*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N 3, 2003*
*Электронный журнал,*
*рег. N П23275 от 07.03.97*

*http://www.neva.ru/journal*
*e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru*

*Динамические системы на многообразиях*

# ГЛОБАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д.Н.Чебан

Молдова, MD-2009, Кишинев, ул. А. Матеевича, д. 60,
Молдавский государственный университет,
кафедра Математического анализа и Дифференцильных уравнений,
e-mail: cheban@usm.md

**Аннотация.**

В настоящей статье дается обзор ряда работ, посвященных изучению компактных глобальных аттракторов абстрактных диссипативных динамическим системам (как автономным, так и неавтономным), и некоторым их приложениям. Здесь затрагивается круг вопросов, который отражает научные интересы автора.

## 1 Введение

В приложениях часто встречаются системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

[0]Настоящая работа написана при частичной финансовой поддержке Молдавской Ассоциации Поддержки Исследований и Американского Фонда Поддержки Исследований и Развития для Государств Бывшего Советского Союза (грант No. MM1-3016).

у которых из-за естественной диссипации каждое решение в некоторый момент времени попадает в фиксированную ограниченную область и в ней остается при дальнейшем возрастании времени. Такие системы называют диссипативными [21], [104]. Решения диссипативной системы иногда называют предельно (финально) ограниченными.

Диссипативные системы возникают в гидродинамике, в теории колебаний, биологии, радиотехнике, небесной механике и других областях науки и техники в связи с изучением различных предельных режимов.

Изучению диссипативных систем, начиная с классических работ Левинсона [104], посвящено огромное количество работ. До 70-х годов в абсолютном большинстве этих работ изучались в основном периодические или автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений в конечномерном пространстве, обладающие свойством диссипативности. Эти результаты отражены в монографиях [19], [20], [21], [120].

Последние 20-25 лет идеи и методы развитые в теории конечномерных диссипативных систем активно проникают в теорию бесконечномерных систем [47], [53], [77], [80], [26], [98], [114], [115], [117], [10], [62]. Изучение бесконечномерных диссипативных систем стимулировалось потребностями функционально-дифференциальных уравненй [26], [95], [94], [98] и дифференциальных уравнений с частными производными [56], [97], [103], [13], [115], [116]. Здесь, также как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматривались периодические и автономные системы. Результаты, полученные в этих областях отражены в монографиях [26], [3], [97], [103], [116] и обзорах [93], [95], [14], [55], [98].

Если правая часть $f$ уравнения (1) непериодична, например, квазипериодична (почти периодична по Бору, рекуррентна в смысле Биркгофа, почти периодична по Левитану, устойчива по Пуассону) или более сложным образом зависит от времени, то ситуация здесь значительно усложняется уже в классе почти периодических систем. Это обусловлено по крайней мере двумя причинами.

Во-первых, определение диссипативности в неавтономном случае необходимо уточнить, так как определение Левинсона в классе непериодических систем расщепляется на несколько неэквивалентных друг другу понятий и необходимо выбрать из них то, которое позволяет построить достаточно содержательную теорию, которая содержала бы в качестве частного случая наиболее существенные результаты, полученные для периодических диссипативных систем.

Во-вторых, при изучении периодических (автономных) диссипативных систем важную роль играет дискретная динамическая система-каскад (непрерывная динамическая система- поток), порожденная степенями преобразования Пуанкаре и, следовательно, техника, созданная для исследования периодических (автономных) диссипативных систем непригодна в более общей ситуации. Поэтому для изучения непериодических диссипативных систем понадобилась разработка новых методов исследования. В последние 15-20 лет автором данной статьи опубликована серия работ (см. например [28], [54] и [65]-[**?**]) посвященных глобальным аттракторам неавтономных диссипативных динамических систем.

В последние годы появились ряд работ (см. например [78], [79], [87], [88], [90], [99], [106], [109], [113], [117], а также ссылки в них) посвященных изучению компактных глобальных аттракторов неавтономных дифференциальных уравнений в частных производных, а также оттягивающих назад (pullback) аттракторов стохастических динамических систем (см. [61], [64], [84], [85], [89], а также библиографию в них).

**Содержание**

# 2 Автономные диссипативные динамические системы.

## 2.1 Некоторые обозначения, понятия и факты.

Всюду в этой работе мы будем использовать следующие обозначения:

В работе употребляются следующие обозначения:
$\exists$ – существует;
$x \in X$ – есть элемент множества $X$;
$\partial X$ – граница множества $X$;
$X \subseteq Y$ – множество $X$ составляет часть или совпадает с множеством $Y$;
$\emptyset$ – пустое множество;
$\{x, y, ..., z\}$ – множество, состоящее из $x, y, ..., z$;
$\{x \in X | \mathcal{R}(x)\}$ – множество всех элементов из $X$, обладающих свойством $\mathcal{R}$;
$X \times Y$ – декартово произведение двух множеств;
$pr_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ – проекция $X_1 \times X_2$ на $i$-ую $(i = 1, 2)$ компоненту $X_i$;
$(X, \rho)$ – полное метрическое пространство с метрикой $\rho$;
$2^X$ – пространство всех замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства $X$, наделенное метрикой Хаусдорфа;
$\overline{M}$ – замыкание множества $M$ в пространстве $X$;
$B(M, \varepsilon)$ $(B[M, \varepsilon])$– открытая (замкнутая) $\varepsilon$-окрестность множества $M$ в метрическом пространстве $X$;
$f : X \to Y$ – отображение $X$ в $Y$;
$f(M)$ – образ множества $M \subseteq X$ при отображении $f : X \to Y$, т.е. $\{y \in Y : y = f(x), x \in M\}$;
$id_X$ – тождественное отображение $X$ в $Y$;
$C(X, Y)$ – множество всех непрерывных отображений пространства $X$ в пространство $Y$;
$C^k(U, M)$ – множество всех $k$-раз непрерывно дифференцируемых отображений многообразия $U$ в многообразие $M$;
$D(f)$ $(Im(f))$ – область определения (значений) функции $f$;
$0$ – число ноль, а также нулевой элемент всякой аддитивной группы (полугруппы);
$\mathbb{R}$ $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{C})$ – множество всех действительных (натуральных, целых, рациональных, комплексных) чисел;
$\mathbb{S}$ – одно из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$;
$\mathbb{S}_+(\mathbb{S}_-)$ – множество всех неотрицательных (неположительных) чисел из $\mathbb{S}$;
$< x, y >$ – упорядоченная пара;
$X \bigcup Y$ – объединение множеств $X$ и $Y$;

$X \bigcap Y$ – пересечение множеств $X$ и $Y$;
$X \setminus Y$ – дополнение множества $Y$ в $X$;
$\bigcup\{M_\lambda : \lambda \in \mathcal{L}\}$ – объединение семейства множеств $\{M_\lambda\}_\lambda \in \mathcal{L}$;
$\bigcap\{M_\lambda : \lambda \in \mathcal{L}\}$ – пересечение семейства множеств $\{M_\lambda\}_\lambda \in \mathcal{L}$;
$f^{-1}(M)$ – прообраз множества $M \subseteq Y$ при отображении $f : X \to Y$, т.е. $\{x \in X : f(x) \in M\}$;
$f^{-1}$ – отображение, обратное к $f$;
$f \circ g$ – композиция отображений $f$ и $g$;
$f|M$ – сужение отображения $f$ на множество $M$;
$f(t, \cdot) := f^t\ (f(\cdot, x))$ – частное отображение, задаваемое функцией $f$ при значении $t$ $(x)$ первого (второго) аргумента;
$\{x_n\}$ – последовательность;
$\rho(\xi, \eta)$ – расстояние $\xi$ и $\eta$ в метрическом пространстве $X$;
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ – предел последовательности;
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ – предел отображения $f$ при $x \to a$;
$M^n$ – прямое произведение $n$ экземпляров $M$;
$E^n$ – вещественное или комплексное $n$-мерное евклидово пространство;
$(\mathfrak{B}, |\cdot|)$ – банахово пространство с нормой $|\cdot|$;
$(H, <\cdot,\cdot>)$ – гильбертово пространсво со скалярным произведение $<\cdot,\cdot>$);
$\beta(A, B) = \sup\{\rho(a, B)|a \in A\}$ – полуотклонение множества $A$ от множества $B$ $(A, B \in 2^X)$;
$\alpha(A, B) = \max\{\alpha(A, B), \alpha(B, A)\}$ – метрика Хаусдорфа $(A, B \in 2^X)$;
$B(X)\langle C(X)\rangle$ – семейство всех ограниченных (компактных) подмножеств;
$W^s(M)$ – устойчивое многообразие (область притяжения) множества $M$;
$xt = \pi^t x = \pi(t, x)$ – положение точки $x$ в момент времени $t$;
$\omega_x(\alpha_x)$ – $\omega(\alpha)$-предельное множество точки $x$;
$D_x^+(J_x^+)$ – положительное (положительное предельное) продолжение точки $x$;
$D^+(M) = \bigcup\{D_x^+|x \in M\}$ – положительное продолжение множества $M$;
$J^+(M) = \bigcup\{J_x^+|x \in M\}$ – положительное предельное продолжение множества $M$;
$\alpha_{\varphi_x}$ – $\alpha$-предельное множество целой траектории $\varphi_x \in \Phi_x$;
$\Sigma_x^+(\Sigma_x^-)$-положительная(отрицательная) полутраектория точки $x$;
$\overline{M}$ – замыкание множества $M$ в пространстве $X$;
$H^+(x)$ $(H^-(x))$ -замыкание положительной(отрицательной) полутраектории точки $x$;
$\Sigma^+(M) = \bigcup\{\Sigma_x^+|x \in M\}$;

$\Omega(M) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \pi^t(M)}$.

Приведем некоторые понятия из теории динамических систем, которые мы будем использовать в настоящей работе.

Пусть $X$ топологическое пространство и $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$ ($\mathbb{S}_+ \subseteq \mathbb{T}$) подполугруппа аддитивной группы $\mathbb{S}$. Тройку $(X, \mathbb{T}, \pi)$, где $\pi : X \times \mathbb{T} \to X$ непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

$$\pi(x, 0) = x \ (x \in X) \tag{2}$$

и

$$\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s) \ (x \in X, \ t, s \in \mathbb{T}) \tag{3}$$

называют динамической системой. При этом, если $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+(\mathbb{R})$ или $\mathbb{Z}_+(\mathbb{Z})$, то система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называется полугрупповой (групповой). В случае $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}$ динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называется потоком, а если $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$, то $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называется каскадом. Иногда для краткости будем писать вместо $\pi(x, t)$ просто $xt$. Всюду ниже $X$ как правило является полным метрическим пространством.

Функцию $\pi(x, \cdot) : \mathbb{T} \to X$ при фиксированном $x \in X$ называют движением, а множество $\pi(x, \mathbb{T}) = \Sigma_x$ (соответственно $\pi(x, \mathbb{S}_+) = \Sigma_x^+$, $\pi(x, \mathbb{S}_-) = \Sigma_x^-$) траекторией (положительной полутраекторией, отрицательной полутраекторией) этого движения.

Непустое множество $M \subseteq X$ называют полу(квази)инвариантным по отношению к динамической системе $(X, \mathbb{T}, \pi)$, если $\pi^t M \subseteq M (\pi^t M \supseteq M)$ при всех $t \in \mathbb{T}$, $\pi^t = \pi(t, \cdot)$. Если множество $M$ является одновременно полу- и квазиинвариантным, то оно называется инвариантным.

Замкнутое полуинвариантное множество, не содержащее собственного подмножества, являющегося замкнутым и полуинвариантным, называется минимальным.

Замкнутое полуинвариантное (инвариантное) множество называют неразложимым, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся полуинвариантных (инвариантных) замкнутых подмножеств.

Полным движением (целой траекторией) динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называют непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{S} \to X$ удовлетворяющее условию $\pi^t\varphi(s) = \varphi(t + s)$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и $s \in \mathbb{S}$.

Точку $p$ называют $\omega(\alpha)$ предельной для $x \in X$, если существует $t_n \to +\infty$ ($t_n \to -\infty$) такая, что $p = \lim_{n\to+\infty} xt_n$. Через $\omega_x(\alpha_x)$ обозначают множество всех $\omega(\alpha)$ предельных точек для $x \in X$ и $H^+(x) = \Sigma_x^+ \bigcup \omega_x$ $(H^-(x) =$

$\Sigma_x^- \bigcup \alpha_x, H(x) = \Sigma_x \bigcup \alpha_x \bigcup \omega_x)$.

Точку $x$ называют точкой покоя, если $xt = x$ при всех $t \in \mathbb{T}$, и $\tau$-периодической, если $x\tau = x \quad (\tau > 0, \tau \in \mathbb{T})$.

Число $\tau \in \mathbb{T}$ называют $\varepsilon > 0$ смещением (почти периодом) точки $x$, если $\rho(x\tau, x) < \varepsilon$ $(\rho(x(t+\tau), xt) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T})$. Точка $x \in X$ называется почти рекуррентной (почти периодической), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $l > 0$ такое, что на любом отрезке длины $l$, найдется $\varepsilon$-смещение (почти период) точки $x$.

Если точка $x \in X$ почти рекуррентна и множество $H(x)$ компактно, то $x$ называют рекуррентной.

Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ $(\mathbb{S}_+ \subseteq \mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2 \subseteq \mathbb{S})$ две динамические системы. Непрерывное (гомеоморфное) отображение $h : X \to Y$ называется гомоморфизмом (изоморфизмом) динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, если $h(\pi(x,t)) = \sigma(h(x), t) \quad$ (при всех $t \in \mathbb{T}_1, x \in X$). При этом говорят, что $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ есть расширение динамической системы $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, а $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$– фактор динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ при гомоморфизме $h$. Динамическую систему $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ называют также базой расширения.

Тройку $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$, где $h$ гомоморфизм $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ называют неавтономной динамической системой.

Множество $M$ называют:

–орбитально устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x, M) < \delta$ влечет $\rho(xt, M) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$;

–притягивающим, если существует $\gamma > 0$ такое, что $S(M, \gamma) \subseteq W^s(M) = \{x \in X | \lim\limits_{t \to +\infty} \rho(xt, M) = 0\}$;

–асимптотически устойчивым, если оно орбитально устойчиво и является притягивающим;

–асимптотически устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчиво и $W^s(M) = X$;

–равномерно притягивающим, если существует $\gamma > 0$ такое, что $\beta(\pi^t S(M, \gamma)$,
$M) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Нам понадобятся некоторые общеизвестные факты. Пусть $M \subseteq X$, множество $\Omega(M) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \pi^\tau(M)}$ называют $\omega$-предельным для $M$. **Лемма** [42], [25]. Имеют место следующие утверждения:

1. $z \in \Omega(M)$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности $\{x_n\} \subseteq M$ и $\{t_n\} \subseteq \mathbb{T}$ такие, что $t_n \to +\infty$ и $z = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n t_n$;

2. множество $\Omega(M)$ замкнуто и полуинвариантно;
3. если $A \subseteq B$, то $\Omega(A) \subseteq \Omega(B)$;
4. $\Omega(A \cup B) \subseteq \Omega(A) \cup \Omega(B)$;
5. если множество $A$ полуинвариантно (квазиинвариантно, инвариантно), то $\Omega(A) \subseteq \overline{A}$ ($\overline{A} \subseteq \Omega(A), \Omega(A) = \overline{A}$);
6. $\overline{\bigcup\{\omega_x | x \in M\}} \subseteq \Omega(M)$;
7. если $\Sigma^+(M) = \bigcup\{\Sigma_x^+ | x \in M\}$ относительно компактно, то $\Omega(M)$ инвариантно.

**Теорема** [26], [42], [47]. Пусть $M \neq \emptyset$ и относительно компактно. Для того, чтобы множество $\Sigma^+(M)$ было относительно компактным необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. $\Omega(M) \neq \emptyset$ и компактно;
2. $$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t M, \Omega(M)) = 0. \tag{4}$$

**Теорема** [23]. Пусть $M \subseteq X$ непустое, компактное инвариантное множество, тогда каждое движение в $M$ продолжаемо на $\mathbb{S}$.

