ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2003
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Численные методы

ОЦЕНКИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ ИМПУЛЬСНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ.

Н.В.Утина

Россия, 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., 2,
Санкт-Петербургский Государственный Университет,
математико-механический факультет,
кафедра теоретической кибернетики,
e-mail: unv74@mail.ru

Аннотация.

Рассматривается система импульсной фазовой автоподстройки частоты (ИФАПЧ) с интегрирующим фильтром и полигональной характеристикой импульсно-фазового детектора. Для исследования данной системы применены общие критерии, позволяющие получить оценки множества начальных состояний многомерных дискретных фазовых систем, для которых соответствующие решения имеют заданные оценки числа проскальзываний циклов — одной из характеристик переходных процессов в фазовых системах. Полученные оценки области начальных состояний, найденные аналитическими методами, достаточно близки к "точным"границам областей начальных состояний, полученных численным моделированием системы ИФАПЧ.

1 Математическое описание системы ИФАПЧ.

Система импульсно-фазовой автоподстройки частоты (ИФАПЧ) [1] представляет собой разновидность обычных импульсных систем автоматического регулирования с периодической нелинейностью.

Информация о разности фаз сигналов, подводимых к фазовому детектору системы ИФАПЧ, представляет собой последовательность отсчетов, взятых в отдельные (тактовые) моменты времени. Эта информация в импульсных системах может передаваться путем изменения различных параметров входных импульсов формирователя. В дальнейшем ограничимся случаем, когда она передается путем изменения амплитуды импульсов постоянной (прямоугольной) формы. В рамках наложенных ограничений возможны две разновидности ИФАПЧ. В первой из них отсчеты фазовой ошибки берутся в тактовые моменты времени с равными промежутками между ними (когда T_p величина постоянная). Примером может служить система ИФАПЧ, используемая в качестве умножителя частоты. Ее особенностью является не только постоянство периода регулирования T_p, но и связанность периода эталонного сигнала с периодом регулирования. Во второй разновидности отсчеты фазовой ошибки осуществляются также в дискретные моменты времени, но, в отличие от первой, зависящие от текущего состояния системы и потому не обязательно периодические. Примером такой системы является система ИФАПЧ, используемая как делитель частоты, в котором дискретизация осуществляется сигналом подстраиваемого генератора, имеющим благодаря цепи управления переменный период.

Если допустить, что относительное отклонение частоты (периода) подстраиваемого генератора невелико, то можно приближенно считать обе модификации систем работающими при постоянном периоде регулирования. такой случай наиболее характерен для радиотехнических приложений систем ИФАПЧ. предполагая, что эти допущения выполняются, можно изучать обе разновидности систем ИФАПЧ с помощью одного и того же математического метода.

Для анализа системы ИФАПЧ рассмотрим ее математическую модель.

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) + \Omega_y T_p \sum_{j=0}^{n} W(n-j)F(\varphi(j)) = \Omega_H T_p \tag{1}$$

где Ω_y — полоса удержания, Ω_H — начальная расстройка подстраиваемого генератора от необходимой гармоники эталонного сигнала, T_p — период следования сигналов импульсов, $\varphi(n)$ — разность фаз подстраиваемого генератора и необходимой гармоники эталонного сигнала в момент времени nT_p, $F(\varphi) = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sin(\varphi))$ — характеристика импульсно-фазового детектора. Передаточная функция системы (1) определяется следующей функцией комплексной переменной p

$$\chi_1(p) = 1 - \frac{(p-1)(1-\delta)}{\alpha_p(p-\delta)}, \tag{2}$$

где $\alpha_p = T_p/T$, $\delta = e^{-\alpha_p}$, T — постоянная времени фильтра. Приведем передаточную функцию как отношение многочленов:

$$\chi_1(p) = 1 - \frac{(p-1)(1-\delta)}{\alpha_p(p-\delta)} = \frac{\hat{a}p + \hat{b}}{(p-\delta)}$$

где $\hat{a} = (\alpha_p + \delta - 1)/\alpha_p$, $\hat{b} = (-\alpha_p\delta - \delta + 1)/\alpha_p$.

Приведем систему (1) к системе вида

$$\begin{array}{rcll} x(n+1) & = & Ax(n) + b\xi(n) & \\ \varphi(n+1) & = & \varphi(n) + c^*x(n) - \rho\xi(n) & \\ \xi(n) & = & \psi(\varphi(n)) & n = 0, 1, 2, \ldots \end{array} \tag{3}$$

где $\psi(\varphi) = \psi(F(\varphi))$, а передаточная функция системы (3) от входа ψ к приращению выхода $-(\varphi(n+1) - \varphi(n))$ имеет вид

$$\chi_2(p) = c^*(A - pE_\nu)^{-1}b + \rho, \tag{4}$$

где E_ν — единичная $(\nu \times \nu)$-матрица, p — комплексная переменная.

Рассмотрим подробнее перевод системы ИФАПЧ от вида (1) к виду (3). Представим систему (1) в виде решения разностного уравнения в форме Коши

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) + \alpha(n) + \sum_{j=o}^{n} W(n-j)\psi(\varphi) = 0. \tag{5}$$

Для этого потребуем выполнения следующего равенства

$$\alpha(n) + \sum_{j=o}^{n} W(n-j)\psi(\varphi) = \Omega_y T_p \sum_{j=0}^{n} W(n-j)F(\varphi(j)) - \Omega_H T_p \tag{6}$$

Возьмем $\psi(\varphi) = \Omega_y T_p F(\varphi) - \gamma$, $\gamma = const$, тогда (6) можно переписать следующим образом

$$\alpha(n) + \sum_{j=o}^{n} W(n-j)(\Omega_y T_p F(\varphi) - \gamma) = \sum_{j=0}^{n} W(n-j)\Omega_y T_p F(\varphi(j)) - \Omega_H T_p. \tag{7}$$

Отсюда получим выражение для $\alpha(n)$: $\alpha(n) = \gamma \sum\limits_{j=o}^{n} W(n-j) - \Omega_H T_p$. Потребуем выполнения условия $\alpha(n) \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(n) = 0$. Используя определение передаточной функции через дискретное преобразование Лапласа, получим

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = \gamma \sum_{j=o}^{n} W(n-j) - \Omega_H T_p = \gamma\chi_1(1) - \Omega_H T_p = 0$$

Откуда получим выражение для γ: $\gamma = \Omega_H T_p / \chi_1(1)$. Таким образом, при

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) &= \Omega_y T_p F(\varphi) - \gamma, \\ \gamma &= \Omega_H T_p/\chi_1(1), \\ \alpha(n) &= \gamma \textstyle\sum_{j=o}^{n} W(n-j) - \Omega_H T_p \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty \end{aligned} \tag{8}$$

система (1) может быть представлена в виде (5).

Приведем систему (5) к стандартному виду

$$\begin{aligned} z(n+1) &= Pz(n) + q\psi(\varphi(n)) \\ \varphi(n) &= r^* z(n) \end{aligned} \tag{9}$$

используя метод синтеза тройки (P, q, r) по известной передаточной функции

$$K(p) = r^*(P - pE)^{-1}q = \frac{1}{p-1}\chi_1(p) = \frac{\hat{a}p + \hat{b}}{(p-1)(p-\delta)}$$

Обозначим

$$K(p) = \frac{\hat{a}p + \hat{b}}{(p-1)(p-\delta)} = \frac{\alpha(p)}{\beta(p)} = \frac{\alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0},$$

где $\alpha(p)$,$\beta(p)$ — многочлены с коэффициентами $\alpha_0 = \hat{b}$, $\alpha_1 = \hat{a}$, $\beta_0 = \delta$, $\beta_1 = -(1+\delta)$, $\beta_2 = 1$. Используя стандартную форму типа "галочки"для записи матриц системы, возьмем

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\delta & 1+\delta \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

и подберем вектор r так, чтобы выполнялось равенство

$$r^*(P - pE)^{-1}q = \alpha(p)/\beta(p),$$

то есть

$$r = \begin{pmatrix} -\hat{b} \\ -\hat{a} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Таким образом, взяв тройку (P, q, r), определенную по формулам (10), (11), получим систему вида (9)

$$\begin{aligned} z_1(n+1) &= (1+\delta)z_1(n) - \delta \cdot z_2(n) + 1 \cdot \psi(\varphi(n)) \\ z_2(n+1) &= z_1(n) + 0 \cdot z_2(n) + 0 \cdot \psi(\varphi(n)) \\ \varphi(n) &= -\hat{a} \cdot z_1(n) - \hat{b} \cdot z_2(n) \end{aligned} \tag{12}$$

с заданной передаточной функцией $K(p) = \frac{\alpha(p)}{\beta(p)}$.

