ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2015
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Определяющие наблюдения для устойчивости и бифуркации на конечном промежутке в вариационных системах управления с параметром

Д. Ю. Калиниченко
Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Аннотация

Рассматриваются устойчивость и бифуркация на конечном промежутке времени в задаче термо-вязко-упругопластического контакта. Для описания такого контакта используется закон Кулона для сухого трения в виде вариационного неравенства. Контактная задача записана в виде вариационной системы, зависящей от параметра. В качестве фазовых пространств используются шкалы гильбертовых пространств. Вводятся операторы наблюдений, которые которые являются ореляющими для бифуркации системы и сходимости по выходу. Для описания устойчивости и бифуркации, которая понимается как потеря устойчивости на конечном промежутке времени, применяется частотный подход. Приводятся частотные условия существования определяющих наблюдений и абсолютной дихотомичности вариационного уравнения. Рассматривается связь между частотным условием и дефектом полноты оператора наблюдения.

Abstract

Stability and bifurcation on a finite time interval are considered for a thermoviscoelastoplastic contact problem. To describe such type of contact Coulomb's law for dry friction written as a variational inequality is used. The contact problem is presented as a parameter dependent variational system. Phase spaces for the system are given by scales of Hilbert spaces. Determining observation operators for bifurcation of the system and output convergence are introduced. The frequency theorem is applied in order to describe stability and bifurcation, which is understood as a loss of stability on a finite time interval. Frequency-domain conditions for the existence of determining observations and for absolute dichotomy of a variational equation are given. The connection between the frequency-domain condition and the completeness defect of the observation operator is considered.

Ключевые слова: определяющие наблюдения, бифуркация на конечном промежутке, частотный метод, вариационное неравенство.
Keywords: determining observation, bifurcation on a finite time interval, frequency theorem, variational inequality.
Классификация (Classification): 35B32, 45M10, 93C10, 93C25, 93C80.

1 Задача термо-вязко-упругопластического контакта

Рассматривается термо-вязко-упругопластический контакт при скольжении твердого тела по упругопластическому телу. Опишем задачу в соответствии с [1]. Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область (эталонная форма упругопластического тела), $\Gamma = \partial\Omega$ — кусочно-непрерывная липшицева граница, разделенная на непересекающиеся части: Γ_D (где тело сжимается), Γ_N (где действуют внешние силы) и Γ_C (контактное трение). Пусть $x = (x^1, ..., x^m)$ — координата в Ω, $t \in \mathbb{R}_+$ — время, $n = (n^1, ..., n^m)$ — единичная нормаль к Γ, $u(x,t) = (u^1(x,t), ..., u^m(x,t))$ — перемещение, $\theta = \theta(x,t)$ — температура, $\sigma = (\sigma^{ij})$ — тензор напряжения, $f_A = (f_A^1(x,t), ..., f_A^m(x,t))$ — внешние силы, действующие на тело в Ω, и $\kappa = \kappa(x,t)$ — плотность источников тепла.

Задача описывается уравнением движения и уравнением теплопроводности:

$$[\sigma^{kj}(\delta_k^i + u_{,k}^i)]_{,j} + f_A^i = \ddot{u}^i \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$\dot{\theta} - \left(k^{ij}\theta_{,j}\right)_{,i} = -c^{ij}u_{i,j} + \kappa \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \tag{2}$$

где $T > 0$, δ_k^i — символ Кронекера, $\theta_{,j}$ обозначает ковариантную производную θ по x^j, точка обозначает производную по времени, $c^{ij} = c^{ij}(x)$ и $k^{ij} = k^{ij}(x)$ являются тензорами теплового расширения и теплопроводности, соответственно, а σ определяется термо-вязко-упругопластическим соотношением между напряжением и деформацией:

$$\sigma^{ij} = a^{ijkl}u_{k,l} + b^{ijkl}\dot{u}_{k,l} - c^{ij}\theta + P^{ij}[u_{k,l}, \theta] \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \tag{3}$$

где (a^{ijkl}) и (b^{ijkl}) являются тензорами упругости и вязкости, соответственно, $\left\{P^{ij}[\cdot, \theta]\right\}_{\theta > 0}$ — пластическая часть, заданная оператором гистерезиса, зависящим от θ. Здесь и далее индексы пробегают значения от 1 до m. Суммирование по Эйнштейну проводится по повторяющимся индексам.

