappa \leqslant t + (1-t) = 1.$$

Иными словами, справедливо свойство: $\forall k \in \mathbb{N}$

$$t_k^{(2)} \in [t, 1[. \tag{3.108}$$

Имеем с очевидностью $\forall k \in \mathbb{N}$

$$(c_k \triangleq \frac{2k}{\kappa} \in]0, \infty[\ ) \ \& \ (t_k^{(2)} - t_k^{(1)} = \frac{\kappa}{2k}). \tag{3.109}$$

С учетом (3.107)-(3.109) введем последовательность неотрицательных функций на $[0, 1[$. Именно, если $k \in \mathbb{N}$, то

$$f_k \ : \ [0, 1[\to [0, \infty[$$

есть def такая функция, что

$$(f_k(\xi) \triangleq 0 \quad \forall \xi \in I \setminus [t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[) \ \ \& \ \ (f_k(\xi) \triangleq c_k \quad \forall \xi \in [t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[). \tag{3.110}$$

Иными словами, при $k \in \mathbb{N}$, в (3.110) определено произведение скаляра c_k на индикатор промежутка $[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[$, т.е.

$$f_k = c_k \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[}.$$

Ясно, что $f_k \in \mathbf{B}_0^+(I, \mathcal{L})$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Кроме того, из (3.109) имеем $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_I f_k d\lambda = c_k \int\limits_I \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} d\lambda = c_k \lambda(\mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[}) = c_k(t_k^{(2)} - t_k^{(1)}) = c_k \frac{\kappa}{2k} = 1.$$

Стало быть, у нас построена последовательность

$$(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \ : \ \mathbb{N} \to \mathbb{F}. \tag{3.111}$$

Легко видеть, что

$$\forall H \in \mathcal{F}_2 \ \ \exists m \in \mathbb{N} : \quad f_k \in H \ \ \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}. \tag{3.112}$$

В самом деле, пусть $\mathbb{H} \in \mathcal{F}_2$. Тогда для некоторого $\delta \in]0, \infty[$ имеет место равенство $\mathbb{H} = F_\delta^0$. Это означает, что

$$\mathbb{H} = \{ \ f_{t,\alpha}^0 \ : \ t \in I, \alpha \in]0, \delta] \}. \tag{3.113}$$

Учтем (3.109). Именно, подберем $r \in \mathbb{N}$ так, что при этом

$$\frac{\kappa}{2r} < \delta.$$

Заметим, что в этом случае $\forall k \in \overrightarrow{r,\infty}$

$$\frac{\kappa}{2k} < \delta.$$

Поскольку $t \in]0,1[$, имеем из (3.107) свойство $t_k^{(1)} \in I \ \forall k \in \mathbb{N}$. С учетом (3.113) имеем

$$f^0_{t_k^{(1)},\frac{\kappa}{2k}} \in \mathbb{H} \quad \forall k \in \overrightarrow{r,\infty}. \tag{3.114}$$

Заметим в дополнение к (3.114), что

$$t_k^{(2)} = t_k^{(1)} + \frac{\kappa}{2k} \ \in I \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

(см. (3.109)). В этом случае у нас

$$[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[\ \cap I = [t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[\quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.115}$$

Вместе с тем $\forall k \in \mathbb{N}$

$$1 - t_k^{(1)} = 1 - t_k^{(2)} + \frac{\kappa}{2k} > \frac{\kappa}{2k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

С учетом (2.38), (3.109), (3.115) имеем теперь $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^0_{t_k^{(1)},\frac{\kappa}{2k}} = c_k \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[}.$$

С учетом (3.114) получаем теперь, что справедливо

$$c_k \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} \in \mathbb{H} \quad \forall k \in \overrightarrow{r,\infty}.$$

Поскольку $r \in N$, то, в частности, установлено, что

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : f_k \in \mathbb{H} \quad \forall k \in \overrightarrow{m,\infty}.$$

Поскольку $\mathbb{H}$ выбиралось произвольно, соотношение (3.112) полностью доказано.