**Теорема** [23]. Для того, чтобы компактное множество $M \subseteq X$ было квазиинвариантным необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x \in M$ существовало такое полное движение $\varphi$, проходящее через точку $x$, что $\varphi(t) \in M$ при всех $t \leq 0$.

**Теорема** [23]. Объединение и замыкание квазиинвариантных множеств квазиинвариантно.

**Лемма** [14], [46]. Пусть $\emptyset \neq M \in B(X)$,тогда следующие условия эквивалентны:

1. каковы бы ни были последовательности $\{x_k\} \subseteq M$ и $t_k \to +\infty$ последовательность $\{x_k t_k\}$ относительно компактна;
2. $\Omega(M) \neq \emptyset$, компактно, инвариантно и имеет место равенство (4);
3. существует непустой компакт $K \in C(X)$ такой, что
$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t M, K) = 0. \tag{5}$$

**Замечание** Различные утверждения, близкие к лемме 2.1 содержатся в [26], [93], [3], [97], [115].

## 2.2 Компактно $k$-диссипативные системы

Пусть $\mathfrak{M}$ некоторое семейство подмножеств из $X$. Динамическую систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ назовем $\mathfrak{M}$-диссипативной, если для любых $\varepsilon > 0$ и $M \in \mathfrak{M}$ существует $L(\varepsilon, M) > 0$ такое, что $\pi^t M \subseteq S(K, \varepsilon)$ при всех $t \geq L(\varepsilon, M)$, где $K$–некоторое фиксированное подмножество из $X$, зависящее только от $\mathfrak{M}$. При этом множество $K$ назовем аттрактором для $\mathfrak{M}$.
Наиболее интересными для приложений являются случаи, когда $K$ ограничено или компактно и $\mathfrak{M} = P(X) = \{\{x\} | x \in X\}$, $\mathfrak{M} = C(X)$, $\mathfrak{M} = W(X) = \{S(x, \delta_x) | x \in X, \delta_x > 0\}$ или $\mathfrak{M} = B(X)$.
Систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ назовем :

–поточечно диссипативной, если существует $K \subseteq X$ такое, что при всех

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(xt, K) = 0; \tag{6}$$

–компактно диссипативной, если равенство (6) имеет место равномерно по $x$ на компактах из $X$;

–локально диссипативной, если для любой точки $p \in X$ существует $\delta_p > 0$ такое, что равенство (6) имеет место равномерно по $x \in S(p, \delta_p)$;

–ограниченно диссипативной, если равенство (6) имеет место равномерно по $x$ на каждом ограниченном подмножестве из $X$.
Как уже отмечалось выше, для приложений наибольший интерес представляют случаи, когда $K$ компактно или ограничено. В соответствии с этим систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ назовем поточечно $k(b)$-диссипативной, если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна и множество $K$, фигурирующее в (6), компактно (ограничено). Аналогично определяются понятия компактно $k(b)$-диссипативной системы и другие типы диссипативности.
Нас будут интересовать следующие вопросы:

1. Какова связь между различными типами лиссипативности?

2. Условия, при которых диссипативная система допускает максимальное компактное инвариантное множество.

3. Структура центра Левинсона (максимального компактного инвариантного аттрактора) для различных классов динамических систем.

4. Условия асимптотической и равномерной асимптотической устойчивости центра Левинсона.

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна и $K$-компактное множество, являющееся аттрактором всех компактных подмножеств $X$. Положим

$$J = \Omega(K), \tag{7}$$

где $\Omega(K) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \pi^{\tau}(K)}$. Можно показать [26], [42], [47], что определенное равенством (7), множество $J$ не зависит от выбора аттрактора $K$, а характеризуется только свойствами самой динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Множество $J$, следуя [11] назовем центром Левинсона компактно $k$-диссипативной системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$.

**Теорема** [26], [93], [42], [47]. Если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативная динамическая система и $J$ ее центр Левинсона, то :

1. $J$ инвариантно, т.е. $\pi^t J = J$ при всех $t \in \mathbb{T}$;
2. $J$ орбитально устойчиво;
3. $J$ является аттрактором семейства всех компактных подмножеств из $X$;
4. $J$ является максимальным компактным инвариантным множеством в $(X, \mathbb{T}, \pi)$.

**Теорема** [26], [93], [42], [47]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$ диссипативна, $J$ ее центр Левинсона и $K$ произвольное компактное множество, являющееся аттрактором всех компактных подмножеств $X$, тогда

$$J = \bigcap_{t \geq 0} \pi^t K. \tag{8}$$

Обозначим через $\{K_\lambda | \lambda \in \mathcal{L}\}$ семейство всех непустых, компактных полуинвариантных множеств, притягивающих все компакты из $X$, т.е. для $K_\lambda (\lambda \in \mathcal{L})$ имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t M, K_\lambda) = 0 \tag{9}$$

каково бы ни было $M \in C(X)$.

**Теорема** [47], [25]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативная динамическая система и $J$ ее центр Левинсона, тогда

$$J = \bigcap \{K_\lambda | \lambda \in \mathcal{L}\}, \tag{10}$$

т.е. $J$ является наименьшим компактным полуинвариантным множеством, притягивающим все компакты из $X$.

**Лемма** [93], [34]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $k$-диссипативна. Если существует непустое компактное множество $M$, обладающее следующими свойствами:

1. $\Omega = \overline{\bigcup\{\omega_x | x \in X\}} \subseteq M$;

2. $M$ орбитально устойчиво,

то $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна и $J \subseteq M$.

Обозначим через $\{L_\lambda | \lambda \in \mathcal{L}\}$ семейство всех непустых, компактных и асимптотически устойчивых в целом множеств из $X$.

**Теорема** [46]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна и $J$ ее центр Левинсона, тогда

$$J = \bigcap\{L_\lambda | \lambda \in \mathcal{L}\}, \tag{11}$$

т.е. центр Левинсона $J$ компактно $k$-диссипативной системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является наименьшим компактным ассимптотически устойчивым в целом множеством в $X$.

Отметим, что $\Omega \subseteq J$. Вместе с тем простые примеры показывают, что в общем случае $\Omega \neq J$. В то же время множество $\Omega$ является важной характеристикой диссипативной динамической системы. В связи со сказанным выше представляют интерес следующие вопросы:

1. каковы необходимые и достаточные условия совпадения $\Omega$ и $J$?

2. какова связь между $\Omega$ и $J$ в общем случае?

Приводимые ниже результаты дают ответ на поставленные вопросы.
Пусть $\Lambda \subseteq X$ компактное инвариантное множество динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Согласно теореме 2.1 все движения в $\Lambda$ продолжаемы на $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S} = \mathbb{T}_+ \cup \mathbb{T}_-$, $\mathbb{T}_+ = \{t \in \mathbb{T} | t \geq 0\}$, $\mathbb{T}_- = \{-t | t \in \mathbb{T}_+\}$). Если $\varphi_x : \mathbb{S} \to \Lambda$ полное движение, проходящее через точку $x$ (т.е. $\varphi_x(0) = x$), то через $\alpha_{\varphi_x}$ обозначим множество $\{z | \ \exists t_n \to -\infty, \varphi(t_n) \to z\}$.
Если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативная динамическая система и $J$ ее центр Левинсона, то будем говорить что множество $\Lambda \subseteq J$ обладает свойством $A^+(A^-)$, если каково бы ни было $x \in J$ пересечение $\omega_x$ $(\alpha_{\varphi_x})$ с $\Lambda$ непусто, где $\varphi$ некоторое полное движение, проходящее через точку $x$. Если $\Lambda \subseteq J$ обладает свойствами $A^+$ и $A^-$, то мы будем говорить что $\Lambda$ обладает

свойством $A$.
Отметим, что свойством $A$ обладает множество $\Omega$, а также $M(J)$, где $M(J)$ замыкание объединения всех компактных минимальных подмножеств центра Левинсона $J$. Кроме того $M(J)$ является наименьшим замкнутым инвариантным подмножеством $J$, обладающим свойством $A$.

**Теорема** [40]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна, $J$ ее центр Левинсона и $\Lambda \subseteq J$ замкнутое инвариантное множество, обладающее свойством $A^-$, тогда $J = J^+(\Lambda)$, где $J^+(\Lambda) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \pi^\tau S(\Lambda, \varepsilon)}$.

**Следствие** [40]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна и $\Lambda \subseteq J$ замкнутое инвариантное множество, обладающее свойством $A^-$. Для того, чтобы $J = \Lambda$ необходимо и достаточно, чтобы $\Lambda$ было равномерно асимптотически устойчивым.

**Теорема** [34], [40]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна и $J$ ее центр Левинсона, тогда

$$J = D^+(\Omega) = J^+(\Omega), \tag{12}$$

где $D^+(\Omega) = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{\bigcap\limits_{t\geq 0} \pi^t S(\Omega, \varepsilon)}$.

**Теорема** [34]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $k$-диссипативна. Для того, чтобы динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была компактно $k$-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы множество $D^+(\Omega)(J^+(\Omega))$ было компактным и орбитально устойчивым.

**Теорема** [49]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $k$-диссипативна. Для того, чтобы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была компактно $k$-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы множество $\Sigma^+(K)$ было относительно компактным, каково бы ни было $K \in C(X)$.

**Теорема** [34]. Для того, чтобы динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была компактно $k$-диссипативной необходимо и достаточно, чтобы существовало непустое компактное множество $K \subseteq X$ такое, чтобы для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ можно указать $\delta(\varepsilon, x) > 0$ и $l(\varepsilon, x) > 0$ такие, что $\pi^t S(x, \delta(\varepsilon, x)) \subseteq S(K, \varepsilon)$ при всех $t \geq l(\varepsilon, x)$.

Теоремы 2.2-2.2 дают необходимые и достаточные условия того,чтобы поточечно $k$-диссипативная система была компактно $k$-диссипативной. Эти теоремы дают ответ на вопрос Дж.Хейла ([98], стр. 627).
Согласно теореме 2.2 поточечно $k$-диссипативные, но не компактно $k$-диссипативные системы могут быть двух типов: либо $D^+(\Omega)(J^+(\Omega))$ некомпактно, либо $D^+(\Omega)(J^+(\Omega))$ компактно, но не является орбитально устойчивым.

Приводимые ниже примеры показывают, что оба эти случая реализуются.

**Пример** [38]. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывная функция, равная нулю на $\mathbb{R}_-$ и определенная на $\mathbb{R}_+$ равенством

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp\{[(t-1)^2 - 1]^{-1} + 1\} \quad , & 0 \le t < 2 \\ \\ 0 \quad , & 2 \le t < +\infty. \end{cases} \qquad (13)$$

Положим $X = \{\varphi(at+b) | a, b, t \in \mathbb{R}\}$. Заметим, что $X \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ является замкнутым и инвариантным относительно сдвигов подмножеством $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, и, следовательно, динамическая система Бебутова [17] индуцирует на $X$ групповую динамическую систему сдвигов $(X, \mathbb{R}, \sigma)$. Отметим некоторые свойства построенной динамической системы:

1. какова бы ни была функция $\psi \in X$, множество $\Sigma_\psi = \bigcup \{\sigma(\psi, t) | t \in \mathbb{R}\}$ относительно компактно, и существует $c = c(\psi) \in [0, 1]$ такое, что $\omega_\psi = \alpha_\psi = \{\psi_c\}$, где $\psi_c(t) = c$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

2. $(X, \mathbb{R}, \sigma)$ поточечно диссипативна и $\Omega = \{\psi_c | 0 \le c \le 1\}$;

3. $D^+(\Omega) = X$.

Заметим, что $X$ некомпактно. Действительно, если бы это было не так, то, согласно теореме Асколи-Арцеля, функции из $X$ были бы равностепенно непрерывными на отрезке [0,2]. Построим подмножество из $X$, которое отмеченным свойством не обладает. Пусть $\varphi_n(t) = \varphi(nt)$, $t_n^1 = n^{-1}$ и $t_n^2 = 2n^{-1}$. Очевидно $t_n^1, t_n^2 \in [0, 2]$, $t_n^2 - t_n^1 \to 0$ при $n \to +\infty$ и $|\varphi_n(t_n^2) - \varphi(t_n^1)| = |\varphi(2) - \varphi(1)| = 1$, т.е. последовательность $\{\varphi_n\}$ не является равностепенно непрерывной на отрезке [0,2]. Таким образом, $D^+(\Omega) = X$ некомпактно и, согласно теореме 2.2, динамическая система $(X, \mathbb{R}, \sigma)$ не является компактно $k$-диссипативной.

**Пример** [38]. Пусть $\varphi$ функция, определенная в предыдущем примере. Положим $X = \{\varphi(at+b) | a, b, t \in \mathbb{R}\}$, и через $(X, \mathbb{R}_+, \sigma)$ обозначим полугрупповую динамическую систему сдвигов на $X$. Построенная таким образом динамическая система обладает следующими свойствами:

1. какова бы ни была функция $\psi \in X$, множество $\Sigma_\psi^+ = \bigcup \{\sigma(\psi, t) | t \ge 0\}$ относительно компактно, и существует $c \in [0, 1]$ такое, что $\omega_\psi = \{\psi_c\}$;

2. $D^+(\Omega) = \Omega$ и, следовательно, $D^+(\Omega)$ компактно, так как $\Omega = \{\psi_c | 0 \le c \le 1\}$.

Покажем, что $D^+(\Omega)$ не является орбитально устойчивым. Очевидно, что для доказательства этого утверждения достаточно построить последовательности $\{\psi_n\} \subseteq X$ и $t_n \geq 0$ такие, что $\psi_n \to \psi_0 \in \Omega$ и $\inf\{\rho(\sigma(\psi_n, t_n), \Omega) | n \geq 0\} > 0$. Положим $\psi_n(t) = \varphi(nt + 1 - n^2)(t \in \mathbb{R})$ и $t_n = n$. Тогда $\sigma(\psi_n, t_n)(s) = \varphi(ns+1)$ является расходящейся в $X$, и значит $\inf\{\rho(\sigma(\psi_n, t_n), \Omega) | n \geq 0\} > 0$ (на самом деле последовательность $\{\varphi(ns+1)\}$ не содержит ни одну подпоследовательность, которая сходилась бы в $X$).

Таким образом, для полугрупповой поточечно $k$-диссипативной динамической системы $(X, \mathbb{R}_+, \sigma)$ множество $D^+(\Omega)$ компактно, но не орбитально устойчиво. Согласно теореме 2.2 динамическая система $(X, \mathbb{R}_+, \sigma)$ не является компактно $k$-диссипативной.

**Замечание** Известно (см., например, [23]), что в локально компактном пространстве $X$ равенство $D^+(M) = M$ для компактного полуинвариантного множества $M$ гарантирует его орбитальную устойчивость (теорема Ура). Пример 2.2 показывает, для нелокально компактных пространств в общем случае аналогичный факт не имеет места.

**Теорема** [40]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна и $J$ ее центр Левинсона, тогда:

1. если $X$ локально связно, то $J$ имеет конечное число неразложимых компонент;
2. если $X$ неразложимо, то $J$ тоже неразложимо.

**Следствие** Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, $X$ связно и $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна, тогда центр Левинсона $J$ динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ также связен.

Различные варианты этого утверждения содержатся в работах [26], [95], [14], [3].

**Теорема** [47], [91]. Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$, $X$ связно и локально связно и $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна, тогда центр Левинсона $J$ динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ также связен.

Заметим, что лишь одно требование связности $X$ без локальной связности не гарантирует связности $J$ (см. [91]).
Будем говорить, что метрическое пространство $X$ обладает свойством $(S)$, если для любого компакта $K \subset X$ существует связный компакт $I \subseteq X$ такой, что $K \subseteq I$.
Отметим, что всякое пространство со свойством $(S)$ связно, однако суще-

ствуют связные пространства, не обладающие свойством $(S)$. Любое линейное метрическое пространство, очевидно, обладает свойством $(S)$. Действительно, если $K \subset X$ непустой компакт, то $L(K) = \{\lambda x + (1-\lambda)y | x, y \in K, \quad \lambda \in [0,1]\}$ связный компакт и $K \subseteq L(K)$.