Зададим начально-краевые условия:

(a) на перемещение и температуру

$$\begin{aligned} &u = 0 && \text{на} \quad \Gamma_D \times (0,T); \\ &\theta = \theta_b && \text{на} \quad (\Gamma_D \cup \Gamma_N) \times (0,T); \\ &u(\cdot,0) = u_0,\ \dot{u}(\cdot,0) = u_1,\ \theta(\cdot,0) = \theta_0 && \text{в} \quad \Omega; \end{aligned} \tag{4}$$

(b) на граничные силы

$$\sigma^{ij} n_j = f_N^i \qquad \text{на} \qquad \Gamma_N \times (0,T), \tag{5}$$

где $f_N = (f_N^i(x,t))$ — внешние силы;

(c) на трение и температуру на Γ_C. Используем закон Кулона для сухого трения

$$\begin{aligned} &|\sigma_T| \le \mu|\sigma_N|(1-\delta|\sigma_N|)_+ && \text{на } \Gamma_C \times (0,T), \\ &|\sigma_T| < \mu|\sigma_N|(1-\delta|\sigma_N|)_+ \Rightarrow \dot{u}_T = v_0 && \text{(зона прилипания)}, \\ &|\sigma_T| = \mu|\sigma_N|(1-\delta|\sigma_N|)_+ \Rightarrow \dot{u}_T = v_0 - \lambda\sigma_T && \text{(зона скольжения)}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} k^{ij}\theta_{,i} n_j = \mu|\sigma_N|(1-\delta|\sigma_N|)_+ s_C(\cdot, |\dot{u_T} - v_0|) - k_e(\theta - \theta_R) \\ \text{на } \Gamma_C \times (0,T), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\sigma_N = \sigma^{ij} n_i n_j$ и $u_N = u^i n_i$, $\sigma_T^i = \sigma^{ij} n_j - \sigma_N n^i$ и $u_T^i = u^i - u_N n^i$ — нормальные и тангенциальные компоненты σ и u на Γ, соответственно, μ — коэффициент трения, v_0 — скорость движения твердого тела, $\delta > 0$ — малая константа, связанная с износом поверхности, $\lambda \ge 0$ — коэффициент относительного направления скольжения, θ_R — температура твердого тела, $s_C(\cdot, r)$ — заданная функция расстояния, k_e — коэффициент теплообмена между упругопластическим телом и твердым телом.

В общем случае задача термо-вязко-упругопластического контакта (1) — (7) не имеет классического решения. Поэтому рассматривается слабая, или вариационная, форма этой задачи. В [1] строится система из вариационного неравенства для перемещения и вариационного равенства для температуры, а также доказывается существование слабого решения этой гибридной системы. В настоящей работе изучается операторная версия данной вариационной системы. Главной целью является построение определяющих наблюдений для устойчивости и бифуркации вариационной системы на конечном промежутке времени с помощью частотной теоремы ([10]). В аналогичной форме определяющие наблюдения были построены для задачи микроволнового нагрева в [3], [8]. Некоторые результаты настоящей работы были изложены в [4].

2 Упрощенная контактная задача

Сначала напомним некоторые понятия из теории шкал гильбертовых пространств ([7]). Введем набор вещественных гильбертовых пространств $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_\alpha$ и нормой $||\cdot||_\alpha$, который называется *шкалой гильбертовых пространств*, если выполнены следующие условия:

(i) Для любых $\alpha>\beta$ пространство H_α непрерывно вложено в H_β, т.е. $H_\alpha\subset H_\beta$ и существует такое $c_1>0$, что $||h||_\beta\le c_1||h||_\alpha$, $\forall h\in H_\alpha$, и H_α плотно в H_β;

(ii) Для любых $\alpha>0$ и $h\in H_\alpha$ линейный функционал $(\cdot,h)_0$ на H_0 может быть непрерывно продолжен до линейного непрерывного фукционала $(\cdot,h)_{-\alpha,\alpha}$ на $H_{-\alpha}$, удовлетворяющего условию $|(h',h)_{-\alpha,\alpha}|\le||h'||_{-\alpha}||h||_\alpha$, $\forall h'\in H_{-\alpha},\forall h\in H_\alpha$. Любой линейный непрерывный функционал l на H_α имеет вид $l(h)=(h',h)_{-\alpha,\alpha}$ для некоторого $h'\in H_{-\alpha}$, т.е. $H_{-\alpha}$ изоморфно пространству линейных непрерывных функционалов на H_α.

