ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2003
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

ФАКТОРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ю.В.Малышев

Кафедра высшей математики,
Государственный технологический университет,
ул. К.Маркса, 68, Казань, 420015 Россия
e-mail: uvmal@yandex.ru

Аннотация

Исследуются дифференциальные уравнения в частных производных, допускающие факторизацию. Применение символического метода позволяет получать общее решение задачи Гурса, записанное через функции Римана.

1 Основные определения. Теорема о факторизации

Пусть

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

– оператор дифференцирования по переменной x_k,

$$\frac{1}{D_k} \equiv D_k^{-1} = \int\limits_{x_{n_0}}^{x_n} \ldots$$

– оператор интегрирования, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – n-мерный вектор, $D = (D_1, \ldots, D_n)$ – оператор градиента, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – произвольный вектор.

Положим $\xi^p = \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n}$. Компоненты вектора ξ могут быть числами или операторами, в частности, для $\xi = D$ символ D^p обозначает дифференциальный оператор $D^p = D_1^{p_1} \ldots D_n^{p_n}$. Порядок дифференциального оператора D^p обозначается через $|p|$, $|p| = p_1 + \ldots + p_n$. Рассмотрим дифференциальный оператор порядка m:

$$L_m(D) \equiv \sum_{|p|=m} a^p D^p,$$

где коэффициенты a^p могут быть постоянными или функциями независимых переменных x [1].

В дальнейшем будем предполагать, что оператор $L_m(D)$ допускает одну из факторизаций:

$$(D_1 - \dot{\alpha}_1) \sum_{|p| \leqslant m-1} a^p D^p, \quad (\dot{\alpha}_1 = \tfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}),$$

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i D_i) \sum_{|p| \leqslant m-1} a^p D^p,$$

Исследуем уравнения вида:

$$1^\circ.\ (D_1 - \dot{\alpha}_1) \sum_{|p| \leqslant m-1} a^p D^p u = f, \tag{1}$$

$$2^\circ.\ (\sum_{i=1}^{n} a_i D_i) \sum_{|p| \leqslant m-1} a^p D^p u = f. \tag{2}$$

Рассмотрим каждый из указанных случаев отдельно.

С помощью формул символического метода [2] уравнение (1) можно представить в виде

$$e^{\alpha_1} D_1 e^{-\alpha_1} \sum_{|p| \leqslant m-1} a^p D^p u = f.$$

Деля последовательно на экспоненту e^{α_1} и на D_1, получим уравнение, порядок которого понизился на единицу

$$\sum_{|p| \leqslant m-1} a^p D^p u = e^{\alpha_1} \frac{1}{D_1} e^{-\alpha_1} f + e^{\alpha_1} \varphi_1,$$

(φ_1 – произвольная функция) или, так как D_1 – оператор и $1/D_1 \equiv D_1^{-1}$, уравнение

$$\sum_{|p|\leqslant m-1} a^p D^p u = e^{\alpha_1} D_1^{-1} e^{-\alpha_1} f + e^{\alpha_1}\varphi_1.$$

Если оператор $L_{m-1}(D)$ снова допускает факторизацию вида 1°, то процесс интегрирования можно продолжить, и в итоге получим общее решение уравнения (1), зависящее от m произвольных функций $\varphi_i\,(i = 1, \ldots, m)$.

Случай 2° сводится к случаю 1° с помощью некоторых замен переменных. Найдем первые интегралы линейного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i D_i V = 0.$$

Пусть это будут функции $\psi_i(x) = c_i, (i = 1, \ldots, n-1,\ c_i = \mathrm{const})$. Сделаем замену переменных: $\xi_i = \psi_i, \ldots, \xi_n = \psi_n$. Тогда линейный множитель случая 2° превратится в линейный множитель случая 1°.

Действуя как выше, получим символическое представление уравнения (2). Итак, справедлива теорема.

***Теорема* 1**. Если оператор $L_m(D)$ факторизуем, то уравнение (1) интегрируется в квадратурах.

2 Задача Гурса

Задача ставится следующим образом [3]: найти решение уравнения

$$L_n(D)U = f \tag{3}$$

в области $G = \left\{x : x^0 \leqslant x \leqslant x^1\right\}$, удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \tag{4}$$

при условии согласования

$$\begin{aligned}\varphi_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots, x_n) =&\\ = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), &\quad j < i.\end{aligned}$$

Рассмотрим оператор

$$L_n^*(D) \equiv \sum_{|p|\leqslant n} (-1)^p D^p a_p,$$

сопряженный к оператору $L_m(D)$ [1]. Решение уравнения $L_n^*(D)V = 0$ есть функция Римана $V = R(x^0, x)$ со свойствами $R(x, x) \equiv 1, R(x^0, x^0) \equiv 1$. По переменным x^0 функция Римана удовлетворяет уравнениям $L_n(D)U = 0$ ([3, 6]).

