ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ГОЛОМОРФНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Качалов В.И., Федоров Ю.С. [1]

Аннотация

Метод голоморфной регуляризации, являющийся логическим продолжением метода регуляризации С.А. Ломова, применяется для построения псевдоголоморфных решений слабо нелинейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, т.е. таких решений, которые представимы в виде сходящихся в обычном смысле (не асимптотически) рядов по степеням малого параметра. Доказано существование первых интегралов у сингулярно возмущенных систем голоморфных по малому параметру и, тем самым, обобщена теорема Пуанкаре о разложении. Из этого и теоремы о неявной функции, при условии устойчивости по Лагранжу решений системы уравнений характеристик, вытекает существование псевдоголоморфных в глобальном смысле решений слабо нелинейных сингулярно возмущенных систем. Следует особо отметить, что регуляризирующие функции, отвечающие за описание пограничного слоя, также как и в методе Ломова определяются спектром предельного оператора. при указанном подходе любая наперёд заданная степень точности аппроксимации обеспечивается при фиксированном значении малого параметра, а не при стремлении последнего к нулю, как это происходит в классических асимптотических методах. Это является весьма важным при решении прикладных сингулярно возмущенных задач, возникающих в различных областях науки. Метод голоморфной регуляризации, наряду с методом нормальных форм В.Ф. Сафонова, специально разрабатывался для решения именно нелинейных сингулярно возмущенных уравнений и систем, чтобы заложить основу аналитической теории сингулярных возмущений. В дальнейшем, указанный в работе подход, будет распространён на другие типы нелинейных задач, в том числе на уравнения в банаховом пространстве.

Ключевые слова: голоморфная регуляризация, псевдоголоморфное решение.

Abstract

The holomorphic regularization method, which is a logical continuation of the method of regularization S. A.Lomov, is used to build pseudoholomorphic solutions of weakly nonlinear singularly perturbed systems of differential equations, i.e. those solutions which can be represented as convergent in the usual sense (not asymptotic) series in powers of the small parameter. The existence of first integrals of singularly perturbed systems holomorphic by the small parameter is proved and, thus, the Poincare theorem about the decomposition is generalized. From this and the implicit function theorem the Lagrange stability of the solutions of the system of equations of characteristics follows the existence of pseudoholomorphic in global sense solutions of weakly nonlinear singularly perturbed systems. It should be noted that the regularizing functions responsible for the description of the boundary layer are defined (as well as in the Lomov method) by the limit spectrum of the operator. In this method any preassigned accuracy of approximation is provided for a fixed value of the small parameter, not for tending it to zero, as it happens in classic asymptotic methods. This is very important in solving applied singularly perturbed problems arising in various fields of science. The holomorphic regularization method, along with the method of normal forms of V.F. Safonov, was specially designed to solve precisely nonlinear singularly perturbed equations and systems and to lay the foundation of the analytic theory of singular perturbations. In the future the described approach will be extended to other types of non-linear problems including equations in Banach space.

Keywords: holomorphic regularization, pseudoholomorphic decision.

Введение

Постоянно возникающие прикладные сингулярно возмущенные задачи в таких областях, как химическая кинетика и теория горения, нелинейная электротехника, теория гироскопов и др, требуют развития на базе классических асимптотических методов [1, 5] таких подходов к их решению, которые обеспечивают максимально высокую точность аппроксимации. Более того, нужно учитывать тот факт, что малый параметр в любой сингулярно возмущенной задачи имеет вполне определенное, конкретное значение. В этой связи, в рамках метода регуляризации С.А. Ломова [6, 7], возникла концепция псевдоаналитического (псевдоголоморфного) решения [2, 7]. Чтобы пояснить ее суть, рассмотрим типичную линейную сингулярно возмущенную задачу в банаховом пространстве E:

$$\begin{aligned} &\varepsilon y' + A(t)y = h(t), \quad t \in [0, T] \\ &y(0, \varepsilon) = y_0 \in E, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A(t)$ — ограниченный или неограниченный замкнутый оператор, действующий при каждом $t \in [0, T]$ в указанном пространстве. Как правило, регуляризованное решение задачи Коши (1) имеет следующий вид:

$$y(t, \varepsilon) = Y_0\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon Y_1\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right) + \ldots + \varepsilon^n Y_n\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right) + \ldots, \tag{2}$$