Из **(i)** следует, что для любого $\alpha\in(\beta,\gamma)$ пространство H_α оснащено пространствами H_β и H_γ, т.е. $H_\gamma\subset H_\alpha\subset H_\beta$ с плотным и непрерывным вложением.

Пример 1 Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ — область, N — произвольное натуральное число. $\{H_\alpha^{(N)}\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ — *шкала дробных соболевских пространств* таких, что $H_\alpha^{(N)}=W^{\alpha,2}(\Omega)$, $\alpha=0,1,...,N$, с нормами $||u||^2_{H_\alpha^{(N)}}$, заданными следующим образом ([7]):

$$||u||^2_{W^{\alpha,2}}:=\int_\Omega\Big(|u|^2+\sum_{|\beta|=1}^{\alpha}|D^\beta u|^2\Big)dx,\ \text{если } \alpha\ge0-\text{целое},$$

$$||u||^2_{W^{\alpha,2}}:=||u||^2_{W^{k,2}}+\sum_{|\beta|=1}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|^2}{|x-y|^{k+2\lambda}}dxdy,$$
$$\text{если } \alpha=k+\lambda>0,\ k\ge0-\text{целое},\ \lambda\in(0,1),$$

$$||u||^2_{W^{\alpha,2}}:=\sup_{||v||_{H^{(N)}_{-\alpha}}=1}\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right|,\ \text{если } \alpha<0.$$

□

Теперь рассмотрим упрощенную задачу контакта ([9]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область, $\partial\Omega$ — гладкая граница, $u = u(x,t)$ и $\theta = \theta(x,t)$ — перемещение и температура упругого тела в точке x в момент времени t, которые удовлетворяют системе уравнений

$$u_{tt} + 2\epsilon u_t - \Delta u + \alpha u = \xi(t), \qquad \xi(t) \in \phi(\theta(t)), \tag{8}$$

$$\theta_t + \beta\Delta\theta + u - \gamma\zeta(t) = 0, \qquad \zeta(t) = g(\theta(t)), \tag{9}$$

где α, β, ϵ, γ — константы, а начальные и граничные условия заданы соотношениями:

$$u = 0,\ \theta = 0 \qquad \text{на} \qquad \partial\Omega \times (0,T), \tag{10}$$

$$u(\cdot,0) = u_0(\cdot),\ \dot{u}(\cdot,0) = u_1(\cdot),\ \theta(\cdot,0) = \theta_0(\cdot) \qquad \text{в} \qquad \Omega. \tag{11}$$

Нелинейные отображения $\phi : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладают свойствами:

$$vg(v) - \xi^2 \geq 0,\ \forall v \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \phi(v) \tag{12}$$

и $g = \Phi'$, т.е. g имеет дифференцируемый по Фреше потенциал.

Учет контактного свойства происходит при помощи дифференциального включения.

Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный положительно определенный оператор, порожденный оператором $(-\Delta)$ с нулевыми граничными условиями и имеющий область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = W^{2,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$. Введем пространства $\mathcal{V}_0 = L^2(\Omega)$, $\mathcal{V}_1 = \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$ и $\mathcal{V}_2 = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ со скалярными произведениями

$$(u,v)_s = (\mathcal{A}^{s/2}u, \mathcal{A}^{s/2}v),\ \forall u,v \in \mathcal{V}_s,\ s = 0,1,2, \tag{13}$$

а также пространства $Y_s = \mathcal{V}_{s+1} \times \mathcal{V}_s$, $Z_s = \mathcal{V}_{s+1}$, $s = 0,1$, со скалярными произведениями

$$((u,v),(\bar{u},\bar{v}))_s = (u,\bar{u})_{s+1} + (v,\bar{v})_s,\ \forall (u,v),(\bar{u},\bar{v}) \in Y_s,\ s = 0,1. \tag{14}$$

Гильбертово пространство Y_{-1} определяется как замыкание пространства Y_0 относительно нормы этого пространства. Поэтому имеем плотное и непрерывное вложение $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ ([7]). Аналогично строится оснащение пространства Z_0.