Теперь систему (9) приведем к виду (3) при помощи неособого преобразования

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad det\ S \neq 0, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Положим $z = Sx$, тогда система (9) примет вид

$$\begin{aligned} Sx(n+1) &= PSx(n) + q\psi(\varphi(n)) \\ \varphi(n) &= r^* Sx(n) \end{aligned}$$

Преобразуем первую строку

$$x(n+1) = S^{-1}PSx(n) + S^{-1}q\psi(\varphi(n))$$

$$x(n+1) - x(n) = S^{-1}(P-E)Sx(n) + S^{-1}q\psi(\varphi(n))$$

В силу свойств взятой матрицы S, имеем

$$S^{-1}(P-E)S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\delta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\delta & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и тогда система примет вид

$$\begin{aligned} x_1(n+1) - x_2(n) &= (-1+\delta)x_1(n) + \psi(\varphi(n)) \\ x_2(n+1) - x_2(n) &= x_1(n)\varphi(n) = -\hat{a}x_1(n) - (\hat{a}+\hat{b})x_2(n) \end{aligned} \tag{14}$$

Откуда выразим $x_2(n)$

$$x_2(n) = -\frac{1}{(\hat{a}+\hat{b})}\varphi(n) - \frac{\hat{a}}{(\hat{a}+\hat{b})}x_1(n)$$

Подставим полученное выражение для x_2 во второе уравнение системы (14)

$$-\frac{1}{(\hat{a}+\hat{b})}\varphi(n+1)-\frac{\hat{a}}{(\hat{a}+\hat{b})}x_1(n+1)+\frac{1}{(\hat{a}+\hat{b})}\varphi(n)+\frac{\hat{a}}{(\hat{a}+\hat{b})}x_1(n)=x_1(n)$$

$$\varphi(n+1)-\varphi(n)=-(\hat{a}+\hat{b})x_1(n)-\hat{a}x_1(n+1)+\hat{a}x_1(n)$$

Из первого уравнения системы (14) выразим $x_1(n+1)=\delta x_1(n)+\psi(\varphi(n))$, тогда получим

$$\varphi(n+1)-\varphi(n)=-(\hat{a}\delta+\hat{b})x_1(n)-\hat{a}\psi(\varphi(n))$$

И, сделав замену $x_1=x$, получаем систему

$$\begin{aligned}&x(n+1)=\delta x(n)+\psi(\varphi(n))\\&\varphi(n+1)=\varphi(n)-(\hat{a}\delta+\hat{b})x(n)-\hat{a}\psi(\varphi(n))\end{aligned}$$

то есть систему вида (3) с коэффициентами

$$A=\delta,\quad b=1,\quad c=-(\hat{a}\delta+\hat{b}),\quad \rho=\hat{a} \tag{15}$$

и передаточной функцией

$$\chi_2(p)=c^*(A-pE)^{-1}b+\rho=-(\hat{a}\delta+\hat{b})\frac{1}{\delta-p}+\hat{a}=\frac{\hat{a}p+\hat{b}}{(p-\delta)}=\chi_1(p),$$

то есть равной передаточной функции системы (1).

2 Постановка задачи.

Одной из характеристик переходных процессов в системах фазовой синхронизации, которая определяет их работоспособность в целом, является число проскальзываний циклов (перескок разности фаз). По-видимому, впервые этот термин ввел в употребление Дж. Стокер [2] в 1950 году при изучении уравнения вида

$$\ddot{x}+c\dot{x}|\dot{x}|+k\sin x=0. \tag{16}$$

Это уравнение описывает движение маятника в среде, которая при движении маятника создает силу, пропорциональную квадрату его скорости и направленную противоположно этой скорости. Стокером была поставлена и решена задача поиска интервала начальных скоростей, при которых движение маятника осуществляется с предварительно заданным числом оборотов (циклов) прежде, чем он перейдет в режим затухающих колебаний около состояния равновесия. И это число оборотов маятника вокруг точки подвеса и получило название числа проскальзывания циклов.

Настоящая работа посвящена получению двусторонних оценок числа проскальзываний циклов для системы импульсной фазовой автоподстройки частоты. С этой целью рассматривается общий случай многомерной фазовой дискретной системы произвольного порядка с периодической нелинейностью, и сформулируются критерии, позволяющие получить оценки множества начальных состояний, соответствующие решения которых имеют заданные оценки числа проскальзываний циклов.

Рассмотрим многомерную дискретную систему вида

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + b\xi(n) \\ \sigma(n+1) &= \sigma(n) + c^*x(n) - \rho\xi \\ \xi(n) &= \psi(\sigma(n)) \qquad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{17}$$

где A — постоянная вещественная $(\nu \times \nu)$ -матрица, b, c — постоянные вещественные ν -векторы, $\rho \neq 0$ — число x, σ — соответственно ν-мерная и скалярная компоненты вектора состояния системы, $\psi(\sigma)$ — скалярная непрерывно дифференцируемая Δ-периодическая функция.

Линейная часть системы характеризуется передаточной функцией от входа ξ к приращению выхода $-(\sigma(n+1) - \sigma(n))$

$$\chi(p) = c^*(A - pE_\nu)^{-1}b + \rho, \tag{18}$$

где E_ν — единичная $(\nu \times \nu)$-матрица, p — комплексная переменная. Предполагаем, что пара (A, b) управляема.

Определение. Решение $(x(n), \sigma(n))$ системы (17) с начальными данными $(x(0), \sigma(0))$ *проскальзывает m циклов*, если для всех натуральных n выполняется

$$|\sigma(n) - \sigma(0)| < \Delta(m+1),$$

и хотя бы для одного натурального числа n_0 справедливо равенство

$$|\sigma(n_0) - \sigma(0)| \geq \Delta m.$$

3 Оценки сверху и снизу числа проскальзываний циклов для дискретной фазовой системы.

Введем в рассмотрение следующие квадратичные формы ν-вектора x и скалярной величины ξ

$$W(x,\xi) = \lambda^{-2}(Ax + b\xi)^* H(Ax + b\xi) - x^* Hx + G(x,\xi) \tag{19}$$

$$G(x(n),\xi(n)) = (\varepsilon + 1/2\ \beta)(c^* x(n) - \rho\xi)^2 + \xi(c^* x(n) - \rho\xi) \tag{20}$$

где $H = H^*$, λ, β, ε — некоторые параметры. Дополнительно предполагаем, что функция $\psi(\sigma)$ имеет на периоде $[0,\Delta)$ два однократных нуля: σ_1, σ_2, для определенности положим $\sigma_1 < \sigma_2$, $\psi\prime(\sigma_1) > 0$, $\psi\prime(\sigma_2) < 0$.

Следующее утверждение позволяет найти множество начальных состояний рассматриваемой многомерной дискретной системы, для которых соответствующие решения имеют заданную верхнюю оценку числа проскальзываний циклов.

Теорема 1. Предположим, что существуют числа

$$k \in \mathbf{N},\ \lambda \in (0,1),\ \varepsilon > 0,\ \alpha > 0,\ \alpha^2 \le 2(1-\lambda^2),$$

такие, что выполнены следующие условия
1) все собственные числа матрицы $\lambda^{-1}A$ расположены в открытом единичном круге;
2) все решения уравнения

$$\Theta''(t) + \alpha\Theta'(t) + \psi(\Theta(t)) = 0 \tag{21}$$

ограничены на $[0,+\infty)$;
3) пусть $\Theta_i(t)$, $i = 1,2$ – решения уравнение (21) с начальными данными $(\Theta(0), \pm\Theta'(0))$, обладающие свойством

$$|\Theta_i(t) - \Theta_i(0)| < \Delta k \quad \forall t \ge 0; \tag{22}$$

4) для любого $p \in \mathbf{C}$, $|p| = 1$, выполнено частотное условие

$$(\varepsilon + 1/2\ \beta)|\chi(\lambda p)|^2 - \Re e\{\chi(\lambda p)\} < 0 \tag{23}$$

$$\text{где} \quad \beta = \max_{\forall\Theta\in\mathbf{R}}\{-(F_i'(\Theta)F_i(\Theta))'\} \tag{24}$$

а функции $F_i(\Theta)$, $i = 1,2$ с начальными данными $F_i(\Theta(0))^2 > \Theta'(0)^2$, являются решением уравнения

$$F_i'(t)F_i(t) + \alpha F_i(t) + \psi(t) = 0 \tag{25}$$

и обладают свойствами

$$F_1(\sigma(0)+k\Delta)=0, \quad F_2(\sigma(0)-k\Delta)=0;$$

Тогда для любого решения $(x(n),\sigma(n))$ системы (17) с начальными данными, удовлетворяющим условиям

$$\sigma(0)=\Theta(0), \quad x(0)^*Hx(0)<\frac{1}{2}\Theta'(0)^2 \tag{26}$$

где $H=H^*$ обеспечивает $W(x,\xi)<0$, для любых $n\geq 0$ имеет место оценка

$$|\sigma(n)-\sigma(0)|<\Delta k \tag{27}$$

Введем в рассмотрение следующие квадратичные формы ν-вектора x и скалярной величины ξ

$$W(x,\xi)=\lambda^{-2}(Ax+b\xi)^*H(Ax+b\xi)-x^*Hx+G(x,\xi) \tag{28}$$

$$G(x,\xi)=-\lambda^{-2}\xi c^*x+\varkappa\lambda^{-2}(c^*x-\rho\xi)^2+\beta\lambda^{-2}(c^*Ax)^2 \tag{29}$$

где $H=H^*$, λ, β, $\varkappa$ — некоторые параметры. Дополнительно предполагаем, что число μ таково, что $|\psi'(\sigma)|\leq\mu$.

Следующее утверждение позволяет найти множество начальных состояний рассматриваемой многомерной дискретной системы, для которых соответствующие решения имеют заданную нижнюю оценку числа проскальзываний циклов.