**Теорема** [42], [47], [40]. Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$, $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна и $J$ ее центр Левинсона. Если пространство $X$ обладает свойством $(S)$, то множество $J$ является связным.

В случае, когда $X$- банахово пространство, теорема 2.2 содержится в [105].

**Теорема** [38]. Для того, чтобы компактно $k$-диссипативная динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была локально $k$-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $p \in X$ существовало $\delta_p > 0$ такое, что

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\pi^t S(p, \delta_p), J) = 0. \tag{14}$$

**Теорема** [98], [44]. Для того, чтобы компактно $k$-диссипативная динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была локально $k$-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы центр Левинсона $J$ динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ был равномерно притягивающим, т.е. существовало $\gamma > 0$ такое, что

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\pi^t S(J, \gamma), J) = 0. \tag{15}$$

**Теорема** [44]. Для того, чтобы поточечно диссипативная динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была локально $k$-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы множество $D^+(\Omega)$ $(J^+(\Omega))$ было компактным и равномерно притягивающим.

**Теорема** [46]. Для того, чтобы поточечно $k$-диссипативная система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была локально $k$-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $p \in X$ существовали положительное число $\delta_p > 0$ и непустой компакт $K_p \subseteq X$ такие, что

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\pi^t S(p, \delta_p), K_p) = 0. \tag{16}$$

Динамическую систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называют локально вполне непрерывной (локально вполне компактной), если для любой точки $p \in X$ существуют $\delta_p > 0$ и $l_p > 0$ такие, что $\pi^{l_p} S(p, \delta_p)$ относительно компактно.

**Теорема** [49]. Для локально вполне непрерывных динамических систем поточечная, компактная и локальная $k$-диссипативность эквивалентны.

Теорема 2.2 дает необходимое и достаточное условие того, чтобы компактно $k$-диссипативная система была локально $k$-диссипативной. Приведем пример компактно $k$-диссипативной, но не локально $k$-диссипативной динамической системы.

**Пример** [44]. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$x' = Ax \tag{17}$$

в гильбертовом пространстве $H = L_2[0,1]$ с непрерывным оператором $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, определенным равенством $(A\varphi)(\tau) = -\tau\varphi(\tau)$ для любых $\tau \in [0,1]$ и $\varphi \in L_2[0,1]$. Заметим, что спектр оператора $A$ совпадает с отрезком $[-1,0]$. Обозначим через $U(t)$ оператор Коши уравнения (17). Очевидно $(U(t)\varphi)(\tau) = e^{-\tau t}\varphi(\tau)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0,1]$ и $\varphi \in L_2[0,1]$ (см. [16], стр. 404). Обозначим через $(H, \mathbb{R}, \pi)$ динамическую систему, порожденную уравнением (17), т.е. $\pi(\varphi, t) = U(t)\varphi$ для любых $t \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L_2[0,1]$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$|\pi(\varphi, t)|^2_{L_2} = \int_0^1 e^{-2\tau t}|\varphi(\tau)|^2 d\tau \to 0 \tag{18}$$

при $t \to +\infty$ и,следовательно, динамическая система $(H, \mathbb{R}, \pi)$ поточечно диссипативна и $\omega_\varphi = \{0\}$ для любого $\varphi \in H$, поэтому $\Omega = \{0\}$. Далее заметим, что

$$|\pi(\varphi, t)|^2_{L_2} = \int_0^1 e^{-2\tau t}|\varphi(\tau)|^2 d\tau \le \int_0^1 |\varphi(\tau)|^2 d\tau = |\varphi|^2_{L_2}$$

при всех $t \ge 0$. Согласно теореме 2.2 динамическая система $(H, \mathbb{R}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна, а из теоремы 2.2 следует, что ее центр Левинсона $J = \{0\}$. Покажем, что построенная динамическая система $(H, \mathbb{R}, \pi)$ не является локально $k$-диссипативной. Действительно, если допустить противное, то, согласно теореме 2.2, существовало бы $\gamma > 0$ такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{|\varphi| \le \gamma} |\pi(\varphi, t)| = 0. \tag{19}$$

В силу линейности системы $(H, \mathbb{R}, \pi)$ равенство (19) эквивалентно условию

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{|\varphi| \le 1} |\pi(\varphi, t)| = 0. \tag{20}$$

Определим функции $\varphi_n \in H (n = 1, 2, ...)$ по следующему правилу: $\varphi_n(\tau) = \sqrt{2}\chi_n(\tau)$ при всех $\tau \in [0,1]$, где $\chi_n$ характеристическая функция интервала

$[0, n^{-1}] \subseteq [0,1]$. Заметим, что $|\varphi_n| = 1$, $t \to t_n$ и

$$|\pi(\varphi_n, t_n)| = \int_0^{1/n} ne^{-2\tau t} d\tau = 1 - e^{-1}, \tag{21}$$

где $t_n = n/2$. Однако (20) и (21) не могут иметь места одновременно. полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. Нужный пример построен.

Динамическую систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называют [93], [95], [14] асимптотически компактной, если для любого ограниченного замкнутого полуинвариантного множества $M \in B(X)$ существует непустой компакт $K \in C(X)$ такой, что

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t M, K) = 0, \tag{22}$$

т.е. $K$ притягивает M.

**Теорема** [93], [46]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$-диссипативна и асимптотически компактна, тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально $k$-диссипативна.

**Замечание** В связи с теоремой 2.2 отметим, что

1. поточечная $k$-диссипативность и ассимптотическая компактность не влекут локальную $k$-диссипативность ([81], стр. 163);
2. локальная $k$-диссипативность и асимптотическая компактность не влекут существование компактного глобального аттрактора ([81], стр. 170).

**Теорема** [45]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $k$-диссипативна и множество $J^+(\Omega)$ компактно, тогда в $(X, \mathbb{T}, \pi)$ существует максимальное компактное инвариантное множество.

**Замечание** Как показывает пример 2.2, в условиях теоремы 2.2 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ может не быть компактно $k$-диссипативной.

**Лемма** [46]. Пусть $M \neq \emptyset$ компактное инвариантное множество $\Omega \neq \emptyset$ и компактно, тогда $M \subseteq J^+(\Omega)$.

## 2.3 $b$-диссипативные динамические системы

Динамическую систему $(X, \mathbb{R}, \pi)$ назовем вполне непрерывной (слабо вполне непрерывной), если для любого ограниченного (ограниченного полуинвариантного) множества $M \subseteq X$ существует $l = l(M) > 0$ такое, что $\pi^l M$ относительно компактно.

**Лемма** [46]. Если динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ слабо вполне непрерывна, то она асимптотически компактна.

**Лемма** [46]. Пусть $\mathfrak{M}$ некоторое семейство ограниченных подмножеств из $X$, динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ $b$-диссипативна относительно $\mathfrak{M}$ и асимптотически компактна. Тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ $k$-диссипативна относительно $\mathfrak{M}$.

**Следствие** Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно (компактно, локально, ограниченно) $b$-диссипативна и выполнено одно из следующих условий:

1. $(X, \mathbb{T}, \pi)$ асимптотически компактна;
2. $(X, \mathbb{T}, \pi)$ слабо непрерывна,-

тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно (компактно, локально, ограниченно) $k$-диссипативна.

**Теорема** [26], [93], [46], [96]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $b$-диссипативна и вполне непрерывна. Тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ имеет глобальный компактный аттрактор, т.е. $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ограниченно $k$-диссипативна.

**Следствие** [14], [62]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $b$-диссипативна и отображение $\pi^t (t > 0)$ вполне непрерывно, тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ имеет глобальный компактный аттрактор.

Будем говорить, что динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является локально асимптотически уплотняющей, если для любой точки $p \in X$ существует $\delta_p > 0$ и непустой компакт $K_p \in C(X)$ такие, что

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t S(p, \delta_p), K_p) = 0. \tag{23}$$

**Теорема** [46]. Если динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является локально асимптотически уплотняющей, то следующие условия эквивалентны:

1. $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $b$-диссипативна;
2. $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально $k$-диссипативна.

Следуя [12] будем говорить, что динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ удовлетворяет условию Ладыженской, если для любой ограниченной последовательности $\{x_k\}$ и $t_k \to +\infty$ последовательность $\{x_k t_k\}$ относительно компактна.

**Теорема** [46]. Пусть $(X, \mathbb{R}, \pi)$ удовлетворяет условию Ладыженской. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. существует ограниченное множество $B_1 \in B(X)$ такое, что для любого $x \in X$ найдется $\tau = \tau(x) \geq 0$ такое, что $xt \in B_1$ при всех $t \geq \tau$;

2. существует ограниченное множество $B_2 \in B(X)$ такое, что для любого $x \in X$ найдется $\tau = \tau(x) \geq 0$ такое, что $x\tau \in B_2$;

3. существует непустой компакт $K_1 \in C(X)$ такой, что $\omega_x \subseteq K_1$ при всех $x \in X$;

4. существует непустой компакт $K_2 \in C(X)$ такой, что $\omega_x \bigcap K_2 \neq \emptyset$ при всех $x \in X$;

5. существует непустое компактное множество $K_3 \in C(X)$ такое, что для любого ограниченного множества $M \in B(X)$ имеет место равенство
$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t M, K_3) = 0; \tag{24}$$

6. существует ограниченное множество $B_3 \in B(X)$ такое, что для любого $M \in B(X)$ найдется $L = L(M) \geq 0$ такое, что $\pi^t M \subseteq B_3$ при всех $t \geq L(M)$.

В работе [12] анонсировано утверждение о том, что условия 2 и 5 эквивалентны.

Если динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно $k$ диссипативна, то, согласно теореме 2.2, ее центр Левинсона $J$ является максимальным компактным инвариантным множеством $(X, \mathbb{T}, \pi)$. С другой стороны, если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $k$-диссипативна, но не компактно $k$ диссипативна, то в $(X, \mathbb{T}, \pi)$ может не быть максимального компактного инвариантного множества. Это обстоятельство подтверждается примером 2.2. В то же время существуют поточечно $k$-диссипативные динамические системы, но не компактно $k$-диссипативные динамические системы, имеющие максимальное компактное инвариантное множество (см. пример 2.2). В связи с вышесказанным нам представляется интересной следующая

**Задача** Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $k$-диссипативна, но не компактно $k$-диссипативна. Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ допускала максимальное компактное инвариантное множество.

Сформулированная задача тесно связана с одной проблемой Дж.Хейла. Для ее формулировки нам понадобится понятие меры некомпактности. Напомним, [26], [22], [2], что мерой некомпактности $\mu$ на $X$ называют отображение $\mu : B(X) \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\mu(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $A$ относительно компактно;

2. $\mu(A \bigcup B) = \max(\mu(A), \mu(B))$ для любых $A, B \in B(X)$.

Мерой некомпактности Куратовского $\alpha$ определяется равенством $\alpha(A) = \inf\{\varepsilon \mid A$ допускает конечное $\varepsilon$ покрытие $\}$.
Непрерывное отображение $P : X \to X$ называется $\mu$ сжатием ($\mu$ сжатием порядка $q \in ]0, 1[$), если $\mu(P(A)) < \mu(A)$ $(\mu(P(A)) \leq q\mu(A))$ для любого $A \in B(X)$, такого что $\mu(A) > 0$.

**Задача** (Проблема Дж.Хейла [93]) Пусть $(X, P)$ каскад, порожденный положительными степенями $P$. Имеется ли в $(X, P)$ максимальное компактное инвариантное множество, если $(X, P)$ поточечно $b$-диссипативен и отображение $P$ является $\mu$ сжатием порядка $q \in ]0, 1[$?

**Теорема** [26], [14], [96]. Динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является асимптотически компактной, если выполнено одно из следующих условий:

1. $(X, \mathbb{T}, \pi)$ вполне непрерывна;

2. $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является $\mu$ сжатием, т.е. $\mu(\pi^t A) < \mu(A)$ для любых $A \in B(X)$ $(\mu(A) > 0)$ и $t > 0$;

3. пространство $X$ является банаховым, $\pi^t = S(t) + U(t)$ $(t > 0)$ и выполнены следующие условия:
   а. $U(t)$ вполне непрерывно;
   б. $|S(t)x| \leq \varphi(t, r)$ при всех $t \geq 0$ и $|x| \leq r$ $(\forall r > 0)$, где $\varphi(t, r) \to 0$ при $t \to +\infty$.

В связи с проблемой Дж.Хейла отметим, что согласно теореме 2.3, если $(X, P)$ является $\mu$ сжатием, то каскад $(X, P)$ будет асимптотически компактным, и согласно следствию 2.3 из поточечной $b$-диссипативности $(X, P)$ следует его поточечная диссипативность. **Теорема** [97], [83]. Пусть каскад $(X, P)$ поточечно $b$-диссипативен, непрерывное отображение $P : X \to X$ является $\alpha$ сжатием порядка $q \in ]0, 1[$, и $J \subset X$ компактное инвариантное множество $(X, P)$, содержащее все $\omega$-предельные точки $(X, P)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $J$ максимальное компактное инвариантное множество $(X, P)$;

2. $J$ орбитально устойчиво;

3. $J$ притягивает все компакты из $X$.

Можно показать, что условия 2. и 3. эквивалентны для любой поточечно $k$-диссипативной системы (в частности для поточечно $b$-диссипативной и асимптотически компактной системы). Из условия 2. (3.) следует условие 1., если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $k$-диссипативна. Однако из условия 1. не вытекает условие 2. (или 3.) для поточечно $k$-диссипативных систем. Последнее подтверждается примером 2.2.

**Теорема** [45], [101]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $b$-диссипативна и при каждом $t > 0$ отображение $\pi^t$ является $\mu$ сжатием и $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально ограничена, т.е. для каждой точки $p \in X$ существует $\delta_p > 0$ такое, что $\Sigma^+(S(p, \delta_p)) = \bigcup\{\pi^t S(p, \delta_p) | t \geq 0\}$ ограничено. Тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально $k$-диссипативна.

**Теорема** [95], [105]. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $b$-диссипативна, и при каждом $t > 0$ отображение $\pi^t$ является $\mu$ сжатием. Если положительная полутраектория любого ограниченного множества ограничена, то $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ограниченно $k$-диссипативна.

Теоремы 2.3-2.3 дают частичное решение проблемы Дж.Хейла, но во всех этих теоремах система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ оказывается $k$-диссипативной, и следовательно максимальное компактное инвариантное множество совпадает с центром Левинсона. В связи с этим представляет интерес теорема 2.2, которая дает условия существования максимального компактного инвариантного множества у поточечно $k$-диссипативной системы, при условии компактности $J^+(\Omega)$. Отметим, что существуют поточечно $k$-диссипативные системы, у которых $J^+(\Omega)$ компактно, но не являются компактно $k$-диссипативными (см. пример 2.2). С другой стороны, если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно $k$-диссипативна, а $J^+(\Omega)$ неком пактно, то $(X, \mathbb{T}, \pi)$ может не иметь максимального компактного инвариантного множества. Последнее подтверждается примером 2.2. Заметим, что динамическая система из примера 2.2 не является локально ограниченной.

# 3 Неавтономные диссипативные динамические системы

## 3.1 Неавтономные динамические системы

Напомним [28], [6], что неавтономной динамической системой называется тройка $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$, где $h : X \to Y$ гомоморфизм динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$. Приведем некоторые примеры неавтономных динамических систем.