3 Определяющие наблюдения для бифуркаций на конечном промежутке времени

Обобщенной системой уравнений (8) — (9) в слабой форме будет гибридная система, зависящая от параметра, состоящая из вариационного неравенства и вариационного равенства, вида

$$(\dot{y} - A_1(q)y - B_1(q)\xi, \eta - y)_{Y_{-1},Y_1} + \Psi(\eta, q) - \Psi(y, q) \geq 0, \tag{15}$$

$$w(t) = C_1(q)y,\ \xi(t) \in \phi(t, w(t), v(t), q),\ \forall \eta \in L^2(0, T; Y_1),\ \text{п.в. на } (0, T), \tag{16}$$

$$(\dot{z} - A_2(q)z - B_2(q)\zeta, \nu)_{Z_{-1},Z_1} = 0, \tag{17}$$

$$v(t) = C_2(q)z,\ \zeta(t) \in g(t, w(t), v(t), q),\ \forall \nu \in L^2(0, T; Z_1),\ \text{п.в. на } (0, T). \tag{18}$$

Здесь $q \in Q$ — параметр, (Q, d) — метрическое пространство. Для любого $q \in Q$ полагаем, что $A_1(q) \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$, $B_1(q) \in \mathcal{L}(\Xi, Y_{-1})$, $C_1(q) \in \mathcal{L}(Y_{-1}, W)$, $0 \leq \Psi(\cdot, q) : Y_1 \to \mathbb{R}_+$, $\phi(\cdot, \cdot, \cdot, q) : \mathbb{R}_+ \times W \times V \to 2^{\Xi}$, $A_2(q) \in \mathcal{L}(Z_1, Z_{-1})$, $B_2(q) \in \mathcal{L}(\Sigma, Z_{-1})$, $C_2(q) \in \mathcal{L}(Z_{-1}, V)$, $g(\cdot, \cdot, \cdot, q) : \mathbb{R}_+ \times W \times V \to \Sigma$, где Y_1, Y_{-1}, Z_1, Z_{-1}, Ξ, W, Σ, V — вещественные гильбертовы пространства.

Определение 1 *Пара* $\{y(\cdot), z(\cdot)\} \in L^2(0, T; Y_1) \times L^2(0, T; Z_1)$ *называется* ***решением*** *задачи* (15) — (18) *на промежутке* $(0, T)$, *если* $\{\dot{y}(\cdot), \dot{z}(\cdot)\} \in L^2(0, T; Y_{-1}) \times L^2(0, T; Z_{-1})$ *и существует такая пара* $\{\xi(\cdot), \zeta(\cdot)\} \in L^2(0, T; \Xi) \times L^2(0, T; \Sigma)$, *что* $\{y(\cdot), z(\cdot), \xi(\cdot), \zeta(\cdot)\}$ *удовлетворяет системе* (15) — (18) *для почти всех* $t \in (0, T)$ *и* $\int_0^T \Psi(y(t), q)dt < +\infty$.

Полагаем, что для любого $T > 0$ такое решение существует. Будем называть $\{y(\cdot), z(\cdot), \xi(\cdot), \zeta(\cdot)\}$ из определения 1 *процессом* системы (15) — (18) ([9]).

Определение 2 *Пусть* $\{S_\alpha\}$, $\{\tilde{S}_{\tilde{\alpha}}\}$, $\{R_\alpha\}$, $\{\tilde{R}_{\tilde{\alpha}}\}$ — *шкалы вещественных гильбертовых пространств (наблюдений и выходов). Пусть* $D_\alpha \in \mathcal{L}(Y_1, S_\alpha)$, $E_\alpha \in \mathcal{L}(\Xi, S_\alpha)$, $\tilde{D}_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{L}(Z_1, \tilde{S}_{\tilde{\alpha}})$, $\tilde{E}_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{L}(\Sigma, \tilde{S}_{\tilde{\alpha}})$, $M_\alpha \in \mathcal{L}(Y_1, R_\alpha)$, $N_\alpha \in \mathcal{L}(\Xi, R_\alpha)$, $\tilde{M}_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{L}(Z_1, \tilde{R}_{\tilde{\alpha}})$, $\tilde{N}_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{L}(\Sigma, \tilde{R}_{\tilde{\alpha}})$ — *шкалы линейных операторов (наблюдений и выходов).*

Если $\{y(\cdot), z(\cdot), \xi(\cdot), \zeta(\cdot)\}$ — *процесс системы* (15) — (18) *и* α, $\tilde{\alpha}$, β, $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}$ — *произвольные параметры шкалы, то функция*

$$s(\cdot, \alpha, \tilde{\alpha}) = (D_\alpha y(\cdot) + E_\alpha \xi(\cdot), \tilde{D}_{\tilde{\alpha}} z(\cdot) + \tilde{E}_{\tilde{\alpha}} \zeta(\cdot)) \tag{19}$$

называется ***наблюдением****, а функция*

$$r(\cdot, \beta, \tilde{\beta}) = (M_\beta y(\cdot) + N_\beta \xi(\cdot), \tilde{M}_{\tilde{\beta}} z(\cdot) + \tilde{N}_{\tilde{\beta}} \zeta(\cdot)) \tag{20}$$

называется ***(ненаблюдаемым) выходом*** *для системы* (15) — (18).