Покажем теперь, что имеет место сходимость

$$(\mathbf{m}(f_k))_{k \in \mathbb{N}} \stackrel{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \eta. \tag{3.116}$$

Для доказательства (3.116) достаточно в силу (2.46) установить

$$(f_k * \lambda)_{k \in \mathbb{N}} \stackrel{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \eta. \tag{3.117}$$

Будем использовать "тихоновское"представление $\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})$. С учетом (2.6) и определения $\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})$ имеем

$$\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L}) = \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}})|_{\mathbf{P}(\mathcal{L})};$$

мы используем здесь транзитивность операции перехода к подпространству ТП. Как следствие, для обоснования (3.117) достаточно установить сходимость

$$(f_k * \lambda)_{k\in\mathbb{N}} \overset{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbf{R}})}{\longrightarrow} \eta. \tag{3.118}$$

(см. [13, с.36]). В свою очередь, (3.118) имеет место, если $\forall L \in \mathcal{L}$

$$((f_k * \lambda)(L))_{k\in\mathbb{N}} \overset{\tau_{\mathbf{R}}}{\longrightarrow} \eta(L).$$

Стало быть, для обоснования (3.117) достаточно (см. (2.18)) установить, что

$$\left(\int\limits_L f_k d\lambda\right)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow \eta(L) \quad \forall L \in \mathcal{L}. \tag{3.119}$$

В этой связи мы рассматриваем далее обоснование (3.119). Если $L = \varnothing$, то (3.119) выполняется, т.к.

$$\int\limits_{\varnothing} f_k d\lambda = \eta(\varnothing) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.120}$$

Рассмотрим теперь случай $L \in \mathcal{L} \setminus \varnothing$. Тогда при некоторых $a \in I$ и $b \in]a, 1]$ имеет место

$$L = [a, b[. \tag{3.121}$$

Рассмотрим следующие два возможных случая:

$$(t \notin [a, b]) \ \vee \ (t \in [a, b]) \tag{3.122}$$

Если $(t \notin [a, b])$, то $(t < a) \vee (t > b)$. Поэтому в каждом случае для некоторого $\gamma \in]0, \infty[$ имеет место $t \notin [a - \gamma, b + \gamma]$. Поэтому, при $t \notin [a, b]$, можно указать $N \in \mathbb{N}$ так, что

$$[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[\cap L = \varnothing;$$

мы учитываем здесь (3.105), (3.106) и (3.121). В итоге, согласно (3.119) и (3.121) имеем, при $t \notin [a, b]$

$$\int\limits_L f_k d\lambda = 0 \quad \forall k \in \overrightarrow{N, \infty}. \tag{3.123}$$

Покажем теперь, что в в случае $t \notin [a, b]$

$$\eta(L) = 0. \tag{3.124}$$

В силу (3.101) и (3.121) имеем [23, c.114] равенство

$$\eta(L) = r(b) - r(a). \tag{3.125}$$

Воспользуемся соотношением (3.103). Если $t \notin [a, b]$, то $(t < a) \vee (b < t)$. Иными словами, для $t \notin [a, b]$

$$([a, b] \subset]t, 1]) \vee ([a, b] \subset [0, t[).$$

В обоих случаях, согласно (3.103), $r(a) = r(b)$, а тогда из (3.125) получаем равенство (3.124). Из (3.123) и (3.124) вытекает, что при $t \notin [a, b]$

$$\int\limits_L f_k d\lambda = \eta(L) \quad \forall k \in \overrightarrow{N, \infty}.$$

Иными словами, истинна импликация

$$(t \notin [a, b]) \Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N} : \int\limits_L f_k d\lambda = \eta(L) \quad \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}). \tag{3.126}$$