**Пример** (косое произведение динамических систем). Пусть $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ динамическая система на $Y$, $W$ полное метрическое пространство и $\varphi$ непрерывное отображение $\mathbb{T}_1 \times W \times Y$ в $W$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\varphi(0, u, y) = u$ при всех $u \in W$ и $y \in Y$;

2. $\varphi(t + \tau, u, y) = \varphi(t, \varphi(\tau, u, y), \sigma(y, \tau))$ при всех $t, \tau \in \mathbb{T}_1, u \in W$ и $y \in Y$,

тогда тройку $< W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) >$ (или кратко $\varphi$) называют коциклом [61], [112] над $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем $W$.
Положим $X = W \times Y$ и определим отображение $\pi : X \times \mathbb{T}_1 \to X$ по следующему правилу: $\pi = (\varphi, \sigma)$, т.е. $\pi(< u, y >, t) =< \varphi(t, u, y), \sigma(y, t) >$ при всех $(u, y) \in W \times Y$ и $t \in \mathbb{T}_1$. Тогда $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ есть динамическая система на $X$ (косое произведение [112]), а непрерывное отображение $h = pr_2 : X \to Y$ является гомоморфизмом $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ и, следовательно, тройка $(X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h$ является неавтономной динамической системой.
Обозначим через $U(t, y)$ $((t, y) \in \mathbb{T}_1 \times Y)$ непрерывный оператор, действующий из $W$ в $W$ и определенный равенством $U(t, y)x = \varphi(t, x, y)$ при всех $x \in W$. Отметим следующие свойства двухпараметрического семейства операторов $\{U(t, y)|t \in \mathbb{T}_1, y \in Y\}$:

3. $U(0, y) = Id_W$ при любом $y \in Y$;

4. $U(t + \tau, y) = U(t, \sigma(y, \tau))U(\tau, y)$ при всех $t, \tau \in \mathbb{T}_1$ и $y \in Y$;

5. отображение $(t, x, y) \to U(t, y)x$ непрерывно по совокупности аргументов.

**Пример** Пусть $\mathfrak{B}$ банахово пространство, $C(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ пространство всех непрерывных функций $f : \mathbb{R} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, наделенное открыто-компактной топологией, и $(C(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{B}), \mathbb{R}, \sigma)$ динамическая система сдвигов на $C(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ [42], [17], [112], [59]. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = f(t, x), \tag{25}$$

где $f \in C(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{B})$. Наряду с уравнением (25) рассмотрим и семейство уравнений

$$y' = g(t, y), \tag{26}$$

где $g \in H(f) = \overline{\{f_\tau | \tau \in \mathbb{R}\}}$, $f_\tau$ сдвиг функции $f$ по переменной $t$ на $\tau$ и чертой обозначено замыкание в $C(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{B})$.
Функцию $f \in C(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ называют [110], [111], [112] регулярной, если для

любых $v \in \mathfrak{B}$ и $g \in H(f)$ уравнение (26) допускает единственное решение $\varphi(t, v, g)$, проходящее через $v$ при $t = 0$, определенное на $\mathbb{R}_+$ и непрерывно зависящее от совокупности аргументов $(t, v, g)$.
Если функция $f \in C(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ регулярна, то корректно определено отображение $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathfrak{B} \times Y \to \mathfrak{B}$ $(Y = H(f))$, и при этом выполнены следующие условия:

1. $\varphi(0, v, g) = v$ при всех $v \in \mathfrak{B}$ и $g \in Y = H(f)$;

2. $\varphi(t + \tau, v, g) = \varphi(t, \varphi(\tau, v, g), g_\tau)$ при всех $v \in \mathfrak{B}$, $g \in \mathfrak{B}$ и $t, \tau \in \mathbb{R}_+$;

3. отображение $\varphi : (t, v, g) \to \varphi(t, v, g)$ непрерывно.

Обозначим через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ динамическую систему сдвигов на $Y = H(f)$, индуцированную динамической системой $(C(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{B}), \mathbb{R}, \sigma)$, тогда тройка $< \mathfrak{B}, \varphi, (\mathbb{T}, \mathbb{R}, \sigma) >$ является коциклом над $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ со слоем $\mathfrak{B}$. Таким образом дифференциальное уравнение (25) с регулярной правой частью $f \in C(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ естественным образом порождает неавтономную динамическую систему
$< (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma, h) >$, где $X = \mathfrak{B} \times Y$, $\pi = (\varphi, \sigma)$ и $h = pr_2 : X \to Y$.

**Замечание** Отметим, что в приведенной выше конструкции мы предполагали, что функция $f$ непрерывна по совокупности аргументов $(t, x)$, т.е. (25) является обыкновенным дифференциальным уравнением. Уравнение вида (25) может порождать некоторую неавтономную динамическую систему и в случае, когда ее правая часть по переменной $x \in \mathfrak{B}$ является замкнутой, но не обязательно непрерывной. К такого рода эволюционным уравнениям приводят некоторые классы уравнений с частными производными (см., например, [3], [27]). Ниже дается реализация такой конструкции на примере уравнения с монотонной по $x \in \mathfrak{B}$ правой частью.

**Пример** Пусть $H$ вещественное гильбертово пространство. Напомним [3], [63], [24], [15], что оператор $A : D(A) \to H$ называется монотонным, если $< Au - Av, u - v > \geq 0$ при всех $u, v \in D(A)$, где $D(A)$ область определения оператора $A$. Рассмотрим уравнение

$$x' + Ax = f(t), \tag{27}$$

где $f \in C(\mathbb{R}, H)$ и $A$ максимальный монотонный оператор. Согласно [63] каково бы ни было $u \in \overline{D(A)}$, существует единственное слабое решение $\varphi(t, u, f)$ уравнения (27), определенное на $\mathbb{R}_+$ с условием $\varphi(0, u, f) = u$.

Пусть $Y = \overline{H(f)}$ и $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ динамическая система сдвигов на $H(f)$. Положим $X = \overline{D(A)} \times Y$ и определим отображение $\pi : X \times \mathbb{R}_+ \to X$ равенством $\pi(< v, g >, t) =< \varphi(t, v, g), g_t >$ при всех $(v, g) \in X$ и $t \geq 0$, где $\varphi(t, v, g)$ решение уравнения

$$y' + Ay = g(t) \tag{28}$$

с условием $\varphi(0, v, g) = v$. Как показано в работе [107], тройка $< (X, \mathbb{R}_+, \pi)$, $(Y, \mathbb{R}, \sigma), h >$, где $h = pr_2 : X \to Y$, является неавтономной динамической системой.

### 3.2 Неавтономные диссипативные динамические системы

Неавтономную динамическую систему

$$< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h > \tag{29}$$

назовем поточечно $k$-диссипативной, если этим свойством обладает система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. Аналогичным образом определяются и остальные типы диссипативности для неавтономных систем.

Пусть неавтономная система (29) компактно $k$-диссипативна, и $J$ центр Левинсона динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. Множество $J$ будем называть центром Левинсона неавтономной диссипативной системы (29). Согласно теореме 2.2 центр Левинсона $J$ орбитально устойчив относительно динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. При рассмотрении $J$ как центра Левинсона неавтономной динамической системы (29) более естественной является орбитальная устойчивость относительно неавтономной системы (29).

Напомним [42], [5], [15], что множество $K \subseteq X$ называют орбитально устойчивым относительно неавтономной системы (29), если для любого $\varepsilon \geq 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x, K_y) < \delta$ $(y = h(x), K_Y = K \bigcap X_Y$ и $X_y = \{x \in X | h(x) = y\} = h^{-1}(y))$ влечет $\rho(xt, K_{yt}) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. Если существует $\gamma > 0$ такое, что $\rho(xt, K_{yt}) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех $x \in X_y$ таких, что $\rho(x, K_y) \leq \gamma$, то говорят, что $K$ асимптотически устойчиво. При этом, если $\rho(xt, K_{yt}) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех $x \in X_y$ $(y = h(x))$, то говорят, что множество $K \subseteq X$ асимптотически устойчиво в целом относительно неавтономной системы (29).

Следуя [4], множество $K \subseteq X$ назовем асимптотически устойчивым в целом в смысле Ляпунова-Барбашина, если

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(xt, K_{h(x)t}) = 0 \tag{30}$$

при всех $x \in X$, причем равенство (30) имеет место равномерно по $x$ на компактах из $X$. Как было показано в работе [11], центр Левинсона неавтономной системы, вообще говоря, не является асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова-Барбашина.

**Теорема** [42], [28], [11]. Пусть неавтономная динамическая система (29) компактно $k$-диссипативна, $J$ ее центр Левинсона, $Y = h(J)$ и отображение $F : Y \to 2^X$ $(F(y) = J_y)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа. Тогда $J$ асимптотически устойчиво в целом относительно неавтономной системы (29), причем равенство (30) имеет место равномерно по $x$ на компактах из $X$.

Неавтономную систему (29) называют [31] равномерно устойчивой в положительном направлении на компактах из $X$, если для любых $\varepsilon > 0$ и компакта $K \in C(X)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \delta$ следует $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$ и $x_1, x_2 \in K$, для которых $h(x_1) = h(x_2)$.

**Теорема** Пусть неавтономная система (29) компактно $k$-диссипативна, равномерно устойчива в положительном направлении на компактах из $X$ и $Y$ минимально, тогда:

1. отображение $y \to J_y$ непрерывно в метрике Хаусдорфа;

2. динамическая система $(J, \mathbb{T}_1, \pi)$ продолжается до групповой динамической системы $(J, S, \hat{\pi})$, причем $(J, S, \hat{\pi})$ дистальна, т.е. для любых двух точек $x_1, x_2 \in J$
$$\inf_{t \in S} \rho(\hat{\pi}^t x_1, \hat{\pi}^t x_2) > 0, \tag{31}$$
если $h(x_1) = h(x_2)$;

3. $J$ состоит из рекуррентных движений и любые две точки $x_1, x_2 \in J_y$ $(y \in Y)$ совместно рекуррентны;

4. если слои $X_y$ связны, то при каждом $y \in Y$ множество $J_y = X_y \bigcap J$ связно и для любых $y_1$ и $y_2$ множества $J_{y_1}$ и $J_y$ гомеоморфны;

5. $J$ асимптотически устойчиво в целом.

Важным классом неавтономных систем, обладающих свойством равномерной устойчивости в положительном направлении на компактах из $X$ являются $\mathbb{C}$-аналитические системы. Напомним [31], [48] что неавтономная динамическая система (29) называется $\mathbb{C}$-аналитической, если выполнены следующие условия:

1. $(X, h, Y)$ конечномерное ($n$-мерное) расслоение над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ со слоем $\mathbb{C}^n$;

2. при каждом $y \in Y$ и $t \in \mathbb{T}_1$ отображение $\pi^t : X_y \to X_{yt}$ голоморфно.

**Теорема** [31]. Если $Y$ компактно, то $\mathbb{C}$-аналитическая компактно $k$-диссипативная динамическая система (29) равномерно устойчива в положительном направлении на компактах из $X$.

**Теорема** [31]. Всякая $\mathbb{C}$-аналитическая неавтономная динамическая система (29), у которой $Y$ компактное минимальное множество, обладает следующими свойствами:

1. при любом $y \in Y$ множество $J_y$ состоит из единственной точки $x_y$;

2. множество $J$ равномерно асимптотически устойчиво в целом;

3. динамическая система $(J, \mathbb{T}_1, \pi)$ изоморфна $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$.

В частности, если точка $y \in Y$ рекуррентна (почти периодична, квазипериодична, периодична), то рекуррентной (почти периодической, квазипериодической, периодической) является и точка $x_y$.
Напомним, что отображение $\varphi : Y \to X$ называют сечением $(X, h, Y)$, если $h(\varphi(y)) = y$ при всех $y \in Y$. Обозначим через $\Gamma(Y, X)$ пространство всех непрерывных сечений $(X, h, Y)$. Если $Y$ компактно и $(X, h, Y)$ является банаховым расслоением, то равенством $||\varphi|| = max\{|\varphi(y)| : y \in Y\}$ определяется полная норма на $\Gamma(Y, X)$. При каждом $t \in \mathbb{T}_+$ и $\varphi \in \Gamma(Y, X)$ определим $(S^t\varphi)(y) = \pi^t\varphi(\sigma^{-t}y)$ $(y \in Y)$.

**Теорема** [29]. Пусть $Y$ компактно и $(X, h, Y)$ банахово расслоение, тогда имеют место следующие утверждения:

1. тройка $(\Gamma(Y, X), \mathbb{T}_+, \rho)$ является полугрупповой динамической системой;

2. если неавтономная динамическая система (29) ограниченно $b$-диссипативна, то и автономная динамическая система $(\Gamma(Y, X), \mathbb{T}_+, \rho)$ ограниченно $b$-диссипативна.

Таким образом, теорема 3.2 утверждает, что неавтономная диссипативная система $< (X, \mathbb{T}_+, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h >$ порождает в пространстве непрерывных сечений $\Gamma(Y, X)$ автономную полугрупповую диссипативную систему

$(\Gamma(Y,X),\mathbb{T}_+,\rho)$. Это обстоятельство оказывается полезным при изучении инвариантных сечений, которые играют важную роль при изучении почти периодических решений операторных уравнений. Напомним, что сечение $\varphi \in \Gamma(Y,X)$ называется инвариантным, если $\pi^t \circ \varphi = \varphi \circ \sigma^t$ $(t \in \mathbb{T}_+)$, или, что то же самое, $\rho^t\varphi = \varphi$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$.

**Теорема** [29], [30]. Пусть $D \subset \mathbb{C}^m$ ограниченная область, $< (X,\mathbb{T}_+,\pi), (Y,\mathbb{T},\sigma), h >$ неавтономная диссипативная система и выполнены следующие условия:

1. $Y = \overline{D}$ ($\overline{D}$ - замыкание $D$) и при каждом $t \in \mathbb{T}$ отображение $\sigma^t$ голоморфно в $D$;

2. неавтономная система $< (X,\mathbb{T}_+,\pi),(Y,\mathbb{T},\sigma),h >$ является $\mathbb{C}$-аналитической.

Тогда существует хотя бы одно инвариантое сечение $\varphi \in \Gamma(Y,X)$, голоморфное в $D$.

Наиболее важным для приложений является случай, когда $D$ есть некоторая окрестность тора $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}^m$, а динамическая система $(Y,\mathbb{T},\sigma)$ на $\mathcal{F}$ есть иррациональная обмотка.
Неавтономную динамическую систему (29) называют [34], [45], [39], [67] конвергентной, если выполнены следующие условия:

1. динамические системы $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ и $(Y,\mathbb{T}_2,\sigma)$ компактно $k$-диссипативны;

2. $J_X \bigcap X_Y$ содержит ровно одну точку $x_y$, каково бы ни было $y \in J_Y$, где $J_X$ $(J_Y)$ центр Левинсона динамической системы $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ $((Y,\mathbb{T}_2,\sigma))$.

Из теоремы 3.2 следует, что всякая $\mathbb{C}$-аналитическая система (29) является конвергентной, если $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ и $(Y,\mathbb{T}_2,\sigma)$ компактно $k$-диссипативны и $J_Y$ минимально.

**Теорема** [47], [67]. Пусть $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ и $(Y,\mathbb{T}_2,\sigma)$ компактно $k$-диссипативны. Тогда следующие условия для неавтономной системы (29) эквивалентны:

1. неавтономная динамическая система (29) конвергентна;

2. каждая полутраектория $\Sigma_p^+$ $(p \in X)$ асимптотически устойчива относительно системы (29), т.е.

(a) для любых $\varepsilon > 0$ и $p \in X$ существует $\delta(\varepsilon, p) > 0$ такое, что $\rho(x,p) < \delta$ $(h(x) = h(p))$ влечет $\rho(xt, pt) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$;

(b) существует $\gamma(p) > 0$ такое, что $\rho(x,p) < \gamma(p)$ $(h(x) = h(p))$ влечет

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(xt, pt) = 0 \tag{32}$$

3. неавтономная система (29) равномерно устойчива в положительном направлении на компактах из $X$ и

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(x_1t, x_2t) = 0 \tag{33}$$

при всех $(x_1, x_2) \in X\dot{\times}X = \{(x_1, x_2)|h(x_1) = h(x_2), x_1, x_2 \in X\}$;

4. равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{(x_1,x_2)\in K\dot{\times}K} \rho(x_1t, x_2t) = 0 \tag{34}$$

имеет место для любого компакта $K \in C(X)$.

**Теорема** [47], [45], [67]. Пусть $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно $k$-диссипативна и $J_Y$ минимально. Для того, чтобы неавтономная система (29) была конвергентной, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $K \in C(X)$ имело место равенство (34).

Отметим, что неавтономные конвергентные системы являются простейшими среди диссипативных систем. Если неавтономная система (29) конвергентна и $J_X$ $(J_Y)$ центр Левинсона динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, то $J_X$ и $J_Y$ гомеоморфны. Хотя центр Левинсона $J_X$ неавтономной конвергентной системы и допускает полное описание, тем не менее структура $J_X$ может быть весьма сложной, например $J_X$ может быть странным аттрактором. Приведем пример, подтверждающий сказанное.