Для двух процессов

$$\{y_i(\cdot), z_i(\cdot), \xi_i(\cdot), \zeta_i(\cdot)\}, \quad i = 1, 2, \tag{21}$$

системы (15) — (18) с произвольными параметрами шкалы α, $\tilde{\alpha}$, β, $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}$ определим отклонения следующим образом:

$$\Delta y(\cdot) = y_1(\cdot) - y_2(\cdot), \qquad \xi(\cdot) = \xi_1(\cdot) - \xi_2(\cdot), \tag{22}$$

$$\Delta z(\cdot) = z_1(\cdot) - z_2(\cdot), \qquad \zeta(\cdot) = \zeta_1(\cdot) - \zeta_2(\cdot), \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \Delta s(\cdot, \alpha)^2 &= ||D_\alpha \Delta y(\cdot) + E_\alpha \Delta\xi(\cdot)||^2_{S_\alpha}, \\ \Delta\tilde{s}(\cdot, \tilde{\alpha})^2 &= ||\tilde{D}_{\tilde{\alpha}} \Delta z(\cdot) + \tilde{E}_{\tilde{\alpha}} \Delta\zeta(\cdot)||^2_{\tilde{S}_{\tilde{\alpha}}}, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \Delta r(\cdot, \beta)^2 &= ||M_\beta \Delta y(\cdot) + N_\beta \Delta\xi(\cdot)||^2_{R_\beta}, \\ \Delta\tilde{r}(\cdot, \tilde{\beta})^2 &= ||\tilde{M}_{\tilde{\beta}} \Delta z(\cdot) + \tilde{N}_{\tilde{\beta}} \Delta\zeta(\cdot)||^2_{\tilde{R}_{\tilde{\beta}}}. \end{aligned} \tag{25}$$

Будем понимать бифуркацию системы (15) — (18) как потерю устойчивости на конечном промежутке времени. Опишем ее с помощью введенных выше понятий.

Определение 3 *Пусть* $b > a > 0$ *и* $t_1 > 0$ *— числа. Наблюдение* (19) *является* ***определяющим для бифуркации потери*** $\boldsymbol{(a, b, t_1)}$***-устойчивости по выходу*** (20) *при значении параметра* $q = q^*$*, если существуют непрерывные в окрестности* q^* *вещественнозначные функции* $\alpha(\cdot)$*,* $\tilde{\alpha}(\cdot)$*,* $\beta(\cdot)$*,* $\tilde{\beta}(\cdot)$*, обладающие следующими свойствами:*

(a) *Для* $q = q_1$ *наблюдение* (19) *с* $\alpha = \alpha(q_1)$*,* $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(q_1)$ *будет определяющим для* (a, b, t_1)*-устойчивости по выходу* (20) *с* $\beta = \beta(q_1)$*,* $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(q_1)$*, т.е. существует число* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(q_1) > 0$ *такое, что для любых двух процессов* (21) *и их отклонений* (22) *—* (25)*, для которых выполняется соотношение*

$$\Delta r(0, \beta(q_1))^2 + \Delta\tilde{r}(0, \tilde{\beta}(q_1))^2 < a, \tag{26}$$

из оценки для наблюдения

$$\int_0^{t^*} \left(\Delta s(t, \alpha(q_1))^2 + \Delta \tilde{s}(t, \tilde{\alpha}(q_1))^2\right) dt < \varepsilon_1 \tag{27}$$

для некоторого $t^* \in (0, t_1)$ *следует оценка для выхода*

$$\Delta r(t, \beta(q_1))^2 + \Delta \tilde{r}(t, \tilde{\beta}(q_1))^2 < b, \ \forall t \in (0, t_1). \tag{28}$$