в котором функция $\varphi(t)$ определяется спектром переменного оператора $A(t)$. Если перейти к расширению ряда (2)

$$Y(t, \eta, \varepsilon) = Y_0(t, \eta) + \varepsilon Y_1(t, \eta) + \ldots + \varepsilon^n Y_n(t, \eta) + \ldots, \tag{3}$$

то здесь мы уже наблюдаем регулярную зависимость от малого параметра ε, и вопрос об аналитической зависимости $Y(t, \eta, \varepsilon)$ от ε становится совершенно естественным. А именно, если ряд (3) сходится равномерно по $t \in [0, T]$, при каждом фиксированном η из некоторого неограниченного множества G, в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, то решение $y(t, \varepsilon)$ задачи Коши (1) называется псевдоаналитическим (псевдоголоморфным) [2, 5].

1. Псевдоголоморфные по параметру интегралы слабо нелинейных сингулярно возмущенных систем

Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ слабо нелинейную сингулярно возмущенную систему

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \varepsilon F(t, y) \tag{4}$$

с начальным условием

$$y(0, \varepsilon) = y_0 \tag{5}$$

и малым положительным параметром ε. Здесь $y = (y_1, \dots, y_k)$; $y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,k})$; $F(t, y) = (F_1(t, y), \dots, F_k(t, y))$; $A(t)$ — матрица размером $k \times k$, голоморфная на отрезке $[0, T]$. От вектор-функции $F(t, y)$ также потребуем голоморфность на цилиндре $\overline{\Omega}_T = [0, T] \times \overline{\Omega}$, где Ω является односвязной областью в R^k.

Пусть собственные значения $\{\lambda_p(t)\}_{p=1}^k$ оператора $A(t)$ голоморфны и различны на отрезке $[0, T]$ и не обращаются там в ноль. Далее, пусть $\{b_p(t)\}_{p=1}^k$ — соответствующие им собственные векторы, а $\{b_p^*(t)\}$ — биортогонально сопряженная система. Обозначим через $e_m^* = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ вектор-строку, у которой единица находится на m-м месте, а остальные элементы — нули. Заметим, что наложенные условия на собственные значения, называются условиями стабильности спектра [6] и являются наиболее естественными в теории сингулярных возмущений [1, 7].

В соответствии с методом голоморфной регуляризации [3, 4, 5] составим уравнение первых интегралов системы (4) в области Ω_T:

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{m=1}^{k} (\langle e_m^*, A(t)y \rangle + \varepsilon F_m(t, y)) \frac{\partial U}{\partial y_m} = 0, \tag{6}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в R^k. Решение уравнения (6) будем искать в виде ряда по степеням ε:

$$U(t, y, \varepsilon) = U_0(t, y) + \varepsilon U_1(t, y) + \ldots + \varepsilon^n U_n(t, y) + \ldots, \tag{7}$$

для коэффициентов $U_n(t,y)$ которого имеем:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{k}\langle e_m^*, A(t)y\rangle\frac{\partial U_0}{\partial y_m} = 0,\\
&\sum_{m=1}^{k}\langle e_m^*, A(t)y\rangle\frac{\partial U_1}{\partial y_m} = -\left(\frac{\partial U_0}{\partial t} + \sum_{m=1}^{k} F_m(t,y)\frac{\partial U_0}{\partial y_m}\right),\\
&\sum_{m=1}^{k}\langle e_m^*, A(t)y\rangle\frac{\partial U_2}{\partial y_m} = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + \sum_{m=1}^{k} F_m(t,y)\frac{\partial U_1}{\partial y_m}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_{m=1}^{k}\langle e_m^*, A(t)y\rangle\frac{\partial U_n}{\partial y_m} = -\left(\frac{\partial U_{n-1}}{\partial t} + \sum_{m=1}^{k} F_m(t,y)\frac{\partial U_{n-1}}{\partial y_m}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Обозначим через

$$
M = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{m=1}^{k} F_m(t,y)\frac{\partial}{\partial y_m} \quad \text{и} \quad L = \sum_{m=1}^{k}\langle e_m^*, A(t)y\rangle\frac{\partial}{\partial y_m}
$$

— линейные дифференциальные операторы первого порядка в частных производных.