**Пример** [47], [45]. Пусть $Y = \mathbb{R}$ и $(Y, \mathbb{Z}_+, \sigma)$ каскад, порожденный положительными степенями нечетной функции $g$, определенной на $\mathbb{R}_+$ по следующему правилу:

$$g(y) = \begin{cases} -2y & , \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 2(y-1) & , \quad \frac{1}{2} < y \leq 1 \\ \frac{1}{2}(y-1) & , \quad 1 < y < +\infty. \end{cases} \tag{35}$$

Легко убедиться, что $(Y,\mathbb{Z}_+,\sigma)$ диссипативен и $J_Y\subseteq[-1,1]$. Положим $X=\mathbb{R}^2$ и через $(X,\mathbb{Z}_+,\pi)$ обозначим каскад, порожденный положительными степенями отображения $P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, определенного равенством

$$P\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F(u,y) \\ g(y) \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где $F(u,y)=10^{-1}u+2^{-1}y$. Наконец, пусть $h=pr_2:X\to Y$. Из (36) следует, что $h$ есть гомоморфизм $(X,\mathbb{Z}_+,\pi)$ на $(Y,\mathbb{Z}_+,\sigma)$, и, следовательно, $<(X,\mathbb{Z}_+,\pi),(Y,\mathbb{Z}_+,\sigma),h>$ есть неавтономная динамическая система. Заметим, что

$$|<u_1,y>-<u_2,y>|=|u_1-u_2|=10|P(u_1,y)-P(u_2,y)|. \tag{37}$$

Из равенства (37) следует, что

$$|P^n(u_1,y)-P^n(u_2,y)|\le\mathcal{N}e^{-\nu n}|<u_1,y>-<u_2,y>| \tag{38}$$

при всех $n\in\mathbb{Z}_+$, где $\mathcal{N}=1$ и $\nu=\ln 10$. Непосредственно проверяется, что динамическая система $(X,\mathbb{Z}_+,\pi)$ диссипативна, а из неравенства (38) вытекает, что $J_X\bigcap X_y$ содержит ровно одну точку, каково бы ни было $y\in J_Y$.

Отметим, что построенный выше пример является незначительной модификацией одного примера из [57], стр. 39–42. При этом они имеют одинаковые аттракторы, и соответствующие системы на аттракторах действуют одинаково. Следовательно, центры Левинсона $J_X$ и $J_Y$ являются перемешивающими (странными) аттракторами.

**Теорема** [51]. Пусть $(X,h,Y)$ банахово расслоение [7], $<(X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h>$ неавтономная динамическая система, и для любого ограниченного множества $M\subset X$ существует $l=l(M)>0$ такое, что $\pi^l(M)$ относительно компактно (т.е. динамическая система $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ вполне непрерывна), тогда следующие условия эквивалентны:

1. существует положительное число $r$ такое, что для любого $x\in X$ найдется $\tau=\tau(x)\ge 0$, для которого $|x\tau|<r$;
2. неавтономная система $<(X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h>$ компактно $k$-диссипативна и

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{|x|\le R}\rho(xt,J)=0 \tag{39}$$

при каждом $R > 0$, где $J$ центр Левинсона $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$, т.е. неавтономная система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ допускает компактный глобальный аттрактор.

**Теорема** [51]. Пусть $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ неавтономная динамическая система и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ удовлетворяет условию Ладыженской. Тогда условия 1. и 2. теоремы 3.2 эквивалентны.

**Теорема** [51]. Пусть $(X, h, Y)$ банахово расслоение, $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ неавтономная система и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ асимптотически компактна. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. существует положительное число $R_0$ такое, что для любого $R > 0$ найдется $l(R) > 0$, такое что
$$|\pi^t x| \leq R_0 \tag{40}$$
при всех $t \geq l(R)$ и $|x| \leq R$;

2. динамическая система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ допускает компактный глобальный аттрактор.

**Следствие** Для конечномерных систем (т.е. векторное расслоение $(X, h, Y)$ конечномерно) теоремы 3.2-3.2 доказаны в [32], для бесконечномерных систем соответствующие результаты содержатся в [51] и [43].

**Теорема** [51]. Пусть $(X, h, Y)$ банахово расслоение, $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ неавтономная система и отображения $\pi^t = \pi(\cdot, t) : X \to X$ $(t \in \mathbb{T}_1)$ представимы в виде суммы $\pi(x, t) = \varphi(x, t) + \psi(x, t)$ при всех $t \in \mathbb{T}_1$ и $x \in X$, и выполнены условия:

1. $|\varphi(x, t)| \leq m(t, r)$ при всех $t \in \mathbb{T}_1$ и $|x| \leq r$, где $m : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $m(t, r) \to 0$ при $t \to +\infty$;

2. отображения $\psi(\cdot, t) : X \to X$ $(t > 0)$ условно вполне непрерывны, т.е. $\psi(A, t)$ относительно компактно, каковы бы ни были $t > 0$ и ограниченное положительное инвариантное множество $A$.

Тогда автономная динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ асимптотически компактна.

Пусть $\Sigma \subseteq X$ компактное инвариантное множество, $x, y \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$ и $t > 0$ $(t \in \mathbb{T}_1)$. Набор $\{x = x_0, x_1, x_2, ..., x_k = y; t_0, t_1, ..., t_k\}$ точек $x_i \in \Sigma$ и чисел $t_i \in \mathbb{T}_1$ такой, что $t_i \geq t$ и $\rho(x_i t_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ $(i = 0, 1, ..., k-1)$, называется $(\varepsilon, t, \pi)$ цепью, соединяющей $x$ и $y$. Через $P(\Sigma)$ обозначим множество

$\{(x,y)|x,y \in \Sigma, \forall\varepsilon > 0, \forall t > 0, \exists(\varepsilon, t, \pi)$ цепь от $x$ к $y\}$. Отношение $P(\Sigma)$ замкнуто, инвариантно и транзитивно [6]. Точку $x \in \Sigma$ называют цепно рекуррентной, если $(x,x) \in P(\Sigma)$. Положим $\mathcal{R}(\Sigma) = \{x \in \Sigma|(x,x) \in P(\Sigma)\}$. Введем на $\mathcal{R}(\Sigma)$ отношение $\sim$ по следующему правилу: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $(x,y) \in P(\Sigma)$ и $(y,x) \in P(\Sigma)$. Легко проверить, что введенное отношение $\sim$ на $\mathcal{R}(\Sigma)$ является отношением эквивалентности и, следовательно, разбивает его на классы эквивалентности $\{\mathcal{R}_\lambda|\lambda \in \mathcal{L}\}$, т.е. $\mathcal{R}(\Sigma) = \coprod\{\mathcal{R}_\lambda|\lambda \in \mathcal{L}\}$. Согласно предложению 2.6 из [6] составляющие классы, определенного выше разбиения множества $\mathcal{R}(\Sigma)$, являются замкнутыми и инвариантными множествами.

Всюду ниже до конца этого параграфа мы будем предполагать, что векторное расслоение $(X,h,Y)$ является конечномерным и неавтономная система $< (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h >$ является групповой, т.е. $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_2 = S$. Для $M \subseteq X$ положим $W^s(M) = \{x \in X|w_x \subseteq M\}$ и $W^u(M) = \{x \in X|\alpha_x \subseteq M\}$.

Пусть $\Sigma \subseteq X$ таково, что число классов эквивалентности $\{\mathcal{R}_\lambda|\lambda \in \mathcal{L}\}$ конечно, т.е. $\mathcal{R}(\Sigma) = \mathcal{R}_1 \coprod \mathcal{R}_2 \coprod ... \coprod \mathcal{R}_k$.

Следуя [1] в системе $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, ..., \mathcal{R}_k\}$ введем отношение частичного порядка: $\mathcal{R}_i < \mathcal{R}_j$, если существуют $i_1, i_2, ..., i_k$ такие, что $i_1 = i, i_r = j$ и $W^s(\mathcal{R}_{i_p}) \bigcap W^u(\mathcal{R}_{i_{p+1}}) \neq \emptyset$ при всех $p = 1,2,...,r-1$.

Упорядоченный набор из $r$ $(r \geq 2)$ различных индексов $\{i_1, i_2, ..., i_r\}$, удовлетворяющих условию $\mathcal{R}_{i_1} < \mathcal{R}_{i_2} < ... < \mathcal{R}_{i_r} < \mathcal{R}_{i_1}$, называют $r$ циклом в наборе $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, ..., \mathcal{R}_k\}$.

Под один-циклом понимают такой индекс $i$, что $W^s(\mathcal{R}_i) \bigcap W^u(\mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}_i \neq \emptyset$.

**Лемма** [40], [41]. Пусть $\mathcal{R}(\Sigma) = \mathcal{R}_1 \coprod \mathcal{R}_2 \coprod ... \coprod \mathcal{R}_k$, т.е. в разбиении $\{\mathcal{R}_\lambda|\lambda \in \mathcal{L}\}$ множества $\mathcal{R}(\Sigma)$ содержится лишь конечное число классов эквивалентности, тогда имеют место следующие утверждения:

1. в наборе $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, ..., \mathcal{R}_k\}$ нет $r$-циклов $(r \geq 1)$;

2. множества $\mathcal{R}_i$ $(i = \overline{1,k})$ локально максимальны в $\Sigma$, т.е. для $\mathcal{R}_i$ существует окрестность $U_i$ множества $\mathcal{R}_i$ в $\Sigma$ такая, что $\mathcal{R}_i$ есть максимальное замкнутое инвариантное множество в $U_i$;

3. множества $\mathcal{R}_i$ $(i = \overline{1,k})$ неразложимы, т.е. не представимы в виде дизъюнктного объединения двух своих непустых замкнутых инвариантных подмножеств.

Пусть $y \in Y$ и $p \in X_y = h^{-1}(y)$. Обозначим через $W^s_\delta(p) = \{x \in X_y|\rho(xt,pt) \leq \delta, t \geq 0\}$ и $W^u_\delta(p) = \{x \in X_y|\rho(xt,pt) \leq \delta, t \leq 0\}$. Будем говорить, что компактное инвариантное множество $\Lambda \subseteq X$ гиперболично (неавтономная система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ имеет гиперболическую структуру на $\Lambda$), если выполнены следующие условия:

1. $W^s_\delta(p) \bigcap W^u_\delta(p) = \{p\}$ при всех $p \in \Lambda$, $W^s_\delta(p)$ и $W^u_\delta(p)$ подмногообразия из $X_y$, гомеоморфные замкнутому диску в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^{n-k}$ соответственно. При этом, если $\rho(p,q) \leq \gamma$ $(p, q \in X_y)$, то $W^s_\delta(p) \bigcap W^u_\delta(q) \neq \emptyset$;

2. $\pi^t W^s_\delta(p) \subseteq W^s_\delta(\pi^t p)$ при всех $t \geq 0$ и $\pi^t W^u_\delta(p) \supseteq W^u_\delta(\pi^t p)$ при всех $t \leq 0$ и при каждом $p \in \Lambda$;

3. подмногообразия $W^s_\delta(p)$ и $W^u_\delta(p)$ непрерывно зависят от точки $p \in \Lambda$ в метрике Хаусдорфа;

4. а. $\rho(p_1 t, p_2 t) \leq \mathcal{N} e^{-\nu t} \rho(p_1, p_2)$ при всех $p_1, p_2 \in W^s_\delta(p)$ и $t \geq 0$ и
   б. $\rho(p_1 t, p_2 t) \leq \mathcal{N} e^{\nu t} \rho(p_1, p_2)$ при всех $p_1, p_2 \in W^u_\delta(p)$ и $t \leq 0$.

**Замечание**

1. Если $\Lambda \subseteq X$ является гиперболическим в общепринятом смысле [6], [18], то при некоторых дополнительных условиях гладкости множество $\Lambda$ будет гиперболическим и в смысле вышеприведенного определения. Обратное, вообще говоря, не верно;

2. Для автономных динамических систем с дискретным временем близкое понятие (аксиома $A^{\#}$) содержится в работе [1].

**Теорема** [40], [41]. Пусть $Y$ компактное минимальное множество, $\Sigma$ компактное инвариантное множество из $X$ и выполнено одно из следующих условий:

1. число минимальных множеств в $\Sigma$ конечно;

2. если в $\Sigma$ содержится бесконечное число минимальных множеств, то на множестве $\mathcal{M}(\Sigma)$ ($\mathcal{M}(\Sigma)$ замыкание множества всех рекуррентных движений из $\Sigma$), кроме, быть может, конечного числа изолированных минимальных множеств, неавтономная система имеет гиперболическую структуру.

Тогда отношение $\sim$ разбивает $\mathcal{R}(\Sigma)$ на конечное число различных классов эквивалентности.

**Теорема** [40], [41]. Пусть $Y$ компактное минимальное множество, $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ неавтономная диссипативная система и на ее центре Левинсона $J$ выполнены условия теоремы 3.2. Тогда:

1. отношение $\sim$ разбивает множество $\mathcal{R}(J)$ на конечное число различных классов эквивалентности, т.е. $\mathcal{R}(J) = \mathcal{R}_1 \coprod \mathcal{R}_2 \coprod ... \coprod \mathcal{R}_k$;
2. множества $\mathcal{R}_i$ $(i = \overline{1,k})$ замкнуты, инвариантны, неразложимы, локально максимальны и в наборе $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, ..., \mathcal{R}_k\}$ нет $r$-циклов $r \geq 1$;
3. $J = \bigcup \{W^u(\mathcal{R}_i) | i = \overline{1,k}\}$.

**Теорема** [36]. Пусть $Y$ компактное минимальное множество, векторное расслоение $(X, h, Y)$ одномерно, неавтономная динамическая система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ диссипативна и $J$ ее центр Левинсона. Если $\mathcal{M}(J)$ гиперболично, то:

1. в $J$ содержится лишь конечное число различных минимальных множеств $M_1, M_2, ..., M_k$, каждое из которых гомеоморфно $Y$ и $\mathcal{M}(J) = M_1 \coprod M_2 \coprod ... \coprod M_k$;
2. какова бы ни была точка $x \in J$ существуют точки $p_1$ и $p_2$ из $\mathcal{M}(J)$ такие, что $h(x) = h(p_1) = h(p_2)$, и выполнены соотношения
$$\lim_{t \to +\infty} \rho(xt, p_1 t) = 0 \text{ и } \lim_{t \to +\infty} \rho(xt, p_1 t) = 0; \qquad (41)$$
3. если $x \overline{\in} J$ и $\gamma_i(y) = M_i \bigcap X_y$ $(i = \overline{1,k})$, то:
   (a) $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(xt, \gamma_1(y)t) = 0$ при $x < \gamma_1(y)$ $y = h(x)$ и
   (b) $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(xt, \gamma_k(y)t) = 0$ при $x > \gamma_k(y)$;
4. $\partial J = M_1 \bigcup M_k$ и $\partial J$ равномерно асимптотически устойчиво в положительном направлении, где $\partial J$ граница $J$.

## 3.3 Метод функций Ляпунова.

В этом параграфе приводятся критерии различного типа диссипативности и конвергентности в терминах функций Ляпунова. В теоремах 3.3-3.3 предполагается, что $(X, h, Y)$ является банаховым расслоением, а $Y$ компактным (кроме теоремы 3.3).

**Теорема** [65]. Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ вполне непрерывна. Для того, чтобы неавтономная динамическая система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ была ограниченно $k$-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовали число $r > 0$ и непрерывная функция $V : X_r \to \mathbb{R}$ ($X_r = \{x \in X| \ |x| \geq r\}$), обладающая следующими свойствами:

1. множество $\{x \in X|V(x) \leq c\}$ ограничено при любом $c \in \mathbb{R}$;
2. если $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$, то $V(xt) \leq V(x)$;
3. линии уровня функции $V$ не содержат $\omega$-предельных точек динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.

**Лемма** Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ вполне непрерывна, $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ неавтономная динамическая система и существуют $r > 0$ и непрерывная функция $V : X_r \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:
а. множество $\{x \in X_r|V(x) \leq c\}$ ограничено при любом $c \in \mathbb{R}$;
б. если $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$, то $V(xt) \leq V(x)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. линии уровня функции $V$ не содержат $\omega$ предельных точек динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.
2. линии уровня функции $V$ не содержат положительных полутраекторий динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.