(b) *Для* $q = q_2$ *наблюдение* (19) *с* $\alpha = \alpha(q_2)$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(q_2)$ *будет определяющим для* (a, b, t_1)*-неустойчивости по выходу* (20) *с* $\beta = \beta(q_1)$, $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(q_1)$, *т.е. существует число* $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(q_2) > 0$ *такое, что для любых двух процессов* (21) *и их отклонений* (22) — (25), *для которых выполняется соотношение* (26), *из оценки для наблюдения*

$$\int_0^{t^*} \left(\Delta s(t, \alpha(q_1))^2 + \Delta \tilde{s}(t, \tilde{\alpha}(q_1))^2\right) dt \geq \varepsilon_2 \tag{29}$$

для некоторого $t^* \in (0, t_1)$ *следует оценка для выхода*

$$\Delta r(t^*, \beta(q_1))^2 + \Delta \tilde{r}(t^*, \tilde{\beta}(q_1))^2 \geq b. \tag{30}$$

Данный тип бифуркации может быть связан с существованием почти периодических решений ([6]).

Приведем определение наблюдения, являющегося определяющим для сходимости по выходу.

Определение 4 *Пусть параметр* $q \in Q$ *произволен и* α, $\tilde{\alpha}$, β, $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}$, $a > 0$ — *произвольные числа. Наблюдение* (19) *является* ***определяющим для а-сходимости по выходу*** (20), *если для любых двух процессов* (21) *системы* (15) — (18) *и их отклонений* (22) — (25) *из*

$$\int_t^{t+1} \left(\Delta s(\tau, \alpha)^2 + \Delta \tilde{s}(\tau, \tilde{\alpha})^2\right) d\tau \to 0 \tag{31}$$

при $t \to +\infty$ *следует, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup \left(\Delta r(t, \beta)^2 + \Delta \tilde{r}(t, \tilde{\beta})^2\right) \leq a. \tag{32}$$

В следующем разделе будут приведены достаточные условия для существования определяющих наблюдений для a-сходимости по выходу системы (15) — (18).

4 Частотные условия для существования определяющих наблюдений для сходимости по выходу

Рассмотрим систему (15) — (18) с произвольным, но фиксированным параметром $q \in Q$. Опишем неопределенность нелинейной части. Пусть на $Y_1 \times \Xi$ заданы квадратичные формы $F(\cdot,\cdot,q)$ и $G(\cdot,\cdot,q)$. *Класс нелинейностей* $\mathfrak{N}(F,G)$ для системы (15) — (18) состоит из всех многозначных отображений

$$\phi(\cdot,\cdot,\cdot,q) : \mathbb{R}_+ \times W \times V \to 2^{\Xi}, \tag{33}$$

удовлетворяющих следующему свойству:

(N1) Для любых достаточно больших чисел t_0, T, $0 < t_0 < T$, и для любых пар функций $y_1(\cdot),\ y_2(\cdot) \in L^2(0,T;Y_1)$, $z_1(\cdot),\ z_2(\cdot) \in L^2(0,T;Z_1)$, $\xi_1(\cdot),\ \xi_2(\cdot) \in L^2(0,T;\Xi)$ при наличии условий

$$\xi_i(t) \in \phi(t, C_1(q)y_i(t), C_2(q)z_i(t), q), \qquad i = 1,2, \text{ для п. в. } t \in [t_0,T], \tag{34}$$

$$||C_2(q)z_i(t)||_V \le \Delta_0, \qquad i = 1,2, \text{ для п. в. } t \in [t_0,T], \tag{35}$$

где $\Delta_0 > 0$ — малое число, зависящее от подсистемы (17), (18), выполняется соотношение

$$F(y_1(t) - y_2(t), \xi_1(t) - \xi_2(t)) \ge 0 \qquad \text{для п. в. } t \in [t_0,T]. \tag{36}$$

Кроме этого существуют непрерывная функция $\Phi : W \to \mathbb{R}$ (*обобщенный потенциал*) и числа $\lambda = \lambda(q)$ и $\gamma = \gamma(q)$ такие, что

$$\begin{aligned} &\int_s^t G(y_1(\tau) - y_2(\tau), \xi_1(\tau) - \xi_2(\tau), q)d\tau \ge \\ &\ge \frac{1}{2}\left[\Phi(C_1(q)y_1(t) - C_1(q)y_2(t)) - \Phi(C_1(q)y_1(s) - C_1(q)y_2(s))\right] + \\ &+ \lambda \int_s^t \Phi(C_1(q)y_1(\tau) - C_1(q)y_2(\tau))d\tau \text{ для всех } s,t \in [t_0,T], s \le t, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \Phi(C_1(q)y_1(t) - C_1(q)y_2(t)) \ge \gamma ||C_1(q)y_1(t) - C_1(q)y_2(t)||_W^2 \\ \text{для п. в. } t \in [t_0,T]. \end{aligned} \tag{38}$$

Сделаем несколько дополнительных предположений, позволяющих написать частотную теорему для существования определяющих наблюдений.