Для построения k независимых решений уравнения (6) (k независимых интегралов исходной системы), будем последовательно полагать U_0 быть равным

$$
\int_0^t \lambda_p(\tau)d\tau, \quad p = \overline{1,k}.
$$

Далее докажем, что функция

$$
\widehat{U}_1^{[p]}(t,y) = -\ln\langle b_p^*(t), y\rangle
$$

при каждом $p = \overline{1,k}$ является решением уравнения

$$
L\widehat{U}_1^{[p]} = -\lambda_p(t). \tag{9}
$$

Действительно, при фиксированном p:

$$L\widehat{U}_1^{[p]} = -\sum_{m=1}^{k} \frac{\langle e_m^*, A(t)y\rangle\langle e_m^*, b_p^*(t)\rangle}{\langle b_p^*(t), y\rangle} = -\frac{1}{\langle b_p^*(t), y\rangle}\sum_{m=1}^{k}\langle e_m^*, A(t)y\rangle\langle e_m^*, b_p^*(t)\rangle =$$
$$= -\frac{1}{\langle b_p^*(t), y\rangle}\sum_{m=1}^{k}\langle e_m^*, y\rangle\langle e_m^*, A^*(t)b_p^*(t)\rangle = -\frac{1}{\langle b_p^*(t), y\rangle}\sum_{m=1}^{k}\langle e_m^*, y\rangle\langle e_m^*, b_p^*(t)\rangle\lambda_p(t) =$$
$$= -\frac{1}{\langle b_p^*(t), y\rangle}\lambda_p(t)\langle b_p^*(t), y\rangle = -\lambda_p(t),$$

что и требовалось доказать.

Теперь покажем независимость системы функций $\{\widehat{U}_1^{[p]}\}_{p=1}^{k}$. Имеем,

$$\frac{\partial(\widehat{U}_1^{[1]}, \ldots, \widehat{U}_1^{[k]})}{\partial(y_1, \ldots, y_k)} = \begin{vmatrix} \frac{\langle e_1^*, b_1^*\rangle}{\langle b_1^*, y\rangle} & \frac{\langle e_2^*, b_1^*\rangle}{\langle b_1^*, y\rangle} & \ldots & \frac{\langle e_k^*, b_1^*\rangle}{\langle b_1^*, y\rangle} \\ \frac{\langle e_1^*, b_2^*\rangle}{\langle b_2^*, y\rangle} & \frac{\langle e_2^*, b_2^*\rangle}{\langle b_2^*, y\rangle} & \ldots & \frac{\langle e_k^*, b_2^*\rangle}{\langle b_2^*, y\rangle} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\langle e_1^*, b_k^*\rangle}{\langle b_k^*, y\rangle} & \frac{\langle e_2^*, b_k^*\rangle}{\langle b_k^*, y\rangle} & \ldots & \frac{\langle e_k^*, b_k^*\rangle}{\langle b_k^*, y\rangle} \end{vmatrix} = -$$
$$-\frac{1}{\langle b_1^*, y\rangle \ldots \langle b_k^*, y\rangle}\det(B^*)^T \neq 0,$$

где B^* — матрица со столбцами $b_1^*(t), \ldots, b_k^*(t)$.

Что же касается решения остальных уравнений серии (8), которые кратко можно записать так:

$$LU_n = -MU_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots\,, \tag{10}$$

то здесь мы воспользуемся интегральным представлением решений уравнений в частных производных первого порядка [8]. Для этого проведем через точку y_0 гиперплоскость $\Lambda:\ y_k = y_{0,k}$, и пусть $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_{k-1})$ — координаты на ней.