Теорема 2. Предположим, что существуют числа

$$k\in\mathbf{N},\ \lambda\in(0,1),\ \beta>0,$$

$$\alpha>\frac{1-\lambda^2}{2|\lambda c^*b|\sqrt{2\beta}}, \tag{30}$$

такие, что для них выполнены следующие условия

1) матрица $\lambda^{-1}A$ имеет только одно собственное число вне замкнутого единичного круга;

2) все собственные числа матрицы $D=\lambda^{-1}(E-bc^*/c^*b)A$ расположены в открытом единичном круге;

3) пусть $\Theta_i(t)$ $(i=1,2)$ — решения уравнения

$$\Theta_i''(t)+\alpha\Theta_i'(t)+\psi(\Theta_i(t))=0 \tag{31}$$

с начальными данными $\Theta(0), \pm\Theta'(0)$ такие, что существуют моменты времени $t_i > 0$, для которых имеет место оценка

$$|\Theta_i(t_i) - \Theta_i(0)| > \Delta k \tag{32}$$

и для любого $t \in (0, t_i)$ верно $|\Theta_i'(t)| > 0$;
4) для любого $p \in \mathbf{C}, \quad |p| = 1$, выполнено частотное условие

$$\Re e\{\chi(\lambda p) - \rho\} + \varkappa|\chi(\lambda p)|^2 + \beta|\lambda p(\chi(\lambda p) - \rho) + c^* b|^2 < 0 \tag{33}$$

$$\text{где} \quad \varkappa = \max\left\{0, \max_{\Theta\in[\Theta(0),\Theta(t_i)]}\left[-\frac{1}{2}(\alpha F_i'(\Theta) + \psi'(\Theta))\right]\right\} \tag{34}$$

а функции $F_i(\Theta)$ $(i = 1, 2)$ являются решениями уравнения

$$F_i'(t)F_i(t) + \alpha F_i(t) + \psi(t) = 0 \tag{35}$$

с начальными данными $F_i(\Theta(0)) = \pm\Theta'(0)$ и обладают свойствами

$$F_1(\Theta) > 0, \quad F_2(\Theta) < 0$$

для $\Theta \in [\Theta(0), \Theta(t_i)]$;
5) для $\gamma = 2\alpha\sqrt{2\beta}|\lambda c^* b| + \lambda^2 - 1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\mu}\left[\sqrt{\alpha^2 + 4\mu} - \alpha\right] > \frac{\alpha\rho}{\gamma} + \sqrt{\frac{\alpha^2\rho^2}{\gamma^2} + \frac{2\rho}{\gamma}}$$

Тогда для любого решения $(x(n), \sigma(n))$ системы (17) с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\sigma(0) = \Theta(0), \quad \begin{cases} c^* x(0) > 0, & \Theta'(0) > 0 \\ c^* x(0) < 0, & \Theta'(0) < 0 \end{cases}, \quad x(0)^* H x(0) < -\frac{1}{2}\Theta'(0)^2, \tag{36}$$

где $H = H^*$ обеспечивает $W(x, \xi) < 0$, существует дискретный момент времени $N > 0$ такой, что

$$|\sigma(N) - \sigma(0)| > \Delta k \tag{37}$$

Замечание.
Матрицы $H = H^*$, обеспечивающие отрицательную определенность соответствующих квадратичных форм $W(x, \sigma) < 0$, существуют и могут быть найдены по алгоритмам, описанным, например, в [3], [4].

В доказательстве используется второй метод А.М. Ляпунова, дискретный вариант частотной теоремы В.А. Якубовича [5] и метод нелокального сведения Г.А.Леонова, распространенный на дискретные системы [6, 7, 8].

Утверждение, аналогичное теореме 2, сформулировано и доказано в [9].

4 Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1.

Из условия 2) и свойств нелинейной функции $\psi(\sigma)$ следует существование сепаратрис, примыкающих к особым точкам (седлам)

$$(\sigma_2 + \Delta(k-1), 0),\ (\sigma_2 - \Delta(k-1), 0).$$

Тогда задача Коши (25) для уравнения (21) при начальных данных

$$F_i^2(\Theta(0)) > \Theta'(0)^2$$

имеет решения $F_i(\sigma) \quad (i = 1, 2)$, обладающие свойствами $F_1(\sigma(0) + k\Delta) = 0$, $F_2(\sigma(0) - k\Delta) = 0$. Для этих функций $F_i(\sigma)$ и некоторой вещественной $(\nu \times \nu)$-матрицы $H = H^*$ рассмотрим функции Ляпунова

$$V_i(x, \sigma) = x^* H x - \frac{\lambda^2}{2} F_i^2(\sigma), \tag{38}$$

И их приращения на решениях системы (17)

$$\Delta_\lambda V_i(x(n), \sigma(n), \xi(n))) = \lambda^{-2} V_i(x(n+1), \sigma(n+1)) - V_i(x(n), \sigma(n)). \tag{39}$$

Очевидно, что $\Delta_\lambda V(x(n), \sigma(n), \xi(n)))$ можно записать следующим образом:

$$\Delta_\lambda V_i(x(n), \sigma(n), \xi(n))) = W(x(n), \xi(n)) + L_i(x(n), \sigma(n), \xi(n)), \tag{40}$$

где

$$L_i(x(n), \sigma(n), \xi(n)) = -\frac{1}{2} F_i^2(\sigma(n+1)) + \frac{\lambda^2}{2} F_i^2(\sigma(n)) - G(x(n), \xi(n)), \tag{41}$$

а $W(x(n), \xi(n))$ и $G(x(n), \xi(n))$ определяются по формулам (19), (20).

Оценим $W(x(n), \xi(n))$. Из частотного условия (23) и управляемости пары (A, b) по частотной теореме [5] следует существование матрицы $H^* = H$ и числа $\delta > 0$ таких, что при всех x имеет место неравенство

$$W(x, \xi) \le -\delta |x|^2, \tag{42}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{G}(\tilde{x}, \xi) < 0$ для $\tilde{x} = -(A - \lambda p E)^{-1} b \xi$. Действительно, учитывая вид функции $G(x, \xi)$, определенной по формуле (20), получаем

$$\tilde{G}(-(A - \lambda p E)^{-1} b\xi, \xi) = \Re e \left\{ (\varepsilon + 1/2\ \beta) |\chi(\lambda p)|^2 - \chi(\lambda p) \right\} |\xi|^2$$

И в силу частотного условия (23) имеем $\tilde{G}(\tilde{x}, \xi) < 0$.

Так как по предположению все собственные числа матрицы $\lambda^{-1}A$ расположены в открытом единичном круге, то матрица H положительно определена, т.е. $H > 0$ (Теорема 10.1.4. [10]).

Оценим $L_i(x, \sigma, \xi)$,, определенную по формуле (41). Воспользуемся формулой Тейлора для приращения функции $F_i^2(\sigma(n))$

$$F_i^2(\sigma(n+1)) - F_i^2(\sigma(n)) =$$

$$= 2F_i(\sigma(n))F_i'(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)) + [F_i'(\sigma_*)^2 + F_i(\sigma_*)F_i''(\sigma_*)](\sigma(n+1)-\sigma(n))^2$$

где $\sigma(\sigma_*) \in [\sigma(n), \sigma(n+1)]$. Тогда получим

$$L_i(x(n), \sigma(n), \xi(n)) = \lambda^{-2}F_i(\sigma(n))F_i'(\sigma(n))(\sigma(n+1) - \sigma(n)) +$$

$$+1/2\ \lambda^{-2}[F_i'(\sigma_*)^2 + F_i(\sigma_*)F_i''(\sigma_*)](\sigma(n+1) - \sigma(n))^2 +$$

$$+1/2\ (\lambda^{-2}-1)F_i^2(\sigma(n)) - (\varepsilon + 1/2\ \beta)(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 - \xi(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)) =$$

где $\sigma(\sigma_*) \in [\sigma(n), \sigma(n+1)]$.

Определив число β по формуле (24), и учитывая, что $F_i'^{\ 2} + F_iF_i'' = (F_i'F_i)'$, можно оценить $L_i(x, \sigma, \xi)$ следующим образом

$$L_i(x, \sigma, \xi) \le -\frac{1}{2}[F_i'(\sigma(n_*))F_i(\sigma(n_*))]'(\sigma(n+1) - \sigma(n))^2$$

$$-F_i(\sigma(n))F_i'(\sigma(n))(\sigma(n+1) - \sigma(n)) -$$

$$-\frac{1-\lambda^2}{2}F_i^2(\sigma(n)) - (\varepsilon + 1/2\ \beta)(\sigma(n+1) - \sigma(n))^2 - \xi(\sigma(n))(\sigma(n+1) - \sigma(n)) =$$

$$= -[F_i(\sigma(n))F_i'(\sigma(n)) + \xi(\sigma(n))](\sigma(n+1) - \sigma(n)) -$$

$$-\varepsilon(\sigma(n+1) - \sigma(n))^2 - \frac{1-\lambda^2}{2}F_i^2(\sigma(n))$$

В силу уравнения (25) имеем $F_i(\sigma(n))F_i'(\sigma(n)) + \xi(\sigma(n)) = -\alpha F_i(\sigma(n))$. И тогда получим оценку

$$L_i(x, \sigma, \xi) \le \frac{1}{4}\alpha^2 F_i^2(\sigma(n)) - \frac{1-\lambda^2}{2}F_i^2(\sigma(n)) = -\frac{2(1-\lambda^2) - \alpha^2}{4}F_i^2(\sigma(n))$$

что непревосходит нуля при выполнении условия $\alpha^2 \le 2(1-\lambda^2)$ на варьируемые параметры системы. То есть получили оценку $L_i(x, \sigma, \xi) \le 0$.