**Теорема** [65] Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ вполне непрерывна. Для того, чтобы динамическая система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ была ограниченно $k$-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовали число $r > 0$ и непрерывная функция $V : X_r \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1. множество $\{x \in X_r|V(x) \leq c\}$ ограничено при любом $c \in \mathbb{R}$;
2. если $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$ $(t > 0)$, то $V(xt) < V(x)$.

**Теорема** [65]. Пусть $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{T}_1$ и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ асимптотически компактна. Для того, чтобы неавтономная система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ была локально $k$-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовали $r > 0$ и непрерывная функция $V : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. при всех $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X_r|V(x) \leq c\}$ ограничено;

2. вдоль траекторий системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ функция $V$ является невозрастающей, т.е. $V(xt) \leq V(x)$ при всех $x \in X$ и $t \geq 0$;

3. если $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$ $(t > 0)$, то $V(xt) < V(x)$.

Неавтономную систему $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ назовем ограниченной, если для любого $R > 0$ существует $C(R) > 0$ такое, что $|xt| \leq C(R)$ при всех $|x| \leq R$ и $t \geq 0$.

**Теорема** [65]. Пусть $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{T}_1$ и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ асимптотически компактна. Для того, чтобы неавтономная система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ была ограниченной и ограниченно $k$-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовали $r > 0$ и непрерывная и ограниченная на ограниченных множествах функция $V : X_r \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1. при любом $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X_r | V(x) \leq c\}$ ограничено;

2. если $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$, то $V(xt) \leq V(x)$.

3. линии уровня $V$ не содержат $\omega$-предельных точек динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.

**Теорема** [65] Пусть $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{T}_1$ и $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ неавтономная динамическая система. Если существуют $r > 0$ и функция $V : X_r \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1. при любом $c \in \mathbb{R}$ множества $\{x \in X_r | V(x) \leq c\}$ и $\{V(x) | x \in X_r, |x| \leq c\}$ ограничены;

2. $\dot{V}_\pi(x) \leq -W(x)$ при всех $x \in X_r$, где $W : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ положительна на $[r, +\infty)$, а $\dot{V}_\pi(x) = \overline{\lim_{t \downarrow 0}} t^{-1}[V(xt - V(x)]$. Тогда существует $R_0 > 0$ такое, что для любого $R > 0$ найдется $l(R) > 0$, при котором $|xt| \leq R_0$ при всех $t \geq l(R)$ и $|x| \leq R$.

**Следствие** Пусть $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{T}_1$ и $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ неавтономная динамическая система. Если существует функция $V : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. при любом $c > 0$ множество $\{V(x) | x \in X, |x| \leq c\}$ ограничено;

2. $V(x) \geq \gamma_1 |x|^m - D_1$ $(\gamma_1, D_1, m > 0)$ при всех $x \in X$;

3. $\dot{V}_\pi(x) \leq -\gamma_2 V(x) + D_2$ $(\gamma_2, D_2 > 0)$ при всех $x \in X$,
   то существует $R_0 > 0$ такое, что для любого $R > 0$ найдется $l(R) > 0$, при котором $|xt| \leq R_0$ при всех $|x| \leq R$ и $t \geq l(R)$.

**Замечание**

1. Теоремы 3.3-3.3 были получены в [42], [32], [35] для неавтономных систем в конечномерном пространстве. В бесконечномерном случае соответствующие результаты содержатся в [43] и [65].

2. Следствие 3.3 в автономном случае уточняет хорошо известный факт (см., например [55], [56]), который часто используется для установления диссипативности того или иного конкретного эволюционного уравнения в частных производных.

В заключение этого параграфа приведем некоторые критерии конвергентности неавтономных диссипативных систем в терминах функций Ляпунова, зависящих от двух пространственных переменных.

**Теорема** [42], [45], [67]. Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно $k$-диссипативны. Для того, чтобы неавтономная динамическая система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi)$, $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ была конвергентной, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция $V : X \dot{\times} X \to \mathbb{R}_+$ $(X \dot{\times} X = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in X$, $h(x_1) = h(x_2)\})$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $V$ положительно определена, т.е. $V(x_1, x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$;

2. $V(x_1 t, x_2 t) \leq V(x_1, x_2)$ при всех $t \geq 0$ и $(x_1, x_2) \in X \dot{\times} X$;

3. $V(x_1 t, x_2 t) = V(x_1, x_2)$ при всех $t \geq 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

**Теорема** [42], [45], [67]. Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно $k$-диссипативны. Для того, чтобы неавтономная динамическая система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ была конвергентной, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция $V : X \dot{\times} X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $V$ положительно определена;

2. $V(x_1 t, x_2 t) < V(x_1, x_2)$ при всех $t \geq 0$ и $(x_1, x_2) \in X \dot{\times} X \setminus \Delta_X$, где $\Delta_X = \{(x, x) = |x \in X\}$.

**Теорема** [42], [45], [67], [33]. Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно $k$-диссипативные динамические системы и существует непрерывная функция $V : X \times X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $V$ положительно определена;
2. $V(x_1 t, x_2 t) \leq \omega(V(x_1, x_2), t)$ при всех $(x_1, x_2) \in X \dot{\times} X \setminus \Delta_X$ и $t \geq 0$, где $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ неубывающая по первой переменной функция и $\omega(r, t) \to 0$ при $t \to +\infty$ при каждом $r \in \mathbb{R}_+$.

Тогда неавтономная система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ конвергентна.

**Следствие** Условие 2. теоремы 3.3 выполняется, если функция $V : X \dot{\times} X \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет одному из следующих условий:

1. $V(x_1 t, x_2 t) \leq \mathcal{N} e^{-\nu t} V(x_1, x_2)$ при всех $t \geq 0$ и $(x_1, x_2) \in X \dot{\times} X$, где $\mathcal{N}$ и $\nu$ некоторые положительные числа. В этом случае $\omega(r, t) = \mathcal{N} e^{-\nu t} r$;
2. $V(x_1 t, x_2 t) \leq 2V(x_1, x_2)[2 + tV(x_1, x_2)]^{-1}$ при всех $t \geq 0$ и $(x_1, x_2) \in X \dot{\times} X$ $(\omega(r, t) = 2r[2 + rt]^{-1})$.

### 3.4 Однородные и линейные системы.

Пусть $(X, h, Y)$ локально тривиальное банахово расслоение. Неавтономную систему $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ назовем однородной порядка $k = 1$, если $\pi(\lambda x, t) = \lambda \pi(x, t)$ при всех $\lambda \geq 0$, $x \in X$ и $t \in \mathbb{T}_1$. Автономную динамическую систему $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ назовем однородной порядка $k$ $(k \geq 1)$, если $\pi(\lambda x, t) = \lambda \pi(x, \lambda^{k-1} t)$ при всех $\lambda \geq 0$, $x \in X$ и $t \in \mathbb{R}_+$.
Если $x \in X$, то положим $|x| = \rho(x, \theta_{h(x)})$, где $\theta_y$ $y \in Y$ нулевой элемент линейного пространства $X_y$ и $\Theta = \{\theta_y | y \in Y\}$ нулевое сечение векторного расслоения $(X, h, Y)$. Через $X^s$ обозначим устойчивое многообразие $<$ $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$,
$(Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$, т.е. $X^s = \{x \in X | \lim\limits_{t \to +\infty} |xt| = 0\}$.

**Теорема** [42], [47], [44], [52]. Пусть неавтономная система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ однородна порядка $k = 1$, и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ поточечно $k$-диссипативна. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ поточечно $k$-диссипативна, т.е. $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечно $k$-диссипативна;
2. $X^s = X$.

**Теорема** [42], [47], [44], [52]. Пусть $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ однородная порядка $k = 1$ и следующие условия эквивалентны:

1. неавтономная система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ компактно $k$-диссипативна;

2. $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ конвергентна.

**Теорема** Пусть $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ однородна порядка $k = 1$ и $Y$ компактно, тогда следующие условия эквивалентны:

1. неавтономная динамическая система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ компактно $k$-диссипативна;

2. $X^s = X$ и множество $\Theta \bigcap h^{-1}(J_Y)$ равномерно устойчиво, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|x| < \delta$ влечет $|xt| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$;

3. в случае, когда векторное расслоение $(X, h, Y)$ является нормированным (т.е. метрика $\rho$ на слоях $(X, h, Y)$ согласована с нормой) существует положительное число $\mathcal{N}$ такое, что
$$|xt| \leq \mathcal{N}|x| \tag{42}$$
при всех $x \in X$, $t \geq 0$ и $x \in X$.

**Теорема** [42], [47], [44], [52]. Пусть $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ однородна порядка $k = 1$ и $Y$ компактно, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ локально диссипативна, т.е. $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ локально диссипативна;

2. $X^s = X$ и нулевое сечение $\Theta$ векторного расслоения $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ является равномерно притягивающим, т.е. существует $\gamma > 0$ такое, что
$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{|x| \leq \gamma} |\pi(x, t)| = 0; \tag{43}$$

3. в случае, когда векторное расслоение является нормированным, существуют положительные числа $\mathcal{N}$ и $\nu$ такие, что
$$|\pi(x, t)| \leq \mathcal{N} e^{-\nu t}|x| \tag{44}$$
при всех $x \in X$ и $t \geq 0$.

**Следствие** Теоремы 3.4-3.4 имеют место и для автономных однородных (порядка $k \geq 1$) систем с непрерывным временем.

Неавтономная система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ называется линейной, если при каждом $y \in Y$ и $t \in \mathbb{T}_1$ отображение $\pi^t : X_y \to X_{\sigma^t Y}$ линейно.

**Теорема** [42], [44], [52], [69]. Пусть $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$ групповая (т.е. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$) линейная неавтономная система, $Y$ компактно, $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ нормированное векторное расслоение и существуют положительные числа $M$ и $a$, что $|\pi^t x| \leq M e^{a|t|} |x|$ $(x \in X\ t \in \mathbb{T})$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. существуют положительные числа $\mathcal{N}$ и $\nu$ такие, что выполнено (44) при всех $x \in X$ и $t \geq 0$;
2. существует функция $V : X \to \mathbb{R}_+$, обладающая следующими свойствами:
   (a) $V$ есть некоторая норма на $(X, h, Y)$;
   (b) существуют положительные числа $\alpha$ и $\beta$ такие, что $\alpha|x| \leq V(x) \leq \beta|x|$ $(x \in X)$;
   (c) $\dot{V}_\pi(x) = -|x|$ $(x \in X)$, где $\dot{V}_\pi(x) = \lim\limits_{t \downarrow 0} t^{-1}[V(xt) - V(x)]$ при $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ и $\dot{V}_\pi(x) = V(x1) - V(x)$, если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Неавтономную динамическую систему $< (W, \mathbb{T}_1, \mu), (Z, \mathbb{T}_2, \lambda), \rho >$ назовем линейной неоднородной системой, порожденной линейной однородной системой $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$, если выполнены следующие условия:

1. существует гомоморфизм $q$ динамической системы $(Z, \mathbb{T}_2, \lambda)$ в $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$;
2. при каждом $y \in (q \circ p)(W) \subseteq Y$ пространство $W_y = (q \circ p)^{-1}(y)$ является афинным, а векторное пространство $X_y = h^{-1}(y)$, присоединенным к $W_y$ ([58], стр. 175). Отображение $\mu^t : W_y \to W_{\sigma^t y}$ является афинным, а $\pi^t : X_y \to X_{\sigma^t y}$ является ее линейной присоединенной функцией ([58], стр. 179), т.е. $X_y = \{w_1 - w_2 | w_1, w_2 \in W_y\}$ и $\mu^t w_1 - \mu^t w_2 = \pi^t(w_1 - w_2)$ при всех $w_1, w_2 \in W_y$ и $t \in \mathbb{T}$.

**Теорема** Пусть $< (W, \mathbb{T}_1, \mu), (Z, \mathbb{T}_2, \lambda), \rho >$ линейная неоднородная динамическая система и $(Z, \mathbb{T}_2, \lambda)$ компактно $k$-диссипативна. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $< (W, \mathbb{T}_1, \mu), (Z, \mathbb{T}_2, \lambda), \rho >$ компактно $k$-диссипативна;

2. $< (W, \mathbb{T}_1, \mu), (Z, \mathbb{T}_2, \lambda), \rho >$ конвергентна.

**Теорема** [33]. Пусть $< (W, \mathbb{T}_1, \mu), (Z, \mathbb{T}_2, \lambda), \rho >$ линейная неоднородная система, порожденная однородной системой $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$, $\mathbb{T}_2 = \mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$, и $q$ гомоморфизм $(Z, \mathbb{T}_2, \lambda)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$. Если $Y$ и $Z$ компактны и $(X, h, Y)$ нормированное векторное расслоение, то линейная неоднородная система $< (W, \mathbb{T}_1, \mu), (Z, \mathbb{T}_2, \lambda), \rho >$ локально $k$-диссипативна тогда и только тогда, когда локально $k$-диссипативна порождающая ее однородная система $< (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h >$.

## 3.5 Глобальные аттракторы коциклов и оттягивающие назад (pullback) аттракторы

Пусть $W$ и $Y$ полные метрические пространства, $(Y, S\sigma)$ групповая динамическая система на $Y$, и $< W, \varphi, (Y, S, \sigma) >$ коцикл над $(Y, S, \sigma)$ со слоем $W$, $X = W \times Y$, $(X, \mathbb{T}, \pi)$ косое произведение (т.е. $\pi = (\varphi, \sigma)$) и $< (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, S, \sigma), h$ $(h = pr_2)$ соответствующая неавтономная динамическая система.

Если $M \subseteq W$, то положим

$$\Omega_y(M) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \varphi(\tau, M, \sigma_{-t} y)} \tag{45}$$

для каждого $y \in Y$, где $\sigma_{-t} y = \sigma(-t, y)$.

**Лемма** [51]. Имеют место следующие утверждения:

1. точка $p \in \Omega_y(M)$ тогда и только тогда, когда существуют $t_n \to +\infty$ и $\{x_n\} \subseteq M$ такие, что $p = \lim_{n \to +\infty} \varphi(t_n, x_n, \sigma_{-t_n} y)$;

2. $U(t, y)\Omega_y(M) \subseteq \Omega_{\sigma_t y}(M)$ при всех $y \in Y$ и $t \in \mathbb{T}$, где $U(t, y) = \varphi(t, \cdot, y)$;

3. какова бы ни была точка $w \in \Omega_y(M)$, движение $\varphi(t, w, y)$ определено на $S$;

4. если существует непустой компакт $K \subset W$ такой, что

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\varphi(t, M, \sigma_{-t} y), K) = 0, \tag{46}$$

то $\Omega_y(M) \neq \emptyset$, компактно,

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\varphi(t, M, \sigma_{-t} y), \Omega_y(M)) = 0 \tag{47}$$

и

$$U(t,y)\Omega_y(M) = \Omega_{\sigma_t y}(M) \tag{48}$$

при всех $y \in Y$ и $t \in \mathbb{T}$

Коцикл $< W, \varphi, (Y, S, \sigma) >$ называют [51] компактно диссипативным, если существует непустой компакт $K \subseteq W$ такой, что

$$\lim_{t \to +\infty} \sup\{\beta(U(t,y)M, K) | y \in Y\} = 0 \tag{49}$$

для любого $M \in C(W)$.

**Лемма** [51]. Пусть $Y$ компактно. Для того, чтобы коцикл $< W, \varphi, (Y, S, \sigma) >$ был компактно диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы косое произведение $(X, \mathbb{T}, \pi)$ $(X = W \times Y$ и $\pi = (\varphi, \sigma))$ было компактно диссипативным.

Целое траекторией полугрупповой динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ (соответственно коцикла $< W, \varphi, (Y, S, \sigma) >$), проходящей через точку $x \in X$ $((u, y) \in W \times Y)$, называют непрерывное отображение $\gamma : S \to X$ $(\nu : S \to W)$, удовлетворяющее условиям:

1. $\gamma(0) = x$ $(\nu(0) = u)$ и
2. $\pi^t \gamma(\tau) = \gamma(t + \tau)$ $(\nu(t + \tau) = \varphi(t, \nu(\tau), \sigma_\tau y))$

при всех $t \in \mathbb{T}$ и $\tau \in S$.