Запишем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dy}{ds} = A(t)y. \tag{11}$$

Не нарушая общности, будем считать, что фазовые траектории этой системы, проходящие через поверхность Λ, трансверсальны (не касательны) к ней [4, 8].

Система (1) является автономной, поскольку t выступает в поли параметра, а $s \geq 0$ — независимой переменной. Общее решение такой системы (при выдвинутых условиях на оператор $A(t)$) общеизвестно и задается формулой

$$y = B(t)e^{sD(t)}C, \tag{12}$$

где $B(t)$ — матрица, столбцами которой служат собственные векторы оператора $A(t)$; матрица $D(t)$ диагональна и имеет следующий вид:

$$D(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k(t) \end{pmatrix};$$

C — столбец произвольных констант.

Пусть $g(s, \widetilde{y}, t)$ — значение решения системы (11) (с начальным условием $g(0, \widetilde{y}, t) = y(\widetilde{y})$ на гиперплоскости Λ) в момент времени s. В первую очередь мы должны удовлетворить указанному начальному условию. Для этого в левую часть равенства (12) подставим столбец высоты к $\widetilde{Y} = (\widetilde{y}, y_{0,k})^T$, а в правой положим $s = 0$. Тогда получим, что $C = B^{-1}(t)\widetilde{Y}$. Следовательно,

$$g(s, \widetilde{y}, t) \equiv B(t)e^{sD(t)}B^{-1}(t)\widetilde{Y}.$$

Далее, рассмотрим систему

$$B(t)e^{sD(t)}B^{-1}(t)\widetilde{Y} = y, \tag{13}$$

из которой вытекает, как уравнение для определения s:

$$\langle e_k^*, B(t)e^{-sD(t)}B^{-1}(t)y\rangle = y_{0,k}, \tag{14}$$

так и формулы для координат $\widetilde{y}_1, \dots, \widetilde{y}_{k-1}$:

$$\widetilde{y}_m = \langle e_m^*, B(t)e^{-sD(t)}B^{-1}(t)y\rangle, \quad m = \overline{1, k-1} \tag{15}$$

Для дальнейшего нам понадобятся операторы замены переменных. Пусть $s = S(y, t)$ — решение уравнения (14), а $G(y, t)$ — вектор-функция, компонентами которой служат правые части равенства (15).

Определение 1 *Оператор $W(t)$, заданный формулой*

$$W[\varphi(s, \widetilde{y}, t)] = \varphi(S(y, t), G(y, t); t)$$

называется оператором замены переменных $(s, \widetilde{y})$ *на переменную* y. *Обратный к нему оператор* $W^{-1}(t,s)$, *заданный по формуле*

$$W^{-1}[\Phi(y,t)] = \Phi(g(s,\widetilde{y},t),t),$$

называется оператором замены переменной y *на переменные* $(s, \widetilde{y})$.

Заметим, что обе эти операции не меняют оценку модуля функций, к которым их применяют при соответствующем изменении переменной s, поскольку каждая точка области Ω принадлежит какой-нибудь одной фазовой траектории системы (11).

Имеем для решений серии уравнений (10):

$$\begin{gathered}
U_2(t,y) = -W(t)\int\limits_0^s W^{-1}(t,s_1)MU_1(t,y)ds_1,\\
U_3(t,y) = W(t)\int\limits_0^s ds_1 W^{-1}(t,s_1)MW(t)\int\limits_0^{s_1} W^{-1}(t,s_2)MU_1(t,y)ds_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
U_n(t,y) = (-1)^{n-1}W(t)\int\limits_0^s ds_1 W^{-1}(t,s_1)MW(t)\int\limits_0^{s_1} ds_2 W^{-1}(t,s_2)M\dots\\
\dots W(t)\int\limits_0^{s_{n-2}} W^{-1}(t,s_{n-1})MU_1(t,y)ds_{n-1},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}\tag{16}$$

Заметим, что $U_n(t,y) = 0$ на гиперплоскости Λ при всех $n = 2,3,\dots$. Что же касается $U_1(t,y)$, то выберем его обращающимся в ноль в начальной точке:

$$U_1^{[p]}(t,y) = -\ln\frac{\langle b_p^*(t), y\rangle}{\langle b_p^*(0), y_0\rangle}, \quad p = \overline{1,k}.$$

Для доказательства сходимости ряда (7) равномерно на $[0,T]\times\overline{\omega}$, где $\overline{\omega}$ — произвольный компакт из Ω в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (зависящей от $\overline{\omega}$), воспользуемся следующим утверждением, доказываемым методом математической индукции.