Задачу Гурса будем решать в предположении факторизации оператора $L_n^*(D)$:

$$L_n^*(D)V \equiv \prod_{k=1}^{n}(D_k - a_k)V = 0, \tag{5}$$

где

$$a_k = \dot{\alpha}_k = \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k}, \quad \alpha_k = \int\limits_{x_k^0}^{x_k} a_k(x_1, \dots, x_{k-1}, \tau_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\, d\tau_k.$$

Символическим методом приведем уравнения (5) к виду:

$$e^{\alpha_1} D_1 e^{\alpha_2 - \alpha_1} \dots D_n e^{-\alpha_n} V = 0. \tag{6}$$

Пусть $x_i = x_i^0 = \text{const}$; $i = 1, \dots, n-1$. Из (6) тогда получим

$$e^{\alpha_n} D_n e^{-\alpha_n} V = 0.$$

Отсюда $e^{-\alpha_n} V = \Psi_n$, (Ψ_n – произвольная функция), $R = e^{\alpha_n}\Psi_n$. Для нахождения Ψ_n положим $x_n = x_n^0$. В силу $R(x^0, x^0) \equiv 1$ получим $\Psi_n = 1$, т.е.

$$R(x^0, x^0)\big|_{x_i = x_i^0} = e^{\alpha_n(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n)}.$$

Пусть теперь $x_p = x_p^0 = \text{const}$, $p = 1, \dots, n-2$. Решаем уравнения

$$(D_{n-1} - \dot{\alpha}_{n-1})(D_n - \dot{\alpha}_n)V = 0,$$
$$e^{\alpha_{n-1}} D_{n-1} e^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} D_n e^{-\alpha_n} V = 0.$$

Отсюда

$$V \equiv R\Bigg|_{\substack{x_p = x_p^0, \\ x_n = x_n^0}} = e^{\alpha_n} D_n^{-1} e^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \Psi_{n-1} + e^{\alpha_n} \Psi_{n-2}$$

(Ψ_{n-1}, Ψ_{n-2} – произвольные функции).

При $x_n = x_n^0$

$$R\Bigg|_{\substack{x_p = x_p^0, \\ x_{n-1} = x_{n-1}^0}} = \Psi_{n-2},$$

т.е. $\varphi_2 = e^{\alpha_{n-1}(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_{n-1}, x_n^0)}$.

При $x_{n-1} = x_{n-1}^0$

$$R\Big|_{\substack{x_p = x_p^0, \\ x_{n-1} = x_{n-1}^0}} = \left(e^{\alpha_n} D_n^{-1} e^{\alpha_{n-1} - \alpha n} \Psi_{n-1}\right)\Big|_{\substack{x_p = x_p^0, \\ x_{n-1} = x_{n-1}^0}} + \left(e^{\alpha_n} \Psi_{n-2}\right)\Big|_{\substack{x_p = x_p^0, \\ x_{n-1} = x_{n-1}^0}},$$

(здесь $\Psi_{n-2} = 1$, и крайние члены равны, следовательно, $\Psi_{n-1} = 0$). Таким образом,

$$R|_{x_p = x_p^0} = (e^{\alpha_n} \Psi_{n-2})|_{x_p = x_p^0} = e^{\alpha_n(x_1^0, \dots, x_{n-2}^0, x_{n-1}, x_n) + \alpha_{n-1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, x_n^0)}.$$

Продолжая процесс, в общем случае получим экспоненциальное представление функции Римана.

$$R(x, x^0) = e^{\alpha_n(x_1, \dots, x_n) + \alpha_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) + \dots + \alpha_1(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)} \equiv$$

$$\equiv \exp\left\{ \int_{x_n^0}^{x_n} a_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \tau_n)\, d\tau_n \} + \int_{x_{n-1}^0}^{x_{n-1}} a_{n-1}(x_1, \dots, \tau_{n-1}, x_n^0)\, d\tau_{n-1} + \right.$$

$$\left. + \dots + \int_{x_1^0}^{x_1} a_1(\tau_1, x_2^0, \dots, x_n^0)\, d\tau_1 \right\}. \quad (7)$$

Формула (7) другим способом получена в [3] и [5]. Нетрудно показать, что сопряженным оператором к оператору $L_n^*(D) \equiv \prod\limits_{k=1}^{n} (D_k - a_k)$ будет оператор $L_n(D) \equiv \prod\limits_{k=n}^{1} (D_k + a_k)$.