**Теорема** [51]. Пусть $Y$ компактно, коцикл $< W, \varphi, (Y, S, \sigma) >$ компактно диссипативен и $K$ непустой компакт, фигурирующий в равенстве (49). Тогда:

1. $I_y = \Omega_y(K) \neq \emptyset$ компактно, $I_y \subseteq K$ и

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(U(t, \sigma_{-t} y)K, I_y) = 0 \tag{50}$$

   при каждом $y \in Y$;

2. $U(t,y)I_y = I_{\sigma_t y}$ при всех $y \in Y$ и $t \in \mathbb{T}$;
3. 

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(U(t, \sigma_{-t} y)M, I_y) = 0 \tag{51}$$

   при всех $M \in C(W)$ и $y \in Y$;

4.
$$\lim_{t\to+\infty}\sup\{\beta(U(t,\sigma_{-t}y)M,I)|y\in Y\}=0, \tag{52}$$
каково бы ни было $M\in C(W)$, где $I=\bigcup\{I_y|y\in Y\}$;

5. $I_y = pr_1 J_y$ при всех $y \in Y$, где $J$ центр Левинсона $(X,\mathbb{T},\pi)$, и, следовательно, $I = pr_1 J$;

6. множество $I$ замкнуто и компактно;

7. $pr_2 J = Y$;

8. множество $I$ связно, если выполнено одно из следующих условий:
   (a) $\mathbb{T}=\mathbb{R}_+$ и пространства $W$ и $Y$ связны;
   (b) $\mathbb{T}=\mathbb{Z}_+$ и пространство $W\times Y$ обладает свойством $(S)$, либо связно и локально связно.

**Замечание** Теорема 3.5 усиливает и уточняет основные результаты [78], [8] для бесконечномерных систем и [102] для конечномерных систем.

Семейство непустых компактов $\{I_y|y\in Y\}$ $(I_y\in C(W))$ называют [84], [108] оттягивающим назад (pullback) аттрактором коцикла $< W,\varphi,(Y,S,\sigma) >$, если выполнены следующие условия:

1. $\{I_y|y \in Y\}$ инвариантно относительно коцикла $\varphi$, т.е. $U(t,y)I_y = I_{\sigma_t y}$ при всех $y$ $Y$ и $t\in\mathbb{T}$, где $U(t,y)=\varphi(t,\cdot,y)$;

2. равенство (51) имеет место для каждого $y\in Y$ и $M\in C(W)$.

Согласно лемме 3.5 и теореме 3.5, если коцикл $< W,\varphi,(Y,S,\sigma) >$ компактно диссипативен, то косое произведение $(X,\mathbb{T},\pi)$ $(X = W\times Y, \pi = (\varphi,\sigma))$ является компактно диссипативным и семейство непустых компактов $\{I_y|y\in Y\}$ (где $I_y = pr_1 J_y$, $J$ центр Левинсона $(X,\mathbb{T},\pi)$ и $J_y = J\bigcap(W\times\{y\})$) является оттягивающим назад аттрактором коцикла $\varphi$.

**Лемма** [73]. Пусть $\{I_y|y\in Y\}$ оттягивающий назад аттрактор коцикла $< W,\varphi,(Y,S,\sigma) >$, тогда множество
$$J=\bigcup\{I_y\times\{y\}|y\in Y\} \tag{53}$$
является максимальным компактным инвариантным множеством динамической системы $(X,\mathbb{T},\pi)$.

Коцикл $< W, \varphi, (Y, S, \sigma) >$ называется [73] $\alpha$-уплотняющим, если множество $\varphi(t, B, Y)$ ограничено и $\alpha(\varphi(t, B, Y)) < \alpha(B)$ для любого $t > 0$ и ограниченного подмножества $B \subset W$ с условием $\alpha(B) > 0$, где $\alpha$ мера некомпактности
Куратовского на $W$.

**Теорема** [73]. Пусть коцикл $< W, \varphi, (Y, S, \sigma) >$ является $\alpha$-уплотняющим и $\{I_y | y \in Y\}$ его оттягивающий назад компактный глобальный аттрактор. Тогда множество $J$, определенное равенством (53), асимптотически устойчиво в $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Если кроме того $W^s(J) = X$, то $J$ является глобальным компактным аттрактором $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и, следовательно, коцикл $\varphi$ компактно диссипативен.

Приводимый ниже пример показывает, что коцикл $\varphi$ может допускать оттягивающий назад компактный глобальный аттрактор, но не быть компактно диссипативным ($J$ будет локальным аттрактором $(X, \mathbb{T}, \pi)$, но не будет его глобальным аттрактором).

**Пример** [73]. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывная функция, определенная равенством

$$f(t) = -\left(\frac{1+t}{1+t^2}\right)^2, \qquad t \in \mathbb{R},$$

и пусть $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ динамическая система сдвигов на $Y = H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$, $f_\tau$ сдвиг функции $f$ на $\tau$ и чертой обозначено замыкание в открыто-компактной топологии. Заметим, что

$$P = H(f) = \bigcup \{f_\tau | \tau \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}.$$

Пусть $E$ функционал, определенный на $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ при помощи равенства $E(f) = f(0) \in \mathbb{R}$.

**Лемма** [73]. Функционал

$$\gamma(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-\tau} E(\sigma_\tau p) d\tau = -\int_0^{+\infty} e^{-\tau} p(\tau) d\tau$$

определен и непрерывен на $Y = H(f)$, и функция от $t \in \mathbb{R}$, определенная равенством

$$\gamma(\sigma_t p) = -e^t \int_t^{+\infty} e^{-\tau} p(\tau) d\tau = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(t+h)^2} & : \ p = \sigma_h f \\ 0 & : \ p = 0, \end{cases}$$

является единственным ограниченным на $\mathbb{R}$ решением дифференциального уравнения

$$x' = x + E(\sigma_t p) = x + p(t).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u' = g(\sigma_t p, u), \tag{54}$$

где

$$g(p,u) = \begin{cases} -u - E(p)u^2 & : \ 0 \le u\gamma(p) \le 1,\, p \ne 0 \\ -\dfrac{1}{\gamma(p)}\left(1 + \dfrac{E(p)}{\gamma(p)}\right) & : \quad 1 < u\gamma(p), p \ne 0 \\ -u & : \quad 0 \le u, p = 0 \end{cases} .$$

Легко заметить, что уравнение (54) имеет единственное решение, проходящее через точки $u_0 \in W = \mathbb{R}_+$ при $t = 0$, и определенное на $\mathbb{R}$. Таким образом определен коцикл $< W, \varphi, (Y, \mathbb{R}, \sigma) >$, где $W = \mathbb{R}_+$, $Y = H(f)$ и

$$\varphi(t, u_0, p) = \begin{cases} \dfrac{u_0}{e^t(1 - u_0\gamma(p)) + u_0\gamma(\sigma_t p)} & : \ 0 \le u_0\gamma(p) \le 1,\, p \ne 0 \\ u_0 + \dfrac{1}{\gamma(\sigma_t p)} - \dfrac{1}{\gamma(p)} & : \quad 1 < u_0\,\gamma(p),\, p \ne 0 \\ e^{-t}u_0 & : \quad 0 \le u_0,\ p = 0 \end{cases} . \tag{55}$$

По построению коцикл $\varphi$ допускает единственное компактное инвариантное множество $\{I_p | p \in Y\}$, где $I_p = \{0\}$ для любого $p \in Y$. Кроме того, семейство компактов $\{I_p | p \in Y\}$ является оттягивающим назад аттрактором $\varphi$, так как

$$\varphi(t, u_0, \sigma_{-t} p) = \begin{cases} \dfrac{u_0}{e^t(1 - u_0\gamma(\sigma_{-t} p)) + u_0\gamma(p)} & : \ 0 \le u_0\gamma(p) \le 1,\, p \ne 0 \\ u_0 + \dfrac{1}{\gamma(p)} - \dfrac{1}{\gamma(\sigma_{-t} p)} & : \quad 1 < u_0\,\gamma(p),\, p \ne 0 \\ e^{-t}u_0 & : \quad 0 \le u_0,\ p = 0 \end{cases} .$$

Заметим, что $\varphi(t, u, \sigma_{-t} p \le \frac{1}{2} L e^{-\frac{1}{2}t}$ для любых $u \in [0, L]$, $L \ge 0$ и $p \in Y$ при достаточно больших $t$, и, следовательно, $\{I_p | p \in Y\}$ ($I_p = \{0\}$) является оттягивающим назад аттрактором коцикла $\varphi$. Из равенства (55) следует, что

$$W^s(J) = \{(u,p) | p \in Y, u \in \mathbb{R}_+, u\gamma(p) < 1\} \ne X,$$

где $J = \bigcup \{I_p \times \{p\} | p \in Y\}$ и $X = \mathbb{R}_+ \times Y$. Нужный пример построен.

### 3.6 Заключение.

Из-за ограниченности объема данной статьи мы здесь совершенно не коснулись приложений к различным классам дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и уравнений с частными производными), функционально-дифференциальных уравнений, разностных уравнений и некоторым другим типам уравнений. Многочисленные приложения к уравнениям с частными производными содержатся в обзорах [14], [55] и монографиях [3], [80], [82], [97], [100], [103], [116], [114]. Что касается приложений к функционально-дифференциальным уравнениям, то эти вопросы хорошо отражены в работах [26], [95], [97], [96]. В работах автора [29], [31], [32], [34], [36], [37], [38], [42], [43], [44], [45], [46], [51], [65], [52], [67], [69] систематически изучаются неавтономные диссипативные дифференциальные уравнения (в основном обыкновенные дифференциальные уравнения как в конечномерных, так и в бесконечномерных пространствах) с точки зрения абстрактных динамических систем. Наш подход к изучению неавтономных диссипативных дифференциальных уравнений с точки зрения общих неавтономных динамических систем состоит в следующем: с каждым неавтономным дифференциальным уравнением вида (1) связывается некоторая неавтономная динамическая система (см., например, §1., гл.1), при этом полученная неавтономная динамическая система допускает компактный глобальный аттрактор, если (1) диссипативно (а в бесконечномерном случае в сочетании с некоторыми условиями, типа компактности на оператор сдвига вдоль траекторий) и наоборот. Применяя общие результаты, относящиеся к абстрактным динамическим системам, к неавтономной динамической системе, порожденнной уравнением (1), получаем соответствующие результаты для уравнений вида (1).

Идея применения методов теории абстрактных динамических систем к изучению неавтономных дифференциальных уравнений сама по себе не нова. Она уже более трех десятилетий успешно применяется для решения различных задач в теории линейных и нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений. Впервые такой подход к неавтономным дифференциальным уравнениям был применен в середине 60-ых годов в работах В.М.Миллионщикова, Б.А.Щербакова, Л.Г.Дейсача и Дж.Селла, Р.К.Миллера, Дж.Сейферта, позднее в работах Р.Джонсона, В.В.Жикова, И.У.Бронштейна, а затем и многих других математиков, в том числе и в работах автора этой статьи. Как уже отмечалось выше, этот подход состоит в том, чтобы с каждым неавтономным уравнением (1) связывается пара автономных динамических систем и гомоморфизм первой на вторую. При этом в одну динамическую систему, грубо говоря, закладывается информация о правой части уравнения (как то: периодичность, почти периодичность, рекуррентность, компактность и т.д.), а во вторую - информация о решениях рассматриваемого уравнения.

Другой подход к изучению неавтономных дифференциальных уравнений предложен в работах В.И.Зубова, а затем развит в работах С.М.Дафермоса, Дж.Хейла, В.В.Шестакова и многих других авторов. Суть этого подхода состоит в том, что с каждым неавтономным дифференциальным уравнением (1) связывается двухпараметрическое семейство отображений фазового пространства (по терминологии некоторых авторов- процесс).

В начале оба эти подхода развивались независимо, однако позднее между ними была установлена связь (см. по этому поводу например [86], [107]). Дадим краткое описание этой связи. Напомним, что процессом на полном метрическом пространстве $X_1$ называется двухпараметрическое семейство $\{U(t;\tau)\ |t \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}_+\}$ отображений $X_1$ в себя, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $U(t;0)x = x$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in X_1$;
2. $U(t;\sigma+\tau) = U(t+\tau;\sigma)U(t;\tau)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\sigma,\tau \in \mathbb{R}_+$;
3. отображение $(t,\tau,x) \to U(t,\tau)x$ непрерывно по совокупности аргументов.

Сдвигом на $s \in \mathbb{R}$ процесса $U(t,\tau)$ называют процесс $U_s(t,\tau)$, определенный по правилу: $U_s(t,\tau) = U(s+t,\tau)$ при всех $(t,\tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. В пространстве всех процессов, определенных на $X_1$ вводится сходимость следующим образом: $U_n(t,\tau) \to U(t,\tau)$, если при каждом $\tau \in \mathbb{R}_+$ и $x \in X_1$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho(U_n(t;\tau)x, U(t;\tau)x) = 0.$$

Через $H(U)$ обозначим множество всех пределов последовательностей вида $\{U_{s_n}(t;\tau)\}$, где $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$. Положим $Y = H(U)$ и обозначим через $(Y,\mathbb{R},\sigma)$ динамическую систему сдвигов на $Y$. Пусть $X = X_1 \times Y$ и $(X,\mathbb{R}_+,\pi)$ динамическая система на $X$, определенная по следующему правилу: $\pi((x,V),\tau) = (V(0;\tau)x, V_\tau)$ для любых $V \in H(U) = Y$, $x \in X$ и $\tau \in \mathbb{R}_+$, тогда тройка $< (X,\mathbb{R}_+,\pi),(Y,\mathbb{R},\sigma),h >$ $(h = pr_2 : X \to Y)$ является неавтономной динамической системой.

## Литература


[1] В.М.Алексеев. *Символическая динамика (Одиннадцатая математическая школа).* Наукова думка, Киев, 1986.

[2] Р.Р.Ахмеров и др.. *Меры компактности и уплотняющие операторы.* Наука, Москва, 1986.

[3] А.В.Бабин и М.И.Вишик. *Аттракторы эволюционных уравнений.* Наука, Москва, 1989.

[4] Е.А.Барбашин. Метод сечений в теории динамических систем. *Матем. сборник*, 29(71):233–280, 1951.

[5] И.У.Бронштейн *Расширения минимальных групп преобразований.* Штиинца, Кишинев, 1975.

[6] И.У.Бронштейн. *Неавтономные динамические системы.* Штиинца, Кишинев, 1984.

[7] Н.Бурбаки. *Дифференцируемые и аналитические многообразия.* Мир, Москва, 1975.

[8] М.И.Вишик и В.В.Чепыжов. Аттракторы периодических процессов и оценка их размерности. *Математические заметки*, 57(2):181–202, 1995.

[9] В.М.Герштейн и М.А.Красносельский. Структура множества решений диссипативных уравнений. *Доклады АН СССР*, 183:267–269, 1968.

[10] В.М.Герштейн. К теории диссипативных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. *Функциональный анализ и его приложения*, 4(3):99–100, 1970.

[11] В.В.Жиков. Об устойчивости и неустойчивости центра Левинсона. *Дифференциальные уравнения*, 8(12):2167–2170, 1972.

[12] Л.В.Капитанский и И.Н.Костин. Аттракторы нелинейных эволюционных уравнений и их апроксимация. *Алгебра и Анализ*, 2(1):114–140, 1990.

[13] О.А.Ладыженская. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*, 27:911–115, 1972.

[14] О.А.Ладыженская. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными. *УМН*, 42(6):25–60, 1987.

[15] Б.М.Левитан и В.В.Жиков. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.* Из-во МГУ, Москва, 1987.

[16] Х.Массера и Х.Шеффер. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.* Мир, Москва, 1970.

[17] В.В.Немыцкий и В.В.Степанов. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* Наука, Москва, 1949.

[18] З.Нитецки. *Ввеление в дифференциальную динамику.* Мир, Москва, 1975.