Лемма 1. *Если в выражении*

$$(g_m(x)(g_{m-1}(x)(\dots(g_1(x)))_x)_x\dots)_x$$

раскрыть скобки по формуле производной произведения и заменить $g_r^{(l)}(x)$, *где* $1 \le r \le m$, $0 \le l \le m$ *на* $l!$, *то полученная сумма будет равна* $(2m-1)!!$.

Представим $U_n(t,y)$ в следующем виде:

$$U_n(t,y) =$$
$$= (-1)^{n-1} W(t) \int\limits_0^s ds_1 \int\limits_0^{s_1} ds_2 \ldots \int\limits_0^{s_{n-3}} ds_{n-2} \int\limits_0^{s_{n-2}} W^{-1}(t,s_1) M W(t) W^{-1}(t,s_2) M \ldots$$
$$\ldots W(t) W^{-1}(t,s_{n-1}) M U_1(t,y) ds_{n-1}. \tag{17}$$

Далее, если функция нескольких переменных голоморфна в некоторой замкнутой ограниченной области, то существует константа $q > 0$ такая, что в этой области $|D^\alpha f| \le q^{|\alpha|}(|\alpha|!)$, где $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots \alpha_{k+1}$, $0 \le |\alpha| < +\infty$. Отсюда следует, что эта оценка не зависит от названия переменных (их всего $k+1$), а зависит только от порядка $|\alpha|$ производной, поэтому их все можно считать одной переменной, которую обозначим через v. С другой стороны результат, сформулированный в лемме 1, не зависит от функции, поэтому вместо оператора M можно рассмотреть оператор $\overline{M} = (k+1)\psi(v)(d/dv)$. Тогда получим, что

$$|U_n(t,y)| \le \left| \int\limits_0^s ds_1 \int\limits_0^{s_1} ds_2 \ldots \int\limits_0^{s_{n-3}} ds_{n-2} \int\limits_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} \right| (k+1)^{n-1} q^{n-1} (2n-3)!! |U_1(t,y)|$$

или

$$|U_n(t,y)| \le \frac{(k+1)^{n-1} q^{n-1} s^{n-1} (2n-3)!!}{(n-1)!} |U_1(t,y)| \quad \forall (t,y) \in \overline{\Omega}_T. \tag{18}$$

Из оценки (18) и следует сходимость ряда (7) равномерно на $[0,T] \times \overline{\omega}$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$.

2. Псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных задач

Дадим определение псевдоголоморфности, как это понимается в методе голоморфной регуляризации.

Определение 2 *Решение* $y(t,\varepsilon) = (y_1(t,\varepsilon), \ldots, y_k(t,\varepsilon))$ *задачи Коши* (4), (5) *называется псевдоголоморфным в точке* $\varepsilon = 0$, *если существует функция* $Y(t,\eta,\varepsilon) = (Y_1(t,\eta,\varepsilon), \ldots, Y_k(t,\eta,\varepsilon))$, *где* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$, *голоморфная* *в точке* $O(0,\ldots,0)\in R^{k+2}$, *такая, что для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$ *такие, что для всех* $t\in[0,\delta]$ *выполнено равенство*

$$y(t,\varepsilon)=Y\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon},\varepsilon\right) \tag{19}$$

для некоторой голоморфной на отрезке $[0,T]$ *функции* $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_k(t))$.