Отсюда следует

Теорема 2. Если оператор $L_n(D)$ факторизуем, то и сопряженный к нему оператор $L_n^*(D)$ также факторизуем, и наоборот, из факторизации оператора $L_n^*(D)$ следует факторизация оператора $L_n(D)$.

Следствие. Если оператор $L_n(D)$ или $L_n^*(D)$ факторизуем, то уравнение $L_n(D)U = f$ (и $L_n^*(D)V = F$) интегрируется в квадратурах.

Доказательство получается интегрированием символическим методом.

Приступим теперь к решению задач Гурса для уравнения:

$$L_n(D) \equiv \prod_{k=m}^{1} (D_k + a_k) U = f.$$

Применяя символический метод, получим

$$\prod_{k=m}^{1} e^{-\alpha_k} D_k e^{\alpha_k - \alpha_{k-1}} U = f \quad (\alpha_0 = 0).$$

Окончательно,

$$U = e^{-\alpha_1}\frac{1}{D_1}e^{\alpha_1-\alpha_2}\,\ldots\,\frac{1}{D_n}e^{\alpha_n}f + e^{-\alpha_1}\frac{1}{D_1}e^{\alpha_1-\alpha_2}\,\ldots$$
$$\ldots\,\frac{1}{D_{n-1}}e^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}\Psi_m +\,\ldots + e^{-\alpha_1}\frac{1}{D_1}\Psi_2 + e^{-\alpha_1}\Psi_1. \quad (8)$$

Здесь $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ – произвольные функции, подлежащие определению при выполнении краевых условий.

Пусть

$$x_n = x_n^0, \qquad \text{тогда} \qquad \Psi_n = \left[e^{-\alpha_{n-1}} D_{n-1} e^{\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}}\,\ldots\, D_1 e^{\alpha_1}\varphi_n\right]_{x_n = x_n^0},$$

при

$$x_{n-1} = x_{n-1}^0 \qquad \Psi_{n-1} = \left[e^{-\alpha_{n-2}} D_{n-2} e^{\alpha_{n-2}-\alpha_{n-3}}\,\ldots\, D_1 e^{\alpha_1}\varphi_{n-1}\right]_{x_{n-1} = x_{n-1}^0}, \quad (9)$$

$$\ldots$$

при

$$x_1 = x_1^0 \qquad \Psi_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n).$$

Формулы (8), (9) дают решение задачи Гурса. Эти формулы допускают представление через функции Римана и тогда они совпадают с известными формулами [3].

Покажем это для случая $n = 2$. Решим задачу Гурса для уравнения

$$L(D)U \equiv U_{xy} + a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + c(x,y)U = f(x,y). \quad (10)$$

В прямоугольнике $D = x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1$ с краевыми условиями:

$$U(x_0, y_0) = \varphi(y), U(x, y_0) = \Psi(x), \varphi(y_0) = \Psi(x_0). \quad (11)$$

Предполагая, что уравнение (10) факторизуемо, запишем его в виде

$$L(D)U \equiv (D_y + a)(D_x + b)U = f, \quad (c = ax + by). \quad (12)$$

Сопряженное уравнение будет

$$L^*(D)V \equiv (D_x - a)(D_y - b)V = 0. \tag{13}$$

Обозначим $a = \alpha_y,\ b = \beta_x, \quad (\alpha = \int\limits_{y_0}^{y} a(x,\tau)\,d\tau, \quad \beta = \int\limits_{x_0}^{x} b(t,y)\,dt).$

Решение уравнения (13) дает функцию Римана для уравнения (12):

$$R(x,y,x_0,y_0) = e^{\alpha(x,y)+\beta(x,y_0)} = \exp\left\{\int\limits_{y_0}^{y} a(x,\tau)\,d\tau + \int\limits_{x_0}^{x} b(t,y_0)\,dt\right\}.$$