Рассмотрим теперь случай

$$t \in [a, b]. \tag{3.127}$$

Поскольку $a < b$, то из (3.127) следует, что

$$(t = a) \vee (t = b) \vee (t \in]a, b[). \tag{3.128}$$

1) Пусть сначала имеет место равенство $t = a$. Тогда, в частности, $t \in [a, b[$, т.е. $t \in L$. Поэтому при $k \in \mathbb{N}$ имеем в силу (3.110)

$$\int\limits_L f_k d\lambda = \int\limits_L c_k \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} d\lambda = \int\limits_{[a,b[} c_k \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} d\lambda = \int\limits_{[t,b[} c_k \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} d\lambda =$$
$$= \int\limits_I c_k \mathbb{X}_L \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} d\lambda = \int\limits_I c_k \mathbb{X}_{L \cap [t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} d\lambda = c_k \lambda(L \cap [t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[) =$$
$$= c_k \lambda([t, b[\cap [t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[) = c_k \lambda([t, \inf(\{b; t_k^{(2)}\})[). \tag{3.129}$$

С учетом (3.106) и неравенства $a < b$ для некоторого N_* из $\mathbb{N}$ имеем при $k \in \overrightarrow{N_*, \infty}$

$$\int\limits_L f_k d\lambda = c_k \lambda([t, t_k^{(2)}[). \tag{3.130}$$

С учетом (3.105) получаем $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\lambda([t, t_k^{(2)}[) = t_k^{(2)} - t = \frac{(1-\alpha)\kappa}{2k} = \frac{1-\alpha}{c_k}.$$

В результате при $k \in \overrightarrow{N_*, \infty}$ имеем (см.(3.130)) равенство

$$\int\limits_L f_k d\lambda = 1 - \alpha. \tag{3.131}$$

С другой стороны, имеем в нашем случае из (3.101) и (3.103)

$$\eta(L) = \eta([a, b[) = \eta([t, b[) = r(b) - r(t) = r(b) - \alpha. \tag{3.132}$$

При этом $a = t < b \leqslant 1$, т.е. $b \in]t, 1]$, а потому в силу (3.103) имеет место равенство $r(b) = 1$ и, в согласии с (3.132),

$$\eta(L) = 1 - \alpha.$$

С учетом (3.131) получаем в случае 1), что $\forall k \in \overrightarrow{N_*, \infty}$

$$\int\limits_L f_k d\lambda = \eta(L).$$

Стало быть, у нас истинна импликация

$$(t = a) \Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N} : \int\limits_L f_k d\lambda = \eta(L) \quad \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}). \tag{3.133}$$

2) Пусть теперь $t = b$. Тогда

$$\int\limits_L f_k d\lambda = \int\limits_L c_k \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} d\lambda = \int\limits_{[a,b[} c_k \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} d\lambda = \int\limits_{[a,t[} c_k \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} d\lambda =$$
$$= \int\limits_I c_k \mathbb{X}_L \mathbb{X}_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} d\lambda = \int\limits_I c_k \mathbb{X}_{L \cap [t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} d\lambda = c_k \lambda(L \cap [t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[) =$$
$$= c_k \lambda([a, t[\cap [t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[) = c_k \lambda([\sup(\{a; t_k^{(1)}\}), t[);$$

(см. (3.105)). С учетом (3.106) имеем для некоторого $N^* \in \mathbb{N}$ при $k \in \overrightarrow{N^*, \infty}$, что $\sup(\{a; t_k^{(1)}\}) = t_k^{(1)}$ и, следовательно (см.(3.109))

$$\int\limits_L f_k d\lambda = c_k \lambda([t_k^{(1)}, t[) = c_k (t - t_k^{(1)}) = c_k \frac{\alpha\kappa}{2k} = \alpha. \tag{3.134}$$

С другой стороны, в нашем случае $a < t$ и

$$\eta(L) = \eta([a, t[) = r(t) - r(a) = \alpha - r(a).$$

Однако $a \in [0, t[$ и, согласно (3.103), имеет место $r(a) = 0$, а тогда

$$\eta(L) = \alpha.$$

С учетом (3.134) имеем $\forall k \in \overrightarrow{N^*, \infty}$

$$\int_L f_k d\lambda = \eta(L);$$

тем самым, рассмотрение случая 2) завершено. Стало быть, у нас

$$(t = b) \Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N} : \int_L f_k d\lambda = \eta(L) \quad \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}). \tag{3.135}$$