[19] В.А.Плисс. *Нелокальные проблемы теории колебаний.* Наука, Москва, 1964.

[20] В.А.Плисс. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.* Наука, Москва, 1977.

[21] Р.Рейсиг, Г.Сансоне и Р.Конти. *Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.* Наука, Москва, 1974.

[22] Б.Н.Садовский Предельно компактные и уплотняющие операторы. *УМН*, 27(1(163)):81–146, 1972.

[23] К.С.Сибирский и А.С.Шубэ. *Полудинамические системы.* Штиинца, Кишинев, 1987.

[24] Ю.В.Трубников и А.И.Перов. *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями.* Наука и техника, Минск, 1986.

[25] Д.С.Факих и Д.Н.Чебан. Диссипативные динамические системы с многомерным временем и дисперсные динамические системы. *Деп. в Молд. НИИНТИ*, M91(9), 1991.

[26] Дж.Хейл. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* Мир, Москва, 1984.

[27] Д.Хенри. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.* Мир, Москва, 1985.

[28] Д.Н.Чебан. Об устойчивости центра Левинсона неавтономных диссипативных динамических систем. *Дифференциальные уравнения*, 20(11):2016–2018, 1984.

[29] Д.Н.Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. *ДАН СССР*, 28(4):824–827, 1986.

[30] Д.Н.Чебан. Квазипериодические решения диссипативных систем с квазипериодическими коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*, 22(11):267–278, 1986.

[31] Д.Н.Чебан. $\mathbb{C}$-аналитические диссипативные динамические системы. *Дифференциальные уравнения*, 22(11):1915–1922, 1986.

[32] Д.Н.Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. Метод функций Ляпунова. *Дифференциальные уравнения*, 23(3):464–474, 1987.

[33] Д.Н.Чебан. *Ограниченность, диссипативность и почти периодичность решений линейных и слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений*, стр. 143–159. Динамические системы и краевые задачи. Штиинца, Кишинев, 1987.

[34] Д.Н.Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативных динамических систем. *Дифференциальные уравнения*, 24(9):1564–1576, 1988.

[35] Д.Н.Чебан. *Неавтономные диссипативные динамические системы. Метод функций Ляпунова*, стр. 56–64. Наука, Новосибирск, 1988.

[36] Д.Н.Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы с гиперболическим подмножеством центра (одномерный случай). *Математические заметки*, 45(6):93–98, 1989.

[37] Д.Н.Чебан. Об одной проблеме Дж.Хейла. *Математические заметки*, 46(1):120–121, 1989.

[38] Д.Н.Чебан. *Некоторые вопросы теории диссипативных динамических систем, I*, Дифференциальные уравнения и математическая физика, 1989, стр. 147–163.

[39] Д.Н.Чебан. Неавтономные динамические системы с конвергенцией. *Дифференциальные уравнения*, 25(9):1633–1635, 1989.

[40] Д.Н.Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативной динамической системы с условием гиперболичности на замыкании множества рекуррентных движений. *Известия АН РМ, Математика*, (2(2)):34–43, 1990.

[41] Д.Н.Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативной динамической системы с условием гиперболичности на замыкании множества рекуррентных движений. *Дифференциальные уравнения*, 26(5):913–914, 1990.

[42] Д.Н.Чебан. *Неавтономные диссипативные динамические системы.* Дисс. докт. физ.-мат. наук, Институт математики, Минск, 1991.

[43] Д.Н.Чебан. Диссипативные функционально-дифференциальные уравнения. *Известия АН РМ, Математика*, (2(5)):3–12, 1991.

[44] Д.Н.Чебан. Локально диссипативные динамические системы и некоторые их приложения. *Известия АН РМ, Математика*, (1):7–14, 1992.

[45] Д.Н.Чебан. *Некоторые вопросы теории диссипативных динамических систем, II*, Функциональные методы в теории дифференциальных уравнений, стр. 106–122. Мат. Исследования. Штиинца, Кишинев, 1992. выпуск 124.

[46] Д.Н.Чебан. Глобальные аттракторы бесконечномерных динамических систем, I. *Известия АН РМ, Математика*, (2(15)):12–21, 1994.

[47] Д.Н.Чебан и Д.С.Факих. *Глобальные аттракторы дисперсных динамических систем.* Sigma, Кишинев, 1994.

[48] Д.Н.Чебан. О структуре компактных асимптотически устойчивых инвариантных множеств $\mathbb{C}$-аналитических почти периодических систем. *Дифференциальные уравнения*, 31(12):2025–2028, 1995.

[49] Д.Н.Чебан. Глобальные аттракторы бесконечномерных динамических систем, II. *Известия АН РМ, Математика*, (1(17)):28–37, 1995.

[50] Д.Н.Чебан и Д.С.Факих. Глобальные аттракторы бесконечномерных динамических систем, III. *Известия АН РМ, Математика*, (2-3(18-19)):3–13, 1995.

[51] Д.Н.Чебан. Глобальные аттракторы бесконечномерных неавтономных динамических систем, I. *Известия АН РМ, Математика*, (3(25)):42–55, 1997.

[52] Д.Н.Чебан. Асимптотика решений бесконечномерных однородных динамических систем. *Математические заметки*, 63(1):115–126, 1998.

[53] Д.Н.Чебан. Глобальные аттракторы неавтономных динамических систем. Издательский центр Молдавского госуниверситета. Кишинев, 2002.

[54] Д.Н.Чебан. Асимпптотически почти периодические решения дифференциальных уравнений. Издательский центр Молдавского госуниверситета. Кишинев, 2002.

[55] И.Д.Чуешов. Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики. *УМН*, 48(3):135–162, 1993.

[56] И.Д.Чуешов. *Математические основы теории нерегулярных колебаний бесконечномерных систем, I.* ХГУ, Харьков, 1991.

[57] А.Н.Шарковский и др.. *Разностные уравнения и их приложения.* Наукова думка, Киев, 1986.

[58] Л.Шварц. *Анализ*, том 2. Мир, Москва, 1972. В 2-х томах.

[59] Б.А.Щербаков. *Топологическая динамика и устойчивость по Пуассону решений дифференциальных уравнений.* Штиинца, Кишинев, 1972.

[60] Б.А.Щербаков. *Устойчивость по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений.* Штиинца, Кишинев, 1985.

[61] L.Arnold. *Random Dynamical Systems.* Springer–Verlag, Heidelberg, 1998.

[62] J.E.Billotti and J.P.LaSalle. Dissipative periodic process. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77(6):1082–1088, 1971.

[63] H.Brezis. *Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, *Math.Studies.* North Holland, 1973.

[64] T. Caraballo, J. A. Langa and R. Robinson. Upper Semicontinuity of Attractors for Small Random Perturbations of Dynamical Systems. *Comm. in Partial Differential Equations*, 23:1557-1581, 1998.

[65] D.N.Cheban. Global attractors of infinite-dimensional nonautonomous dynamical systems, II. *Bulletin of Academy of sciences of Republic of Moldova. Mathematics*, (2(27)):25–38, 1998.

[66] Cheban D.N. and Schmalfuss B. The global attractors of nonautonomous disperse dynamical systems and differential inclusions . Bulletin of Academy of sciences of Republic of Moldova. Mathematics, 1999. No1(29), pp.3 - 22.

[67] D.N.Cheban. The global attractors of nonautonomous dynamical systems and almost periodic limit regimes of some classes of evolution equations. *Anale Fac. de Mat. şi Inform.*, 1:1–26, 1999.

[68] Cheban D. N., Kloeden P. E. and Schmalfuss B. Pullbac Attractors under Discretization. Proceeding EQUADIFF99. Berlin 1999, vol.2 (Edited by B. Fiedler, K. Groger and J. Sprekels). World Scientific 2000, pp.1024-1029.

[69] D.N.Cheban. Global attractors of quasihomogeneous nonautonomous dynamical systems. In *Proceedings of the International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations*, pages 96–101, Kennesaw, USA, 2000.

[70] Cheban D.N., Schmalfuss Bjoern, Kloeden Peter. Pullback Attractors in Dissipative Nonautonomous Differential Equations under Discretization. Journal of Dynamics and Differential Equations, vol.13, No.1, 2001, pp. 185-213.

[71] Cheban D.N. Global Pullback Atttactors of C-Analytic Nonautonomous Dynamical Systems. Stochastics and Dynamics. 2001,v.1 , No.4,pp.511-535.

[72] Cheban D.N. Global Pullback Atttactors of C-Analytic Cocycles. Bulletin of Academy of sciences of Republic of Moldova. Mathematics, 2001. No.2(36),2001, pp.65-74.

[73] D.N.Cheban, P.E.Kloeden and B.Schmalfuss. Relation between pullback and global attractors of nonautonomous dynamical systems. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, v.2, No.2(2002), pp.9-28.

[74] Cheban D.N. Global Attractors of Quasihomogeneous Nonautonomous Dynamical Systems.Electron. J. Diff. Eqns., Vol.2002(2002), No.10, pp.1-18.

[75] Cheban D.N. Upper Semicontinuity of Attractors of Nonautonomous Dynamical Systems for Small Perturbations.Electron. J. Diff. Eqns., Vol.2002(2002), No.42, pp.1-21.

[76] Cheban D. N., Kloeden P. E. and Schmalfuss B. Global Attractors of V-monotone nonautonomous dynamical systems. Bulletin of Academy of sciences of Republic of Moldova. Mathematics, 2003. No.1(41), pp.47-57.

[77] Cheban D.N. Global Attractors of Nonautonomous Dissipative Dynamical Systems. World Scientific Publishing Company, 2003 (to appear).

[78] V.V.Chepyzhov and M.I.Vishik. A hausdorff dimension estimate for kernel sections of non-autonomous evolutions equations. *Indian Univ. Math. J*, 42(3):1057–1076, 1993.

[79] V.V.Chepyzhov and M.I.Vishik. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension. *J.Math.Pures Appl.*, 73:279–333, 1994.

[80] Chepyzhov V. V. and Vishik M. I. *Attractors for Equations of Mathematical Physics.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[81] J.W.Cholewa and J.K.Hale. Some counterexamples in dissipative systems. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (7):159–176, 2000.

[82] Chueshov I. D. *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems.* Acta Scientific Publishing Hous, Kharkov, 2002.

[83] G.D.Cooperman. *$\alpha$-condensing maps and dissipative systems.* PhD thesis, Brown University, 1978.

[84] H.Crauel and F.Flandoli. Attractors for random dynamical systems. *Probability Theory and Related Fields*, (100):365–393, 1994.

[85] H. Crauel, A. Debusshe and F. Flandoli. Random Attractors. *J. Dyn. Diff. Eq.*, 9(2):307–341, 1997.

[86] C.M.Dafermos. Semiflows Associated with Compact and Uniform Processes. *Math. Syst. Theory*, 8(2):142–149, 1974.

[87] V. P. Dymnikov and A. N. Filatov. *Mathematics of Climate Modeling*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1997.

[88] P. Fabrie and A. Miranville. *Attractors for Nonautonomous First-Order Evolution Equations.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 4(2):225-240, 1998.

[89] F.Flandoli and B.Schmalfuß. Random attractors of the 3d Navier–Stokes equation with multiplicative white noise. *Stochastics and Stochastics Reports*, (59):21–45, 1996.

[90] C. Galusinski, M. Hnid and A. Miranville. Exponential Attractors for Nonautonomous Partially Dissipative Equations. *Differential and Integral Equations*, 12(1):1-22, 1999.

[91] M.Gobbino and M.Sardella. On the connectness of attractors for dynamical systems. *Journal of Differential Equations*, 133(1):1–14, 1997.

[92] J.K.Hale, J.P.LaSalle and M.Slemrod. Theory of a general class of dissipative processes. *Journal Math. Appl.*, 39:177–191, 1972.

[93] J.K.Hale. Some recent results on dissipative processes. Lecture Notes in Mathematics, pp.152–172. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.

[94] J.K.Hale, L.Magalhães and W.Oliva. *An Introduction to Infinite Dimensional Dynamical Systems - Geometric Theory.* Springer, 1984.

[95] J.K.Hale. Asymptotic behavior and dynamics in infinite dimensions. In *Nonlinear Differ. Equations*, pp.1–42. Boston e. á, 1985.

[96] J.K.Hale. Asymptotically smooth semigroups and applications. *Lecture Notes in Math.*, (1248):85–93, 1987.

[97] J.K.Hale. Asymptotic behavior of dissipative systems. In *Mathematical surveys and Monographs*, number 25, p.198+. American Math. Soc., Providence, R.I., 1988.

[98] J.K.Hale. Dissipation and attractors. In *Proceedings of International Conference on Differential Equations* B.Fielder, K.Gröger and J.Sprekels. World Scientific, 2000 volume 1, pp.622–637, Berlin, 1999.

[99] A. Haraux. Attractors of Asymptotically Compact Processes and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations. *Commun. in Partial Differ. Equat.*, 13(11):1383–1414, 1988.

[100] A.Haraux. *Systémes Dynamiques Dissipativs et Applications.* Masson, Paris–Milan–Barselona–Rome, 1991.

[101] A.F.Izé and J.G.Reis. Contributions of stability of neutral functional differential equations. *Journal of Differential Equations*, 29:58–65, 1978.

[102] P.E.Kloeden and B.Schmalfuß. Lyapunov functions and attractors under variable time-step discretization. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2(2):163–172, 1996.

[103] O.A.Ladyzhenskaya. *Attractors for Semigroups and Evolution Equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[104] N.Levinson. Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order. *Ann. Math.*, 45(4):723–737, 1944.

[105] P.Massat. Attractivity properties of $\alpha$-contractions. *Journal of Differential Equations*, 48:326–333, 1983.

[106] A. Miranville. *Exponential Attractors for a Class of Evolution Equations by a decomposition method. II. The Nonautonomous Case.* C. R. Acad. Sci. Paris, t.328, série 1, 907-912, 199.

[107] H.Nacer. Systems dynamiques nonautonomes contractants et leur applications. These de magister, USTHB, Algerie, 1983.

[108] B.Schmalfuß. Backward cocycles and attractors of stochastic differential equations. In *International Seminar on Applied Mathematics – Nonlinear Dynamics: Attractor Approximation and Global Behaviour*, pages 185–192, TU Dresden, 1992. N. Koksch, V. Reitmann and T. Riedrich. Teubner, Leipzig.

[109] B. Schmalfuß. Attractors for the Non-Autonomous Dynamical Systems. *Proceeding EQUADIFF99.* Berlin 1999, vol.1 (Edited by B. Fiedler, K. Groger and J. Sprekels). World Scientific 2000, pp.684-689.

[110] G.R.Sell. Nonautonomous differential equations and topological dynamics I. The basic theory. *Tarns. Amer. Math. Soc.*, 127:241–262, 1967.

[111] G.R.Sell. Nonautonomous differential equations and topological dynamics II. Limiting equations. *Tarns. Amer. Math. Soc.*, 127:263–283, 1967.

[112] G.R.Sell. *Lectures on Topological Dynamics and Differential Equations, Van Nostrand Reinhold math. studies.* Van Nostrand–Reinbold, London, 1971.

[113] G. R. Sell. Global Attractors for the Three-Dimentiolnal Navier-Stokes Equations. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 8(1):1-33, 1996.

[114] Sell G. R. and You Y., Dynamics of Evolutionary Equations. Springer-Verlag, New York, 2002.

[115] R.Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mecanics and Physics.* Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1998.

[116] M.I.Vishik. *Asymptotic Behaviour of Solutions of Evolution Equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[117] M. I. Vishik. Nonautonomus Evolution Equations and Their Attractors. *Proceeding EQUADIFF99.* Berlin 1999, vol.1 (Edited by B. Fiedler, K. Groger and J. Sprekels). World Scientific 2000, pp.690-703.

[118] T.Yoshizawa. Note on the boundedness and the ultimate boundedness of solutions $x' = f(t,x)$. *Memoirs of the college of science. University of Kyoto, Serie A*, 29(3):275–291, 1955.

[119] T.Yoshizawa. Lyapunov's function and boundedness of solutions. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2:95–142, 1959.

[120] Yoshizawa. *Stability Theory by Lyapunov's Second Method.* Mathematical Soc. of Japan, Tokyo, 1966.