Решение задачи Гурса для уравнения (12), согласно (8) и (9) будет:

$$U = e^{-\beta}\frac{1}{D_x}e^{\beta-\alpha}\frac{1}{D_y}e^{\alpha}f + e^{-\beta}\frac{1}{D_x}\left[e^{\beta-\alpha}\left(b\Psi+\Psi'\right)\right]_{y=y_0} + e^{-\beta}\varphi. \tag{14}$$

Выразим это решение через функцию Римана. Для этой цели в (14) внесем все экспоненты под знаки интегралов:

$$U = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} e^{-\beta(x,y)+\beta(\xi,y)-\alpha(\xi,y)+\alpha(\xi,\eta)} f(\xi,\eta)\,d\eta d\xi +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\beta(x,y)+\beta(\xi,y)-\alpha(\xi,y)}\left[b(\xi,y_0)\Psi(\xi)+\Psi'(\xi)\right]\,d\xi + e^{-\beta(x,y)}\varphi(y).$$

Но $-\beta(x,y)+\beta(\xi,y) = -\int\limits_{x_0}^{x} b(t,y)\,dt + \int\limits_{x_0}^{\xi} b(t,y)\,dt = -\int\limits_{\xi}^{x} b(t,y)\,dt,$

$$\alpha(\xi,y) = \int\limits_{y_0}^{y} a(\xi,\tau)\,d\tau, \quad e^{-\beta(x,y)} = R(x_0,y;x,y),$$

$$e^{-\int\limits_{y_0}^{y} a(\xi,\tau)\,d\tau - \int\limits_{\xi}^{x} b(t,y)\,dt} = R(\xi,y_0;x,y).$$

Интегрируя по частям в интеграле, содержащим Ψ', окончательно получим

$$U=\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}R(\xi,\eta,x,y)f(\xi,\eta)\,d\eta d\xi+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\left[b(\xi,y_0)R(\xi,y_0,x,y)-\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi,y_0,x,y)\right]\Psi(x)\,d\xi-$$
$$-R(x_0,y_0,x,y)\Psi(x_0)+R(x_0,y,x,y)\varphi(y).\quad(15)$$

Формула (15) дает решение задачи Гурса для уравнения (10), (11) (с заданной факторизацией (12)).

Рассмотрим уравнение $(D_y+a)(D_x+b)V=0$, при $x=x_0$ его решение будет:

$$R(x_0,y_0,x_0,y)=e^{\int\limits_{y}^{y_0}a(x_0,\tau)}\,d\tau.$$

Заменим y_0 на η и продифференцируем по η:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}R(x_0,\eta,x_0,y)-R(x_0,\eta,x_0,y)a(x_0,\eta)=0.$$

Добавим к формуле (15) нулевое слагаемое

$$U=\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}R(\xi,\eta,x,y)f(\xi,\eta)\,d\eta d\xi+$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\left[b(\xi,y_0)R(\xi,y_0,x,y)-\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi,y_0,x,y)\right]\Psi(\xi)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{y_0}^{y}\left[a(x_0,\eta)R(x_0,\eta,x,y)-\frac{\partial}{\partial\eta}R(x_0,\eta,x,y)\right]\varphi(\eta)\,d\eta+$$
$$+R(x_0,y_0,x,y)\Psi(x)+R(x_0,y_0;x,y)\varphi(y)-R(x_0,y_0;x,y)\Psi(x_0).\quad(16)$$

Теперь формула (16) совпадает с формулой (1.20) из работы [3], полученной другим способом без учета факторизации уравнения.

Итак, использование символического метода в случае факторизации дифференциальных уравнений в частных производных облегчает нахождение решений этих уравнений.

Литература

[1] Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

[2] Малышев Ю.В. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и сложными функциями // Вестник Самарского Государственного Технического Университета, Вып. 16, серия “физико-математические науки”. – Самара, 2002. – С.5-9.

[3] Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими производными. – Казань: Казанское математическое общество, 2001 – 227 с.

[4] Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. – М.: ИИЛ, 1957, – 444 с.

[5] Волкодавов В.Ф. Захаров В.Н. Функции Римана для одного класса дифференциальных уравнений в трехмерном евклидовом пространстве и ее применения. – Самара, 1996. – 53 с.

[6] Лернер М.Е. Принципы максимума для уравнений гиперболического типа и новые свойства функции Римана. – Самара: Самарский Государственный Технический Университет, 2001. – 113 с.