3) Пусть теперь $t \in]a, b[$. Тогда $t - a > 0$ и $b - t > 0$. С учетом (3.105), (3.106) получаем, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеет место $\forall k \in \overrightarrow{n, \infty}$

$$(t - t_k^{(1)} < t - a) \;\&\; (t_k^{(2)} - t < b - t).$$

Иными словами, при $\forall k \in \overrightarrow{n, \infty}$ выполняется

$$a < t_k^{(1)} \leqslant t \leqslant t_k^{(2)} < b. \tag{3.136}$$

Поэтому (см. (3.110), (3.121)) $\forall k \in \overrightarrow{n, \infty}$

$$\int_L f_k d\lambda = \int_{[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[} f_k d\lambda = c_k \lambda([t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[) = c_k (t_k^{(2)} - t_k^{(1)}) = c_k \frac{\kappa}{2k} = 1. \tag{3.137}$$

С другой стороны, в силу (3.101), (3.103), у нас

$$\eta(L) = \eta([a, b[) = r(b) - r(a) = 1 - 0 = 1, \tag{3.138}$$

поскольку в нашем случае $a \in [0, t[$ и $b \in]t, 1]$; тогда (3.138) непосредственно извлекается из (3.103). Из (3.137), (3.138) получаем $\forall k \in \overrightarrow{n, \infty}$

$$\int_L f_k d\lambda = \eta(L).$$

Итак, установлена импликация

$$(t \in]a, b[) \Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N} : \int\limits_L f_k d\lambda = \eta(L) \quad \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}). \tag{3.139}$$

Из (3.128), (3.133), (3.135) и (3.139) имеем при условии (3.127) свойство

$$\exists m \in \mathbb{N} : \int\limits_L f_k d\lambda = \eta(L) \quad \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}. \tag{3.140}$$

Итак, (см. (3.127), (3.140)) истинна импликация

$$(t \in [a, b]) \Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N} : \int\limits_L f_k d\lambda = \eta(L) \quad \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}). \tag{3.141}$$

Из (3.122), (3.126) и (3.141) имеем "всегда"(при $L \in \mathcal{L} \setminus \varnothing$) свойство

$$\exists m \in \mathbb{N} : \int\limits_L f_k d\lambda = \eta(L) \quad \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}.$$

Поскольку выбор L был произвольным, то, с учетом (3.120) установлено, что справедливо (3.119), что, как уже отмечалось, означает справедливость (3.117) и, как следствие, справедливость (3.116). Из (3.112) и (3.116) получаем:

$$(\forall H \in \mathcal{F}_2 \ \ \exists m \in \mathbb{N} : \quad f_k \in H \ \ \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}) \ \& \ (\ (\mathbf{m}(f_k))_{k \in \mathbb{N}} \overset{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \eta). \tag{3.142}$$

Последовательность $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ рассматриваем как направленность $(D, \preceq, h)$ в $\mathbb{F}$, у которой $D = \mathbb{N}$, $\preceq$ есть обычная упорядоченность $D = \mathbb{N}$, а $h = (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Тогда первое условие в (3.142) означает, что

$$\mathcal{F}_2 \subset (\mathbb{F} - ass)[D; \preceq; h]. \tag{3.143}$$

Второе утверждение в (3.142) означает сходимость

$$(D, \preceq, \mathbf{m} \circ h) \overset{\tau^*_{\mathbf{P}}(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \eta. \tag{3.144}$$

Из (3.100) имеем свойство $\eta \in \mathbf{P}_*(\mathcal{L})$. С учетом (2.16) имеем свойство

$$\eta \in \mathbf{P}(\mathcal{L}). \tag{3.145}$$

Из (3.143)-(3.145) вытекает, что $\eta \in (att)[\mathcal{F}_2]$. Поскольку выбор (3.100) был произвольным, установлено вложение $\mathbf{P}^{(3)}_*(\mathcal{L}) \subset (att)[\mathcal{F}_2]$. $\square$