Пусть $T > 0$ — произвольное число, $L^2(0,T;Y_j)$, $j = -1,0,1,$ — измеримые пространства с нормами $||y(\cdot)||_{2,j} = (\int_0^T ||y(t)||_j^2 dt)^{1/2}$. Обозначим через $\mathfrak{M}_T$ пространство функций $y(\cdot) \in L^2(0,T;Y_1)$, для которых $\dot{y}(\cdot) \in L^2(0,T;Y_{-1})$, снабженное нормой

$$||y(\cdot)||_{\mathfrak{M}_T} = (||y(\cdot)||^2_{2,1} + ||\dot{y}(\cdot)||^2_{2,-1})^{1/2}. \tag{39}$$

(A1) Существует число $\lambda = \lambda(q) > 0$ такое, что для любого $T > 0$ и любой функции $f \in L^2(0,T;Y_{-1})$ задача

$$\dot{y} = (A_1(q) + \lambda I)y + f(t),\ y(0) = y_0 \tag{40}$$

является корректно поставленной, т. е. для произвольных $f \in L^2(0,T;Y_{-1})$, $y_0 \in Y_0$ существует решение $y(\cdot) \in \mathfrak{M}_T$ задачи (40) в вариационном смысле, оно единственно и непрерывно зависит от исходных данных. Последнее означает, что $||y(\cdot)||^2_{\mathfrak{M}_T} \leq c_1||y_0||^2_0 + c_2||f(\cdot)||^2_{2,-1}$, с некоторыми константами $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$. Более того любое решение задачи $\dot{y} = (A_1(q) + \lambda I)y,\ y(0) = y_0$ экспоненциально убывающее при $t \to +\infty$, т. е. существуют такая константа $c_3 > 0$ и такое число $\varepsilon > 0$, что $||y(\cdot)||_0 \leq c_3 e^{-\varepsilon t}||y_0||_0$, $t > 0$.

(A2) Существует число $\lambda = \lambda(q) > 0$ такое, что оператор $(A_1(q) + \lambda I) \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$ *регулярен*, т. е. для любых $T > 0$, $y_0 \in Y_1$, $z_T \in Y_1$ и $f(\cdot) \in L^2(0,T;Y_0)$ решения прямой задачи

$$\dot{y} = (A_1(q) + \lambda I)y + f(t),\ y(0) = y_0 \tag{41}$$

и соответствующей двойственной задачи

$$\dot{z} = -(A_1(q) + \lambda I)^* z + f(t),\ z(T) = z_T \tag{42}$$

сильно непрерывны по t в норме пространства Y_1. Здесь звездочка применяется для обозначения сопряженного оператора.

(A3) Существуют числа $\lambda = \lambda(q) > 0$, $\delta = \delta(q) > 0$ и $\alpha = \alpha(q)$ такие, что выполняются следующие свойства:

(a)

$$\begin{aligned} &F^c(y,\xi,q) + G^c(y,\xi,q) - \delta||D^c_\alpha y + E^c_\alpha \xi||^2_{S^c_\alpha} \leq 0, \\ &\forall (y,\xi) \in Y^c_1 \times \Xi^c \quad \exists \omega \in \mathbb{R}:\ i\omega y = (A^c_1(q) + \lambda I^c)y + B^c_1(q)\xi; \end{aligned} \tag{43}$$

(b) Функционал $J(y(\cdot),\xi(\cdot)) =$

$$= \int_0^\infty [F^c(y(\tau),\xi(\tau),q) + G^c(y(\tau),\xi(\tau),q) - \delta||D^c_\alpha y(\tau) + E^c_\alpha \xi(\tau)||^2_{S^c_\alpha}]d\tau \tag{44}$$

ограничен сверху на множестве $\mathfrak{M}_{y_0} = \{y(\cdot), \xi(\cdot) : \ \dot{y} = (A_1^c(q) + \lambda I^c)y + B_1^c(q)\xi, \ y(0) = y_0, \ y(\cdot) \in \mathfrak{M}_\infty^c, \ \xi(\cdot) \in L^2(0, \infty; \Xi^c)\}$ для $\forall y_0 \in Y_0^c$.