Тогда, окончательно, имеем

$$\Delta_\lambda V_i(x(n), \sigma(n), \xi(n)) < 0 \quad \forall \ \ x(n), \sigma(n), \xi(n) \tag{43}$$

Рассмотрим $V_i(x(0),\sigma(0)) = x(0)^*Hx(0) - F_i^2(\sigma(0))/2$. Помним, что $F_i(\Theta)$ - решения уравнения (25) с начальными данными $F_i^2(\Theta(0)) > \Theta'(0)^2$. Поэтому, для начальных данных $(x(0),\sigma(0))$ системы (17), удовлетворяющих условиям (26) будет выполнено

$$V_i(x(0),\sigma(0)) < \frac{1}{2}\Theta'(0)^2 - \frac{1}{2}\Theta'(0)^2 = 0.$$

Таким образом, имеем $V_i(x(0),\sigma(0)) < 0$. Учитывая (43), получаем

$$V_i(x(0),\sigma(0)) < 0$$

для всех $x(n),\sigma(n)$.

Теперь предположим, что утверждение теоремы не выполняется, т.е. существует дискретный момент времени N такой, что

$$|\sigma(N) - \sigma(0)| \geq \Delta k \tag{44}$$

Рассмотрим два возможных при этом случая:

а) пусть существуют моменты n_0 и $n_1 = n_0 + 1$ такие, что

$$\sigma(n_0) - \sigma(0) < \Delta k, \quad \sigma(n_1) - \sigma(0) \geq \Delta k.$$

Перепишем эти неравенства следующим образом:

$$\sigma(n_0) < \sigma(0) + \Delta k, \quad \sigma(n_1) \geq \sigma(0) + \Delta k.$$

Рассмотрим непрерывную на интервале $s \in (0,1]$ функцию $h(s)$ перехода от $\sigma(n)$ к $\sigma(n+1)$ со следующими свойствами:

$$h(0) = \sigma(n_0) < \sigma(0) + \Delta k, \quad h(1) = \sigma(n_1) \geq \sigma(0) + \Delta k.$$

Тогда по непрерывности $h(s)$ следует существование $s^* \in (0,1]$ для которого выполнено $h(s^*) = \sigma(0) + \Delta k$. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V_1((1-s)x(n) + sx(n+1), (1-s)\sigma(n) + s\sigma(n+1))$$

для такого значения s^*:

$$V_1(x(s^*),\sigma(s^*)) = x(s^*)^*Hx(s^*) - \frac{1}{2}F_1^2(\sigma(s^*)).$$

Но т.к. $F_1(\sigma(s^*)) = F_1(\sigma(0) + \Delta k) = 0$ и $H > 0$, то

$$V_1(x(s^*),\sigma(s^*)) = x(s^*)^*Hx(s^*) > 0,$$

что противоречит доказанныму ренее факту $V_1(x,\sigma) < 0$ для любых x,σ.

б) пусть существуют моменты n_0 и $n_2 = n_0 + 1$ такие, что

$$\sigma(n_0) - \sigma(0) < -\Delta k, \quad \sigma(n_2) - \sigma(0) \geq -\Delta k.$$

Запишем эти неравенства следующим образом:

$$\sigma(n_0) < \sigma(0) - \Delta k, \quad \sigma(n_2) \geq \sigma(0) - \Delta k.$$

Рассмотрим непрерывную на интервале $s \in (0,1]$ функцию $h(s)$ перехода от $\sigma(n)$ к $\sigma(n+1)$ со следующими свойствами:

$$h(0) = \sigma(n_0) < \sigma(0) - \Delta k, \quad h(1) = \sigma(n_2) \geq \sigma(0) - \Delta k.$$

Тогда по непрерывности $h(s)$ следует существование $s^* \in (0,1]$ для которого выполнено $h(s^*) = \sigma(0) - \Delta k$. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V_2((1-s)x(n) + sx(n+1), (1-s)\sigma(n) + s\sigma(n+1))$$

для такого значения s^*:

$$V_2(x(s^*), \sigma(s^*)) = x(s^*)^* H x(s^*) - \frac{1}{2} F_2^2(\sigma(s^*)).$$

Но т.к. $F_2(\sigma(s^*)) = F_2(\sigma(0) - \Delta k) = 0$ и $H > 0$, то

$$V_2(x(s^*), \sigma(s^*)) = x(s^*)^* H x(s^*) > 0,$$

что противоречит доказанныму ренее факту $V_2(x,\sigma) < 0$ для любых x,σ.

Таким образом, предположение о том, что существует момент N для которого выполнена оценка (44), нарушающая утверждение теоремы (27), неверно. Теорема 1. доказана.

Доказательство теоремы 2.
Определим множество

$$\mathbf{T} = \{n \mid n \geq 0, \sigma(n) \in [\Theta(0), \Theta(t_i)]\},$$

и рассмотрим функции Ляпунова

$$V_i(x,\sigma) = x^* H x + \frac{1}{2} F_i^2(\sigma), \tag{45}$$

где $H = H^*$ — некоторая вещественная $(\nu \times \nu)$-матрица, а функции $F_i(\sigma)$ — решения уравнения (35) с начальными данными $F_i(\sigma(0)) = \pm\Theta'(0)$, обладающие свойствами, описанными в условии 4). Построим множества

$$\Gamma_i = \{(x,\sigma) \mid V_i(x,\sigma) < 0\}, \quad i = 1, 2$$

$$\Omega_1 = \{x \mid c^*x > 0\} \bigcap \Gamma_i, \qquad \Omega_2 = \{x \mid c^*x < 0\} \bigcap \Gamma_i.$$

Покажем, что в условиях теоремы найдется матрица $H = H^*$ такая, что для нее и указанных выше функций $F_i(\sigma)$ множества Ω_i обладают свойством положительной инвариантности: для любого $n \geq 0$, $n \in \mathbf{T}$, $n+1 \in \mathbf{T}$ из $(x(n), \sigma(n)) \in \Omega_i$, следует $(x(n+1), \sigma(n+1)) \in \Omega_i$.

Докажем сначала выполнение следующее свойства: для любого $n \geq 0$, $n \in \mathbf{T}$, $n+1 \in \mathbf{T}$ из $(x(n), \sigma(n)) \in \Omega_i$, следует $(x(n+1), \sigma(n+1)) \in \Gamma_i$.

Для этого рассмотрим на решениях системы (17) приращение функций Ляпунова

$$\Delta_\lambda V_i(x(n), \sigma(n), \xi(n))) = \lambda^{-2} V_i(x(n+1), \sigma(n+1)) - V_i(x(n), \sigma(n)). \qquad (46)$$

Очевидно, что $\Delta_\lambda V_i(x(n), \sigma(n), \xi(n)))$ можно записать следующим образом:

$$\Delta_\lambda V_i(x(n), \sigma(n), \xi(n))) = W(x(n), \xi(n)) + L_i(x(n), \sigma(n), \xi(n)). \qquad (47)$$

где

$$L_i(x(n), \sigma(n), \xi(n)) = \frac{1}{2}\lambda^{-2} F_i(\sigma(n+1))^2 - \frac{1}{2} F_i(\sigma(n))^2 - G(x(n), \xi(n)), \qquad (48)$$

$W(x(n), \xi(n))$ и $G(x(n), \xi(n))$ опредеяются по формулам (28), (29), параметр $\varkappa$ определяется по формуле (34), а число $\beta > 0$ подлежит выбору.

Оценим $W(x(n), \xi(n))$. Из частотного условия (33) и управляемости пары (A, b) по частотной теореме [5] следует существование матрицы $H^* = H$ и числа $\delta > 0$ таких, что при всех x имеет место неравенство

$$W(x, \xi) \leq -\delta |x|^2. \qquad (49)$$

Действительно, по частотной теореме для существования матрицы $H^* = H$ и числа $\delta > 0$ таких, что при всех x имеет место неравенство (49), необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{G}((A - \lambda pE)^{-1} b\xi, \xi) < 0$. Учитывая вид функции $G(x, \xi)$, получаем

$$\tilde{G}((A - \lambda pE)^{-1} b\xi, \xi) =$$
$$= \Re e \left\{ [\chi(\lambda p) - \rho] + \varkappa |\chi(\lambda p)|^2 + \beta |\lambda p(\chi(\lambda p) - \rho) + c^* b|^2 \right\} \lambda^{-2} |\xi|^2$$

И в силу частотного условия (33) имеем $\tilde{G}(\tilde{x}, \xi) < 0$.

Из найденных таким образом матрицы H и числа δ получим ряд полезных для оценки $L_i(x, \sigma, \xi)$ следствий.

Положим в (49) $\xi = 0$, тогда имеем

$$W(x, 0) = \lambda^{-2}(Ax)^* H(Ax) - x^* Hx + \varkappa \lambda^{-2}(c^*x)^2 + \beta \lambda^{-2}(c^*Ax)^2 \leq -\delta |x|^2.$$

Поскольку $\varkappa \geq 0$ и $\beta > 0$, то два последних слагаемых неотрицательны, и поэтому

$$\lambda^{-2} x^* A^* H A x - x^* H x \leq -\delta |x|^2. \tag{50}$$

Так как по предположению матрица $\lambda^{-1} A$ имеет только одно собственное значение вне замкнутого единичного круга и пара (A, c) наблюдаема, то у матрицы H одно собственное значение отрицательное, а $(\nu - 1)$ значений положительных (теорема 10.1.4. [10]).