Из лемм (3.2)-(3.4), а также из (3.48)-(3.51) вытекает, что

$$\mathbf{P}_*(\mathcal{L}) \subset (att)[\mathcal{F}_2]. \tag{3.146}$$

Из (2.55), леммы (3.1) и (3.146) мы получаем, что справедлива

Теорема 3.1 $\mathbf{P}_*(\mathcal{L}) = (att)[\mathcal{F}_1] = (att)[\mathcal{F}_2]$.

4 Множества притяжений в пространстве траекторий

Мы возвращаемся к представлениям на основе (2.29), (2.30) и (2.52). Справедлива следующая

Теорема 4.1 *Множество*

$$\mathbf{g}^1(\mathbf{P}_*(\mathcal{L})) = \{\tilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbf{P}_*(\mathcal{L})\} \tag{4.1}$$

является МП по отношению к каждому из семейств $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_2$*:*

$$\mathbf{g}^1(\mathbf{P}_*(\mathcal{L})) = (\otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}] - LIM)[\mathcal{F}_1|\mathbf{s}] = (\otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}] - LIM)[\mathcal{F}_2|\mathbf{s}].$$

Доказательство является непосредственным следствием (2.52) и теоремы (3.1):

$$(\otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}] - LIM)[\mathcal{F}_1|\mathbf{s}] = \mathbf{g}^1((att)[\mathcal{F}_1]) = \mathbf{g}^1(\mathbf{P}_*(\mathcal{L})),$$
$$(\otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}] - LIM)[\mathcal{F}_2|\mathbf{s}] = \mathbf{g}^1((att)[\mathcal{F}_2]) = \mathbf{g}^1(\mathbf{P}_*(\mathcal{L})).$$

В этих представлениях (4.1) есть пучок обобщенных движений, порожденных к.-а. управлениями-мерами по схеме [10].

В этой связи напомним, что из (2.53), (2.54) и теоремы (3.1) вытекает, что $\mathbf{P}_*(\mathcal{L})$ есть замкнутое множество в компакте

$$(\mathbf{P}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbf{P}}^*(\mathcal{L})) \tag{4.2}$$

(см. (2.28)). Стало быть, $\mathbf{P}_*(\mathcal{L})$ - компакт в ТП (4.2). Тогда, в силу непрерывности (см. (2.32)) оператора (2.29), у нас и множество

$$\mathbf{g}^1(\mathbf{P}_*(\mathcal{L}))$$

является компактом в $(\mathfrak{X}, \otimes_0^1[\tau_{\mathbf{R}}^{(n)}])$, а теорема (4.1) имеет смысл компактификации пучков, отвечающих асимптотическим версиям ограничения типа "одноимпульсности"формируемого управления из множества $\mathbb{F}$.

Литература

[1] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

[2] Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.

[3] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[4] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987.

[5] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

[6] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир,1971.

[7] Завалишин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

[8] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

[9] Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.

[10] Ченцов А.Г.//Изв.вузов.Математика, 2002.-№2. с.58-80.

[11] Chentsov A.G. Asymptotic Attainability. Kluwer Academic Publishres, Dordrecht—Boston—London, 1997.

[12] Chentsov A.G. Finitelly-additive measures and relaxations of extremal problems. New York, London, and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244p.

[13] Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and Relaxations. Kluwer Academic Publishres, Dordrecht—Boston—London, 2002. 408p.

[14] Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1977.

[15] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[16] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

[17] Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981. 430 с.

[18] Rao K.P.S.B., Rao M.B. Theory of charges. A Study of finitelly additive meaures. N.Y.: Acad.Press, 1983.

[19] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Наука, 1970.

[20] Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.

[21] Semadeni Z. Banach Spaces of Continuous Functions. PWN, War-wa, 1971.

[22] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Иност.лит., 1984.

[23] Ченцов А.Г. Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1985.

[24] Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.