Если при этом ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(t,\eta)\varepsilon^n, \tag{20}$$

представляющий функцию (19), *сходится равномерно на отрезке* $[0,T]$, *при каждом* η *из некоторого неограниченного множества* $G\subset R^k$, *в некоторой окрестности точки* $\varepsilon=0$ *(зависящей от* η*), то решение* $y(t,\varepsilon)$ *называется псевдоголоморфным в глобальном смысле.*

Так же, как и в случае линейной системы [4, 10] верна

Теорема 1 *Решение* $y(t,\varepsilon)$ *задачи Коши* (4), (5) *является псевдоголоморфным в точке* $\varepsilon=0$.

На самом деле, более важной является глобальная псевдоголоморфность.

Теорема 2 *Если* $\mathrm{Re}\lambda_p(t)\le 0\ \ \forall t\in[0,T]$, *то решение* $y(t,\varepsilon)$ *начальной задачи* (4), (5) *является псевдоголоморфным в точке* $\varepsilon=0$ *в глобальном смысле.*

Доказательство. Решение $y(t,\varepsilon)$ определяется системой k первых независимых интегралов

$$\begin{cases} \int\limits_0^t\lambda_1(\tau)d\tau-\varepsilon\ln\dfrac{\langle b_1^*(t),y\rangle}{\langle b_1^*(0),y_0\rangle}+\varepsilon^2U_2^{[1]}(t,y)+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \int\limits_0^t\lambda_k(\tau)d\tau-\varepsilon\ln\dfrac{\langle b_k^*(t),y\rangle}{\langle b_k^*(0),y_0\rangle}+\varepsilon^2U_2^{[k]}(t,y)+\ldots=0.\end{cases} \tag{21}$$

Здесь $U_n^{[p]}(t,y)$ при $p = 1,2,\dots,k$ определяются формулами (16), когда $U_1(t,y) = U_1^{[p]}(t,y)$.

Перепишем систему (21) следующим образом

$$\begin{cases} \ln \dfrac{\langle b_1^*(t), y\rangle}{\langle b_1^*(0), y_0\rangle} - \varepsilon U_2^{[1]}(t,y) - \varepsilon^2 U_3^{[1]}(t,y) - \ldots = \dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_1(\tau)d\tau, \\ \dotfill \\ \ln \dfrac{\langle b_k^*(t), y\rangle}{\langle b_k^*(0), y_0\rangle} - \varepsilon U_2^{[k]}(t,y) - \varepsilon^2 U_3^{[k]}(t,y) - \ldots = \dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_k(\tau)d\tau \end{cases}$$

и пропотенциируем получившиеся уравнения по основанию e:

$$\begin{cases} \dfrac{\langle b_1^*(t), y\rangle}{\langle b_1^*(0), y_0\rangle} V^{[1]}(t,y,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau}, \\ \dotfill \\ \dfrac{\langle b_k^*(t), y\rangle}{\langle b_k^*(0), y_0\rangle} V^{[k]}(t,y,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_k(\tau)d\tau}, \end{cases} \tag{22}$$

где

$$V^{[p]}(t,y,\varepsilon) = e^{-\varepsilon U_2^{[p]}(t,y) - \varepsilon^2 U_3^{[p]}(t,y) - \cdots}, \quad p = \overline{1,k}.$$

Далее, если, скажем, $\lambda_r(t)$ является комплексным, то тогда вместо двух уравнений в системе (22), соответствующих $\lambda_r(t)$ и $\overline{\lambda}_r(t)$, поставим два уравнения, получающиеся из одного из них выделением действительной и мнимой частей. В этих условиях первые части новых уравнений будут иметь следующий вид:

$$e^{\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_0^t \lambda_r(\tau)d\tau} \cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Im}\int\limits_0^t \lambda_r(\tau)d\tau\right)$$

$$e^{\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_0^t \lambda_r(\tau)d\tau} \sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Im}\int\limits_0^t \lambda_r(\tau)d\tau\right).$$