Поскольку $b \neq 0$ и $G(x, 0) \geq 0$, то из последнего свойства матрицы H и неравенства (49) по лемме 1.1.1 [11] следует справедливость соотношения

$$\{x \mid x^* H x \leq 0\} \bigcap \{x \mid c^* x = 0\} = \{0\}. \tag{51}$$

Отсюда же следует существование числа $\tau > 0$ такого, что при всех x справедливо

$$x^* H x + \tau (c^* x)^2 \geq 0. \tag{52}$$

Рассмотрим теперь неравенство (49) при $x = 0$. В этом случае имеем $W(0, \xi) = \lambda^{-2} \xi^* b^* H b \xi \leq 0$. Следовательно,

$$b^* H b \leq 0. \tag{53}$$

Так как $b \neq 0$, то из (51) и (53) с помощью леммы 1.1.1 [11] заключаем $c^* b \neq 0$.

Теперь оценим сверху параметр $\tau > 0$ в неравенстве (52). Для этого к обеим частям неравенства (49) добавим квадратичную форму

$$\tilde{G}(x, \xi) = \tau \lambda^{-2} (Ax + b\xi)^* c c^* (Ax + b\xi) - \tau x^* c c^* x. \tag{54}$$

Тогда из (49) получим при всех x, ξ

$$\lambda^{-2} (Ax + b\xi)^* H (Ax + b\xi) - x^* H x + G(x, \xi) + \tau \lambda^{-2} (Ax + b\xi)^* c c^* (Ax + b\xi) -$$

$$- \tau x^* c c^* x \leq -\delta |x|^2 + \tilde{G}(x, \xi),$$

то есть справедливость неравенства

$$\lambda^{-2} (Ax + b\xi)^* (H + \tau c c^*) (Ax + b\xi) - x^* (H + \tau c c^*) x \leq -\delta |x|^2 + \tilde{G}(x, \xi) - G(x, \xi). \tag{55}$$

Выберем вектор $\tilde{\xi}$ таким образом, чтобы $c^* (Ax + b\tilde{\xi}) = 0$, то есть положим

$$\tilde{\xi} = -\frac{c^* A x}{c^* b}. \tag{56}$$

Это можно сделать, так как $c^*b \neq 0$. Тогда имеет место равенство

$$Ax + b\tilde{\xi} = \left(E_\nu - \frac{bc^*}{c^*b}\right) Ax.$$

Введем обозначение $C = (E_\nu - \frac{bc^*}{c^*b})A$. Подставляя $\tilde{\xi}$ в неравенство (55) получим

$$\lambda^{-2}x^*C^*(H + \tau cc^*)Cx - x^*(H + \tau cc^*)x \leq -\delta|x|^2 + \tilde{G}(x, \tilde{\xi}) - G(x, \tilde{\xi}). \quad (57)$$

Получим теперь условия, при которых правая часть в неравенстве (57) отрицательная. Первое слагаемое отрицательно, рассмотрим второе и третье слагаемые

$$\tilde{G}(x, \tilde{\xi}) - G(x, \tilde{\xi}) =$$
$$= -[\tau(c^*x)^2 - (\lambda^2 c^*b)^{-1}(c^*Ax)(c^*x) + \beta\lambda^{-2}(c^*Ax)^2] - \varkappa\lambda^{-2}(c^*x - \rho\tilde{\xi})^2.$$

Ясно, что последнее слагаемое отрицательно, а в квадратные скобки заключена квадратичная форма от c^*x и c^*Ax. По критерию Сильвестра для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы ее коэффициентов были положительны. Матрица коэффициентов квадратичной формы от c^*x и c^*Ax имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tau & -(2\lambda^2 c^*b)^{-1} \\ -(2\lambda^2 c^*b)^{-1} & \beta\lambda^{-2} \end{pmatrix}.$$

Соответственно, условия положительности квадратичной формы будут следующими

$$\tau > 0 \quad \text{и} \quad \tau\beta\lambda^{-2} > (2\lambda^2 c^*b)^{-2}.$$

Значит, выражение в квадратных скобках будет положительным при $\tau \geq \tau_0$, где

$$\tau_0 = [4\beta\lambda^2(c^*b)^2]^{-1}. \quad (58)$$

Итак, из (57) для всех x при $\tau \geq \tau_0$ следует справедливость

$$\lambda^{-2}x^*C^*(H + \tau cc^*)Cx - x^*(H + \tau cc^*)x \leq -\delta|x|^2. \quad (59)$$

Так как у матрицы $\lambda^{-1}C$ по условию 2) теоремы все собственные числа лежат в открытом единичном круге, то у матрицы $H + \tau cc^*$ все собственные числа положительные (теорема 10.1.4. [10]). Следовательно, справедливо неравенство

$$x^*Hx + \tau(c^*x)^2 \geq 0 \text{ для всех } \tau \geq \tau_0. \quad (60)$$

Оценим $L_i(x,\sigma,\xi)$, определенные по формуле (48). Перепишем их в виде

$$L_i(x(n),\sigma(n),\xi(n)) =$$

$$= (2\lambda^2)^{-1}[F_i^2(\sigma(n+1))-F_i^2(\sigma(n))]+\frac{1}{2}(\lambda^{-2}-1)F_i(\sigma(n))^2-G(x(n),\xi(n)). \quad (61)$$

Воспользуемся формулой Тейлора для приращения функций $F_i^2(\sigma(n))$:

$$F_i^2(\sigma(n+1)) - F_i^2(\sigma(n)) =$$

$$= 2F_i(\sigma(n))F_i'(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n))+[F_i'(\sigma_*)^2+F_i(\sigma_*)F_i''(\sigma_*)](\sigma(n+1)-\sigma(n))^2$$

где $\sigma(\sigma_*) \in [\sigma(n),\sigma(n+1)]$. Тогда получим

$$L_i(x(n),\sigma(n),\xi(n)) = \lambda^{-2}F_i(\sigma(n))F_i'(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n))+$$

$$+1/2\ \lambda^{-2}[F_i'(\sigma_*)^2 + F_i(\sigma_*)F_i''(\sigma_*)](\sigma(n+1)-\sigma(n))^2+$$

$$+1/2\ (\lambda^{-2}-1)F_i^2(\sigma(n))+\lambda^{-2}\xi(n)c^*x(n)-\varkappa\lambda^{-2}(c^*x(n)-\rho\xi(n))^2-\beta\lambda^{-2}(c^*Ax(n))^2$$

где $\sigma(\sigma_*) \in [\sigma(n),\sigma(n+1)]$.

Рассмотрим первое и четвертое слагаемые. Поскольку функции $F_i(\sigma)$ удовлетворяют уравнению (35), то $F_i(\sigma(n))F_i'(\sigma(n) = -\alpha F_i(\sigma(n)) - \xi(n)$, а в силу второго уравнения системы (17) имеем

$$c^*x(n) = \sigma(n+1) - \sigma(n) + \rho\xi(n)$$

. Тогда

$$\lambda^{-2}F_i(\sigma(n))F_i'(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)) + \lambda^{-2}\xi(n)c^*x(n) =$$

$$= -\lambda^{-2}\alpha F_i(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)) - \lambda^{-2}\xi(n)(\sigma(n+1)-\sigma(n))+$$

$$+\lambda^{-2}\xi(n)(\sigma(n+1)-\sigma(n)) + \lambda^{-2}\rho\xi^2(n) =$$

$$= -\lambda^{-2}\alpha F_i(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)) + \lambda^{-2}\rho\xi^2(n)$$

Рассмотрим второе и пятое слагаемые.

$$1/2\ \lambda^{-2}[F_i'(\sigma_*)^2 + F_i(\sigma_*)F_i''(\sigma_*)](\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 - \varkappa\lambda^{-2}(c^*x(n)-\rho\xi(n))^2 =$$

$$= [1/2\ (F_i''(\sigma_*)F_i(\sigma_*) + F_i'(\sigma_*)^2) - \varkappa](\sigma(n+1)-\sigma(n))^2$$

Для $\varkappa \geq 0$, определенного соотношением (34), верно следующее неравенство

$$\varkappa = \max\left\{0, \max_{\Theta\in[\Theta(0),\Theta(t_i)]}[-1/2\ (\alpha F_i'(\Theta) + \psi'(\Theta))]\right\} \geq$$

$$\geq -1/2\ (\alpha F_i'(\sigma_*) + \psi'(\sigma_*)) = 1/2\ (F_i''(\sigma_*)F_i(\sigma_*) + F_i'(\sigma_*)^2)$$

то есть

$$\left[1/2\ (F_i''(\sigma_*)F_i(\sigma_*) + F_i'(\sigma_*)^2) - \varkappa\right](\sigma(n+1) - \sigma(n))^2 \leq 0 \tag{62}$$

Итак, теперь имеем

$$L_i(x(n), \sigma(n), \xi(n)) \leq$$

$$\leq -\lambda^{-2}\alpha F_i(\sigma(n))(\sigma(n+1) - \sigma(n)) + \lambda^{-2}\rho\xi^2(n) + 1/2\ (\lambda^{-2} - 1)F_i^2(\sigma(n)) +$$

$$+ \left[1/2\ (F_i''(\sigma_*)F_i(\sigma_*) + F_i'^{\ 2}(\sigma_*)) - \varkappa\right](\sigma(n+1) - \sigma(n))^2 - \beta\lambda^{-2}(c^*Ax(n))^2 \leq$$

Отбросим отрицательное последнее и неположительное предпоследнее слагаемые

$$L_i(x(n), \sigma(n), \xi(n)) \leq -\lambda^{-2}\alpha F_i(\sigma(n))(\sigma(n+1) - \sigma(n)) + \lambda^{-2}\rho\xi^2(n) +$$

$$+1/2\ (\lambda^{-2} - 1)F_i^2(\sigma(n))$$

Для оценки первого слагаемого воспользуемся полученным ранее соотношением (60). Пусть $(x, \sigma) \in \Omega_i$, т.е. справедливы неравенства

$$x^*Hx + 1/2\ F_i^2(\sigma) < 0, \qquad \begin{array}{l} c^*x > 0, i = 1 \\ c^*x < 0, i = 2 \end{array}, \tag{63}$$

Отсюда и из неравенства (60) имеем

$$1/2\ F_i^2(\sigma) \leq x^*Hx + 1/2\ F_i^2(\sigma) + \tau(c^*x)^2 \leq \tau(c^*x)^2,$$

откуда

$$1/2\ F_i^2(\sigma) \leq \tau(c^*x)^2. \tag{64}$$

Так как $F_1(\sigma) > 0$, $c^*x > 0$ для $i = 1$ и $F_2(\sigma) < 0$, $c^*x < 0$ для $i = 2$, то из (64) получаем

$$\begin{array}{l} c^*x \geq \frac{1}{\sqrt{2\tau}}F_1(\sigma) \\ c^*x \leq \frac{1}{\sqrt{2\tau}}F_2(\sigma) \end{array}, \tag{65}$$

и поскольку $c^*x = \sigma(n+1) - \sigma(n) + \rho\xi(n)$, отсюда следует справедливость неравенств

$$\begin{array}{lcl} \sigma(n+1) - \sigma(n) + \rho\xi(n) & \geq & \frac{1}{\sqrt{2\tau}}F_1(\sigma(n)), \\ \sigma(n+1) - \sigma(n) + \rho\xi(n) & \leq & \frac{1}{\sqrt{2\tau}}F_2(\sigma(n)). \end{array} \tag{66}$$

Умножая эти неравенства соответственно на отрицательное (т.к. $F_1(\sigma) > 0$) и положительное (т.к. $F_2(\sigma) < 0$) числа $-\lambda^{-2}\alpha F_i(\sigma(n))$, получим неравенства

$$-\lambda^{-2}\alpha F_i(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)) \le \lambda^{-2}\alpha F_i(\sigma(n))\rho\xi(n) - \frac{\lambda^{-2}\alpha}{\sqrt{2\tau}}F_i(\sigma(n))^2. \quad (67)$$

Теперь оценка $L_i(x(n),\sigma(n),\xi(n))$ имеет следующий вид

$$L_i(x(n),\sigma(n),\xi(n)) \le$$

$$\le \lambda^{-2}\alpha F_i(\sigma(n))\rho\xi(n) - \frac{\lambda^{-2}\alpha}{\sqrt{2\tau}}F_i(\sigma(n))^2 + \lambda^{-2}\rho\xi^2(n) + 1/2\ (\lambda^{-2}-1)F_i^2(\sigma(n)) =$$

$$= \left[1/2\ (\lambda^{-2}-1) - \frac{\alpha}{\lambda^2\sqrt{2\tau}}\right]F_i^2(\sigma(n)) + \lambda^{-2}\alpha F_i(\sigma(n))\rho\xi(n) + \lambda^{-2}\rho\xi^2(n)$$

Выберем параметр $\alpha > 0$ таким, чтобы коэффициент при $F_i^2(\sigma(n))$ был отрицательным:

$$\alpha > \frac{\sqrt{2\tau}(1-\lambda^2)}{2} = \sqrt{\frac{\tau}{2}}\left(1-\lambda^2\right). \quad (68)$$

Очевидно, что если в (68) взять $\tau \ge \tau_0$, то параметр $\alpha > 0$ следует брать, удовлетворяющим условию (30).

Возьмем $\gamma = 2\sqrt{2\beta}\alpha|\lambda c^* b| + \lambda^2 - 1$ и $\tau = \tau_0$, т.е.

$$1/2\ (\lambda^{-2}-1) - \frac{\alpha}{\lambda^2\sqrt{2\tau}} = -\frac{\gamma}{2\lambda^2,}$$

тогда оценка $L_i(x(n),\sigma(n),\xi(n))$ будет иметь вид

$$L_i(x(n),\sigma(n),\xi(n)) \le -\frac{\gamma}{2\lambda^2}F_i^2(\sigma(n)) + \frac{\alpha\rho\xi(n)}{\lambda^2}F_i(\sigma(n)) + \frac{\rho}{\lambda^2}\xi^2(n)$$

Установим условия, при которых для любых $\sigma(n)$ выполнено

$$-\frac{\gamma}{2\lambda^2}F_i^2(\sigma(n)) + \frac{\alpha\rho\xi(n)}{\lambda^2}F_i(\sigma(n)) + \frac{\rho}{\lambda^2}\xi^2(n) \le 0 \quad (69)$$

Для $\sigma(n)$, при которых $\psi(\sigma(n)) = 0$, неравенство приобретает вид

$$-\frac{\gamma}{2\lambda^2}F_i^2(\sigma(n))$$

и выполняется автоматически, поскольку $\gamma > 0$.

Рассмотрим случай $\sigma(n)$, при которых $\psi(\sigma(n)) \neq 0$. Введем новую переменную $y(\sigma) = F_i(\sigma)/\psi(\sigma)$. Тогда неравенство (69) будет иметь вид квадратного неравенства относительно новой переменной с отрицательным коэффициентом при старшей степени

$$-\frac{\gamma}{2}y^2(\sigma) + \alpha\rho y(\sigma) + \rho \leq 0 \tag{70}$$

Очевидно, что неравенство будет выполнено, если в качестве $y(\sigma)$ взять больший положительный корень соответствующего квадратного уравнения.

$$y(\sigma) \geq \frac{\alpha\rho}{\gamma} + \sqrt{\frac{\alpha^2\rho^2}{\gamma^2} + \frac{2\rho}{\gamma}}$$

Проверим выполнение этого условия. Из выполнения условия 5) теоремы следует существование θ, удовлетворяющего неравенствам

$$\frac{1}{2\mu}\left[\sqrt{\alpha^2 + 4\mu} - \alpha\right] \geq \theta \geq \frac{\alpha\rho}{\gamma} + \sqrt{\frac{\alpha^2\rho^2}{\gamma^2} + \frac{2\rho}{\gamma}} \tag{71}$$

По леммам 1 и 2 [12] (где в качестве $\varkappa$ возьмем θ, а $\gamma\varphi(\sigma) = \psi(\sigma)$) решение $F_i(\sigma)$ уравнения (35) бесконтактно с кривыми $\pm\theta\psi(\sigma)$ для случаев $\psi(\sigma(n)) > 0$ и $\psi(\sigma(n)) < 0$ соответственно. То есть выполнено $|F_i(\sigma)| \geq \theta|\psi(\sigma)|$, и если решение $F_i(\sigma)$ и кривая $\theta\psi(\sigma)$ имеют общую точку, то в этой точке $F_i(\sigma)$ протыкает кривую, но не скользит по ней.

В нашем случае решение $F_i(\sigma)$ аппроксимируется этими кривыми, т.е. $|F_i(\sigma)| > \theta|\psi(\sigma)|$, и общей точки у них нет, поскольку тогда нарушались бы условия $F_1(\sigma) > 0$, $F_2(\sigma) < 0$.

Итак, из лемм 1 и 2 [12] следует, что для решений $F_1(\sigma) > 0$, $F_2(\sigma) < 0$ уравнения (35) для любого $\sigma(n) \in [\Theta(0), \Theta(t_i)]$ справедливо

$$|F_i(\sigma)| > \theta|\psi(\sigma)|, \tag{72}$$

или в терминах новой переменной

$$|y(\sigma)| > \theta. \tag{73}$$

Таким образом, условие 5) и леммы 1 и 2 [12] обеспечивают выполнение

$$y(\sigma) > \theta \geq \frac{\alpha\rho}{\gamma} + \sqrt{\frac{\alpha^2\rho^2}{\gamma^2} + \frac{2\rho}{\gamma}}.$$

Откуда следует, что для любого $\sigma(n)$ верно (70), а, значит, выполнено и (69).

Итак, $L_i(x,\sigma,\xi) < 0$ и окончательно доказано, что при $(x(n),\sigma(n)) \in \Omega_i$ выполнена оценка

$$\Delta_\lambda V_i(x(n),\sigma(n),\xi(n)) \leq -\delta|x(n)|^2 \tag{74}$$

Рассмотрим $V(x,\sigma)$ при начальных данных $(x(0),\sigma(0))$ системы (17), удовлетворяющих условиям (36)

$$V(x(0),\sigma(0)) = x^*(0)Hx(0) + \frac{1}{2}F_i^2(\sigma(0)) < -\frac{1}{2}\Theta'(0)^2 + \frac{1}{2}\Theta'(0)^2 = 0$$

То есть

$$V(x(0),\sigma(0)) < 0 \tag{75}$$

Из оценок (74) и (75) следует, что $V(x(n),\sigma(n)) < 0$ для всех $(x(n),\sigma(n)) \in \Omega_i$ то есть $(x(n+1),\sigma(n+1)) \in \Gamma_i$.