Если теперь обозначить правые части новой системы через α_p, то система

(22) преобразуется в такую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\langle b_1^*(t), y\rangle}{\langle b_1^*(0), y_0\rangle} V^{[1]}(t, y, \varepsilon) = \alpha_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\langle b_k^*(t), y\rangle}{\langle b_k^*(0), y_0\rangle} V^{[k]}(t, y, \varepsilon) = \alpha_k, \end{cases} \tag{23}$$

причем, не теряя общности, будем считать, что левые части уравнений (23) с соответствующими номерами получены выделением действительных и мнимых частей (несмотря на сохранившиеся обозначения). Еще заметим, что $0 \le \alpha_p \le 1$, при этом левое неравенство при вещественном $\lambda_p(t)$ является строгим.

Выберем очень маленькие $\alpha_0 > 0$ и рассмотрим параллелепипед

$$\Pi_{\alpha_0} = \{Q(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k): \quad 0 \le t \le T, \quad \alpha_0 \le |\alpha_p| \le 1\}.$$

Так как $V^{[p]}(t, y, 0) = 1$ и $U_1^{[p]}(t, y)$ независимы, то выполнены все условия теоремы о неявной функции, причем решение $y = Y_0(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ системы (23) при $\varepsilon = 0$ ограниченное. Поэтому в окрестности σ_Q каждой точки $Q \in \Pi_{\alpha_0}$ существует решение $y = Y_0(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$, голоморфное по ε, равномерно в этой окрестности. Поскольку Π_{α_0} — компакт, то выделяя из открытого покрытия $\{\sigma_Q\}$ конечное подпокрытие $\{\sigma_Q\}_1^N$ приходим к выводу, что $Y(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon)$ голоморфно по последней переменной в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (наименьшей из соответствующих конечному подпокрытию). Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши для скалярного уравнения

$$\begin{aligned} &\varepsilon y' = -y + \varepsilon y^2 e^{e^t y}, \quad \varepsilon > 0 \\ &y(0, \varepsilon) = 1. \end{aligned}$$

Имеем, с помощью указанного подхода,

$$y(t, \varepsilon) = e^{-t/\varepsilon} - \varepsilon e^{-t} e^{-e^{t - t/\varepsilon}} \left(e^{e^{t - t/\varepsilon}} - e^{e^t} \right) + \dots$$

— псевдоголоморфное в глобальном смысле решение.

Пример 2. Применим метод голоморфной регуляризации к слабо нелинейной сингулярно возмущенной системе второго порядка:

$$\begin{cases} \varepsilon y_1' = -(e^t + 1) y_1 + 2e^{-t} y_2 + \varepsilon e^{y_2 t} \\ \varepsilon y_2' = e^{2t} y_1 - 3y_2, \end{cases}$$

$$y_1(0, \varepsilon) = 1, \quad y_2(0, \varepsilon) = 0.$$

Имеем

$$U_0^{[1]}(t,y) = -t; \quad U_0^{[2]}(t,y) = -3t - e^t + 1;$$

$$U_1^{[1]}(t,y) = -\ln(e^t y_1 + y_2); \quad U_1^{[2]}(t,y) = -\ln(e^{2t} y_1 - 2y_2).$$

Здесь, $y = (y_1, y_2)$.

Далее, составим систему уравнений характеристик

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{ds} = -(e^t+1)y_1 + 2e^{-t}y_2, \\ \dfrac{dy_2}{ds} = -e^{2t}y_1 - 3y_2, \end{cases}$$

и, в качестве начальной поверхности, выберем прямую $\Lambda: \ y_1 - 2e^{-2t}y_2 - 1 = 0$. Пусть $\widetilde{y}_2 = y_2$ — координата на Λ. Тогда

$$\begin{pmatrix} g_1(s,\widetilde{y}_2,t) \\ g_2(s,\widetilde{y}_2,t) \end{pmatrix} = \frac{(2e^{-t}+1)\widetilde{y}_2 + et}{e^t+2} \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix} e^{-ts} - \frac{e^t}{e^t+2} \begin{pmatrix} -1 \\ e^t \end{pmatrix} e^{-(3+e^t)s};$$

$$s = \frac{1}{e^t+3}\ln(y_1 - 2y_2e^{-2t}) \equiv S(y,t),$$

$$\widetilde{y}_2 = \frac{y_1e^t + y_2 - e^t}{2e^{-t}+1} \equiv G(y,t).$$

В итоге получим два независимых первых интеграла:

$$\begin{cases} \ln(e^t y_1 + y_2) - \varepsilon U_2^{[1]}(t,y) - \ldots = -\dfrac{t}{\varepsilon}, \\ \ln(e^{2t} y_1 - 2y_2) - \varepsilon U_2^{[2]}(t,y) - \ldots = \dfrac{-3t - e^t + 1}{\varepsilon}, \end{cases}$$

где

$$U_2^{[1]}(t,y) = e^t \int\limits_0^{S(y,t)} \frac{g_1(s_1,G(y,t),t) + e^{tg_2(s_1,G(y,t),t)}}{e^tg_1(s_1,G(y,t),t) + g_2(s_1,G(y,t),t)} ds_1,$$

$$U_2^{[2]}(t,y) = e^{2t} \int\limits_0^{S(y,t)} \frac{2g_1(s_1,G(y,t),t) + e^{tg_2(s_1,G(y,t),t)}}{e^{2t}g_1(s_1,G(y,t),t) - 2g_2(s_1,G(y,t),t)} ds_1.$$

Наконец, используя алгоритм построения ряда для вектор-функции, заданной неявно, найдем псевдоголоморфное в глобальном смысле решение:

$$y(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} Y_{0,1} \\ Y_{0,2} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} Y_{1,1} \\ Y_{1,2} \end{pmatrix} + \dots .$$

Здесь,

$$Y_{0,1} = \frac{2e^{-t/\varepsilon} + e^{(-3t-e^t+1)/\varepsilon}}{2e^t + e^{2t}}, \qquad Y_{0,2} = \frac{e^{t-t/\varepsilon} - e^{(-3t-e^t+1)/\varepsilon}}{e^t + 2},$$

а $Y_{1,1}$ и $Y_{1,2}$ определяются из линейной системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1^{[1]}}{\partial y_1} Y_{1,1} + \dfrac{\partial U_1^{[1]}}{\partial y_2} Y_{1,2} = U_2^{[1]}, \\ \dfrac{\partial U_1^{[2]}}{\partial y_1} Y_{1,1} + \dfrac{\partial U_1^{[2]}}{\partial y_2} Y_{1,2} = U_2^{[2]} \end{cases}$$

при $(y_1, y_2) = (Y_{0,1}, Y_{0,2})$.

Заключение

Метод регуляризации С.А. Ломова позволяет исследовать сингулярно возмущенные задачи также и в некомпактных областях [9].Дальнейшие исследования будут посвящены распространению метода голоморфной регуляризации на нелинейные задачи указанного типа.

Список литературы

[1] **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач. М.: Наука, 1973.

[2] **Качалов В.И., Ломов С.А.** Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач. Доклады РАН. 334 (1994), 6, 694-695.

[3] **Качалов В.И.** Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач. Вестник МЭИ. 26 (2010), 54–62.

[4] **Качалов В.И.** Псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений. Вестник МЭИ, 6 (2012), 13–21.

[5] **Качалов В.И.** Об алгебраических основах теории сингулярных возмущений. Дифференц. уравн., 49 (2013), 3, 397–401.

[6] **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

[7] **Ломов С.А., Ломов И.С.** Основы математической теории пограничного слоя. Изд-во МГУ, 2011.

[8] **Самойленко А.И., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.** Дифференциальные уравнения. М., Высшая школа, 1989.

[9] **Федоров Ю.С., Коняев Ю.А.** Асимптотический анализ некоторых классов сингулярно возмущенных задач на полуоси. Матем. заметки, 62 (1997), 111–117.

[10] **Федоров Ю.С., Качалов В.И.** О голоморфных по малому параметру интегралах сингулярно возмущенных систем. Труды 21 матем. чтений РГСУ, 2012, 42-48.