Теперь покажем, что имеет место следующее свойство множества Ω_i: для любого $n \geq 0$, $n \in \mathbf{T}$, $n+1 \in \mathbf{T}$ из $(x(n),\sigma(n)) \in \Omega_i$, следует

$$(x(n+1),\sigma(n+1)) \in \Omega_i$$

.

Предположим противное. Пусть существует пара $(a_0,\sigma_0) \in \Omega_i$, $a_0 \in \mathbf{R}^\nu$, $\sigma_0 \in \mathbf{R}^1$, такая, что $(x(1,a_0,\sigma_0),\sigma(1,a_0,\sigma_0)) \notin \Omega_i$, то есть решение покинуло множество Ω_i. Но так как уже доказано, что $(x(1,a_0,\sigma_0),\sigma(1,a_0,\sigma_0)) \in \Gamma_i$, то последнее предположение справедливо только в случае, когда выполнено неравенство

$$\begin{aligned} &c^*x(1,a_0,\sigma_0) < 0, \quad i=1 \\ &c^*x(1,a_0,\sigma_0) > 0, \quad i=2 \end{aligned} \tag{76}$$

С другой стороны, покажем, что найдется точка $a_1 \in \mathbf{R}^\nu$ такая, что $(a_1,\sigma_0) \in \Omega_i$ и $(x(1,a_1,\sigma_0),\sigma(1,a_1,\sigma_0)) \in \Omega_i$, то есть, в частности, выполнено

$$\begin{aligned} &c^*x(1,a_1,\sigma_0) > 0, \quad i=1 \\ &c^*x(1,a_1,\sigma_0) < 0, \quad i=2 \end{aligned} \tag{77}$$

Действительно, пусть $\eta\lambda^{-1}$ — собственное число матрицы $\lambda^{-1}A$ единственное расположенное вне единичного круга, т.е. $|\eta\lambda^{-1}| > 1$. По условию теоремы такое число существует. Так как матрица $\lambda^{-1}A$ вещественная и других собственных чисел вне замкнутого единичного круга по условию теоремы у матрицы $\lambda^{-1}A$ нет, то η — вещественное число. Пусть $\zeta \neq 0$ — собственный вектор матрицы $\lambda^{-1}A$, соответствующий собственному числу $\eta\lambda^{-1}$, т.е.

$$\lambda^{-1}A\zeta = \eta\lambda^{-1}\zeta. \tag{78}$$

Из неравенства (50) с помощью (78) получим

$$(\lambda^{-1}A\zeta)^*H(\lambda^{-1}A\zeta) - \zeta^*H\zeta \leq -\delta|\zeta|^2,$$

то есть

$$\left(\left|\eta\lambda^{-1}\right|^2 - 1\right)\zeta^*H\zeta \leq 0. \tag{79}$$

Следовательно, так как $|\eta\lambda^{-1}| > 1$ и $\zeta \neq 0$, то справедливо

$$\zeta^*H\zeta < 0. \tag{80}$$

Отсюда и из соотношения (51), поскольку $\zeta \neq 0$, заключаем, что $c^*\zeta \neq 0$. Собственный вектор ζ определен с точностью до знака, поэтому можно считать выполненным неравенство

$$\begin{aligned} &c^*\zeta > 0, \quad i = 1 \\ &c^*\zeta < 0, \quad i = 2 \end{aligned} \tag{81}$$

Возьмем вектор

$$a_1 = \lambda\omega\zeta, \tag{82}$$

где число ω выбрано так, чтобы $(a_1, \sigma_0) \in \Omega_i$. Для этого сначала добьемся, чтобы $(a_1, \sigma_0) \in \Gamma_i$, т.е. добьемся выполнения $V_i(a_1, \sigma_0) < 0$. Имеем

$$V_i(a_1, \sigma_0) = a_1^*Ha_1 + \frac{F_i^2(\sigma_0)}{2} = \lambda^2\omega^2\zeta^*H\zeta + \frac{F_i^2(\sigma_0)}{2}. \tag{83}$$

Очевидно, что $V_i(a_1, \sigma_0) < 0$, если

$$\begin{aligned} &\omega > \tfrac{F_1(\sigma_0)}{\sqrt{-2\lambda^2\zeta^*H\zeta}}, \\ &\omega < \tfrac{F_2(\sigma_0)}{\sqrt{-2\lambda^2\zeta^*H\zeta}}, \end{aligned} \tag{84}$$

Итак, пара (a_1, σ_0), где a_1 определяется формулой (82) с ω, удовлетворяющей условию (84), такова, что $(a_1, \sigma_0) \in \Gamma_i$.

Из выполнения неравенства (81) следует, что $(a_1, \sigma_0) \in \Omega_i$. По уже доказанному $(x(1, a_1, \sigma_0), \sigma(1, a_1, \sigma_0)) \in \Gamma_i$. Рассмотрим

$$c^*x(1, a_1, \sigma_0) = c^*Aa_1 + c^*b\psi(\sigma_0) = \lambda\omega c^*A\zeta + c^*b\psi(\sigma_0) = \omega\lambda\eta c^*\zeta + c^*b\psi(\sigma_0). \tag{85}$$

Отсюда следует, что для выполнения неравенств $c^*x(1,a_1,\sigma_0) < 0$ для $i=1$ и $c^*x(1,a_1,\sigma_0) > 0$ для $i=2$ достаточно выбрать число ω соответственно из условия

$$\begin{array}{l} \omega\lambda\eta c^*\zeta + c^*b\psi(\sigma_0) > 0, \;\; i=1 \\ \omega\lambda\eta c^*\zeta + c^*b\psi(\sigma_0) < 0, \;\; i=2 \end{array}$$

то есть

$$\begin{array}{l} \omega > -\frac{c^*b\psi(\sigma_0)}{\lambda\eta c^*\zeta}, \;\; i=1 \\ \omega < -\frac{c^*b\psi(\sigma_0)}{\lambda\eta c^*\zeta}, \;\; i=2 \end{array} \qquad (86)$$

Итак, если число ω удовлетворяет неравенствам (84),(86), то для пары $(a_1,\sigma_0) \in \Omega_i$ справедливо $(x(1,a_1,\sigma_0), \sigma(1,a_1,\sigma_0)) \in \Omega_i$, то есть, в частности, справедливо неравенство (77).

Рассмотрим функцию изменения величины c^*x, т.е. функцию

$$F_i(a) = c^*x(1,a,\sigma_0)$$

– непрерывную, определенную при всех $a \in \mathbf{R}^\nu$ и, в частности, при всех $a \in \Omega_i$, и обладающую в силу неравенств (76),(77) свойствами

$$\begin{array}{l} F_1(a_0) < 0, \;\; F_1(a_1) > 0, \\ F_2(a_0) > 0, \;\; F_2(a_1) < 0, \end{array}$$

Отсюда и из связности множеств Ω_i следует существование $a' \in \Omega_i$ такого, что $F_i(a') = 0$, то есть

$$c^*x(1,a',\sigma_0) = 0. \qquad (87)$$

Так как $(a',\sigma_0) \in \Omega_i$, то $(x(1,a',\sigma_0), \sigma(1,a',\sigma_0)) \in \Gamma_i$. То есть выполнено $V_i(a',\sigma_0) < 0$, а именно

$$x(1,a',\sigma_0)^*Hx(1,a',\sigma_0) + \frac{F_i(\sigma(1,a',\sigma_0))^2}{2} < 0.$$

Или

$$x(1,a',\sigma_0)^*Hx(1,a',\sigma_0) < 0. \qquad (88)$$

Из (87) и (51) следует $x(1,a',\sigma_0) = 0$, что противоречит неравенству (88).

Таким образом доказана положительная инвариантность множеств Ω_i т.е. для любого $n \geq 0$, $n \in \mathbf{T}$, $n+1 \in \mathbf{T}$ из $(x(n),\sigma(n)) \in \Omega_i$, следует

$$(x(n+1), \sigma(n+1)) \in \Omega_i$$

.

Докажем теперь, что для любого решения $x(n), \sigma(n)$ системы (17) с начальными данными, удовлетворяющими условиям (36) существует $N > 0$ такой, что $|\sigma(N) - \sigma(0)| > \Delta k$.

Предположим противное. Пусть для любого $n \geq 0$ имеет место

$$|\sigma(n) - \sigma(0)| \leq \Delta k.$$

Тогда это верно и для тех $n \in \mathbf{T}$, при которых $\sigma(n) \in [\Theta(0), \Theta(t_i)]$ и верны все вышеприведенные рассуждения относительно положительной инвариантности множеств Ω_i, и, в частности, верна оценка (65). Рассмотрим ее при $\tau = \tau_0 = (4\beta\lambda^2(c^*b)^2)^{-1}$ Тогда имеем

$$\begin{aligned} c^*x &\geq F_1(\sigma)\sqrt{2\beta}|\lambda c^*b|, \\ c^*x &\leq F_2(\sigma)\sqrt{2\beta}|\lambda c^*b|, \end{aligned} \tag{89}$$

Для θ, удовлетворяющего неравенствам (71), справедливо $\theta > \frac{2\alpha\rho}{\gamma}$ для i=1 и $-\theta < \frac{2\alpha\rho}{\gamma}$ для i=2. Учитывая, что $\lambda \in (0,1)$ и $\gamma = 2\sqrt{2\beta}\alpha|\lambda c^*b| + \lambda^2 - 1$, имеем

$$\begin{array}{rl} \theta > \frac{\rho}{\sqrt{2\beta}|\lambda c^*b| + \lambda^2 - 1} > \frac{\rho}{\sqrt{2\beta}|\lambda c^*b|}, & i = 1 \\ -\theta < -\frac{\rho}{\sqrt{2\beta}|\lambda c^*b| + \lambda^2 - 1} < -\frac{\rho}{\sqrt{2\beta}|\lambda c^*b|}, & i = 2 \end{array}$$

откуда

$$\begin{array}{rl} \theta\sqrt{2\beta}|\lambda c^*b| > \rho & i = 1 \\ -\theta\sqrt{2\beta}|\lambda c^*b| < -\rho & i = 2 \end{array}$$

Напомним, что для θ верна оценка (72), откуда следует

$$F_1(\sigma(n)) > \theta|\psi(\sigma(n))|$$

и

$$F_2(\sigma(n)) < -\theta|\psi(\sigma(n))|$$

соответственно. Тогда продолжим оценку (89):

$$\begin{aligned} c^*x(n) \geq F_1(\sigma(n))|\lambda c^*b|\sqrt{2\beta} > \theta|\psi(\sigma(n))|\lambda c^*b|\sqrt{2\beta} > \rho|\psi(\sigma(n))| \\ c^*x(n) \leq F_2(\sigma(n))|\lambda c^*b|\sqrt{2\beta} < -\theta|\psi(\sigma(n))|\lambda c^*b|\sqrt{2\beta} < -\rho|\psi(\sigma(n))| \end{aligned}$$

Отсюда с учетом $\sigma(n+1) - \sigma(n) = c^*x(n) - \rho\xi(n)$, имеем:
для $i = 1$

$$\sigma(n+1) - \sigma(n) = c^*x(n) - \rho\xi(n) \geq \rho|\psi(\sigma(n))| - \rho\psi(\sigma(n)) \geq \rho|\psi(\sigma(n))| \geq 0,$$

для $i = 2$

$$\sigma(n+1)-\sigma(n) = c^* x(n)-\rho\xi(n) \leq -\rho|\psi(\sigma(n))|-\rho\psi(\sigma(n)) \leq -2\rho|\psi(\sigma(n))| \leq 0,$$

то есть имеет место $\sigma(n+1) - \sigma(n) > 0$ $(i = 1)$, $\sigma(n+1) - \sigma(n) < 0$ $(i = 2)$ для $\sigma(n)$, при которых $\psi(\sigma(n)) \neq 0$, и $\sigma(n+1) - \sigma(n) = 0$ для $\sigma(n)$, при которых $\psi(\sigma(n)) = 0$, а поскольку $\psi(\sigma)$ — скалярная непрерывно дифференцируемая Δ-периодическая функция, то таких точек счетное множество. И отсюда следует соответственно $\sigma(n) \to +\infty$ для $i = 1$ и $\sigma(n) \to -\infty$ для $i = 2$ при $n \to +\infty$, что в свою очередь противоречит сделанному предположению $|\sigma(n) - \sigma(0)| \leq \Delta k$ для любого $n \geq 0$. Теорема 2. доказана.

5 Численное моделирование.

Для численного исследования системы ИФАПЧ использовалась интегрированная среда MathCad. Система (1) рассматривалась при следующих значениях параметров системы: полоса удержания $\Omega_y = 1000$, начальная расстройка системы $\Omega_H = 0.05$, период следования сигналов импульсов $T_p = 0.001$, постоянная времени фильтра $T = 10$, характеристика импульсно-фазового детектора $F(\varphi) = 2/\pi \ \arcsin(\sin(\varphi))$. Передаточная функция системы (1) задана следующей функцией комплексной переменной p

$$\chi_1(p) = 1 - \frac{(p-1)(1-\delta)}{\alpha_p(p-\delta)} = \frac{\hat{a}p + \hat{b}}{(p-\delta)}$$

где $\hat{a} = 4.99983 \cdot 10^{-5}$, $\hat{b} = 4.99967 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_p = 0.0001$, $\delta = 0.9999$. Коэффициенты системы (1), приведенной к стандартному виду (17): $A = 0.9999$, $b = 1$, $c = -9.999 \cdot 10^{-5}$, $\rho = 4.99983 \cdot 10^{-5}$, $\psi(\varphi) = \Omega_y T_p F(\varphi) - \Omega_H T_p/\chi_1(1)$.

С помощью вышепредложенных критериев получены оценки

$$x_1 \leq x(0) \leq x_2, \quad x_3 \leq x(0) \leq x_4,$$

где $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $x_3 > 0$, $x_4 > 0$, областей начальных значений $x(0)$ (при фиксированном $\varphi(0) = 0$), при которых система (17) имеет заданное число проскальзываний циклов k. Точные границы начальных значений $\hat{x}_1 \leq \hat{x}(0) \leq \hat{x}_2$, $\hat{x}_3 \leq \hat{x}(0) \leq \hat{x}_4$, где $\hat{x}_1 < 0$, $\hat{x}_2 < 0$, $\hat{x}_3 > 0$, $\hat{x}_4 > 0$, получены численным моделированием системы (17). Полученные результаты представлены в следующей таблице.

число проскальзываний циклов k		точная граница $\hat{x}(0)$		полученная оценка $x(0)$	ошибка оценки $\frac{\hat{x}_i - x_i}{\hat{x}_i} \cdot 100\%$
1	$\hat{x}_1$	-182.611840	x_1	-183.470395	-0.470
	$\hat{x}_2$	-178.955230	x_2	-177.619820	0.746
	$\hat{x}_3$	178.973003	x_3	177.637515	0.746
	$\hat{x}_4$	182.668895	x_4	183.557078	-0.486
5	$\hat{x}_1$	-198.922883	x_1	-201.616274	-1.354
	$\hat{x}_2$	-194.635051	x_2	-195.066910	-0.222
	$\hat{x}_3$	194.125762	x_3	195.132348	-0.518
	$\hat{x}_4$	199.125761	x_4	201.790509	-1.338
10	$\hat{x}_1$	-221.949717	x_1	-226.341054	-1.979
	$\hat{x}_2$	-217.154589	x_2	-219.444259	-1.054
	$\hat{x}_3$	217.506650	x_3	219.675037	-0.997
	$\hat{x}_4$	222.335124	x_4	226.839498	-2.026
20	$\hat{x}_1$	-273.334154	x_1	-272.051205	0.469
	$\hat{x}_2$	-267.967283	x_2	-280.117040	-4.534
	$\hat{x}_3$	268.643310	x_3	280.936905	-4.576
	$\hat{x}_4$	274.042193	x_4	273.021074	0.373
25	$\hat{x}_1$	-300.712033	x_1	-300.211815	0.166
	$\hat{x}_2$	-295.183827	x_2	-308.459490	-4.497
	$\hat{x}_3$	295.978790	x_3	309.150553	-4.450
	$\hat{x}_4$	301.552621	x_4	301.053307	0.166

Литература

[1] Системы фазовой автоподстройки частоты с элементами дискретизации. (под редакцией В.В. Шахгильдяна). М., Связь, 1979.

[2] Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., Изд-во иностранной лит-ры, 1952.
Stoker. Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. New York, 1950.

[3] Андреев В.А., Шепелявый А.И. Синтез оптимальных управлений для дискретных систем в задаче минимизации квадратичного функционала. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 8 (1971) 8/9.

[4] Андреев В.А., Шепелявый А.И. Синтез оптимальных управлений для амплитудно-импульсных систем в задаче минимизации среднего значения функционала квадратичного типа. Сиб.матем.ж., т.14, N 2, 1973.

[5] Якубович В.А. Частотная теорема в теории управления. Сиб.матем.ж., т.14, N 2, 1973.

[6] Леонов Г.А., Шепелявый А.И. Частотный критерий неустойчивости дискретных фазовых систем. ВИНИТИ. Депонирована от 02.07.84.г. N 4502-84.

[7] Леонов Г.А., Шепелявый А.И. Неустойчивость дискретных систем управления с периодической нелинейностью. ВИНИТИ. Депонирована от 07.08.84.г. N 5758-84.

[8] Карпычев.А.Н., Корякин Ю.А., Леонов Г.А., Шепелявый А.И. Частотные критерии устойчивости и неустойчивости многомерных дискретных систем фазовой синхронизации. Вопросы кибернетики и вычислительной техники. Дискретные системы, вып.87, Киев, 1990.

[9] Утина Н.В. Оценки снизу числа проскальзываний циклов в дискретных системах. Вестник СПбГУ, сер. 1, вып. 1, 2003.

[10] Leonov G.A., Reitman V., Smirnova V.B. Non-local methods for pendulum-like feedback systems. Stuttgard-Leizig, 1992.

[11] Райтман Ф. Частотные условия колебательности и неустойчивости дискретных систем автоматического управления. Диссертация на соискание уч. степ. к.ф.-м.н., СПб, 1979.

[12] Леонов Г.А. Частотные критерии неустойчивости систем фазовой синхронизации. Радиотехника и электроника. т. XXVIII, N 6, 1989.