Здесь F^c, G^c, D_α^c, E_α^c, A_1^c, I^c, B^c, S_α^c, $\mathfrak{M}_\infty^c$, Ξ^c, Y_0^c, Y_1^c обозначают комплексификацию квадратичных форм, линейных операторов и гильбертовых пространств, соответственно.

Приведем без доказательства теорему существования определяющих наблюдений. Близкие утверждения имеются в [10].

Теорема 1 *Пусть существуют такие числа $\lambda = \lambda(q) > 0$, $\delta = \delta(q) > 0$ и $\alpha = \alpha(q)$, что выполнены условия* ***(A1) - (A3)****. Пусть также для любого решения задачи* (15) — (18) *существуют такое время $t_0 > 0$ и число $\Delta_0 > 0$, что выполнено условие* (35) *для любого $T > t_0$. Тогда наблюдение*

$$s(\cdot) = (D_\alpha y(\cdot) + E_\alpha \xi(\cdot), q) \tag{45}$$

будет определяющим для a-сходимости по выходу системы (15) — (18) *относительно выхода*

$$r(\cdot) = w(\cdot) = C_1(q)y(\cdot), \tag{46}$$

где $a > 0$ - некоторое число, зависящее от $\Psi(\cdot, q)$ в (15).

Замечание 1 *Частотное условие* ***(A3)*** *зависит от свойств вложения рассматриваемых соболевских пространств. Например, предположим, что $G \equiv 0$, $E_\alpha = 0$ и $F(y, \xi, q) = q_1||y||_0^2 - q_2||y||_1^2$, где $(y, \xi) \in Y_0 \times \Xi$, а q_1, q_2 — некоторые вещественные константы и $q = (q_1, q_2) \in Q$. Для проверки выполнения условия* (43) *введем частотную характеристику*

$$\chi(i\omega, q) = (i\omega I^c - A_\lambda^c(q))^{-1} B^c(q) \tag{47}$$

для $\omega \in \mathbb{R}$ таких, что $i\omega \in \rho(A_\lambda^c(q))$, где $A_\lambda^c(q) = A^c(q) + \lambda I^c$. Частотное условие (43) *будет выполнено, если*

$$\begin{gathered} q_1||\chi(i\omega, q)\xi||_{Y_0^c}^2 - q_2||\chi(i\omega, q)\xi||_{Y_1^c}^2 - \delta||D_\alpha^c \chi(i\omega, q)\xi||_{S_\alpha^c}^2 \le 0 \\ \forall \xi \in \Xi^c, \ \forall \omega \in \mathbb{R} : \ i\omega \in \rho(A_\lambda^c(q)). \end{gathered} \tag{48}$$

Пусть вложение $Y_1^c \subset Y_0^c \subset Y_{-1}^c$ и свойства оператора D_α^c позволяют сделать априорную оценку

$$||v||_{Y_0^c}^2 \le c_1||v||_{Y_1^c}^2 + c_2\varepsilon_{D_\alpha^c}||D_\alpha^c v||_{S_\alpha^c}^2, \quad \forall v \in Y_1^c, \tag{49}$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *— некоторые константы, а*

$$\varepsilon_{D^c_\alpha} = \varepsilon_{D^c_\alpha}(Y^c_1, Y^c_0) = \sup\{||w||_{Y^c_0} : \ w \in Y^c_1, \ D^c_\alpha w = 0, \ ||w||_{Y^c_1} \leq 1\} \tag{50}$$

есть дефект полноты оператора наблюдения D^c_α *относительно вложения* $Y^c_1 \subset Y^c_0$. *Из выражения* (49) *следует, что частотное условие будет выполнено, если*

$$\begin{aligned} q_1c_1||\chi(i\omega, q)\xi||^2_{Y^c_1} - q_2||\chi(i\omega, q)\xi||^2_{Y^c_1} + q_1c_2\varepsilon_{D^c_\alpha}||D^c_\alpha\chi(i\omega, q)\xi||^2_{S^c_\alpha} - \\ -\delta||D^c_\alpha\chi(i\omega, q)\xi||^2_{S^c_\alpha} \leq 0, \quad \forall\xi \in \Xi^c, \ \forall\omega \in \mathbb{R} : \ i\omega \in \rho(A^c_\lambda(q)). \end{aligned} \tag{51}$$

Для этого достаточно, чтобы

$$q_1c_1 - q_2 \leq 0 \quad \text{ и } \quad q_1c_2\varepsilon_{D^c_\alpha} - \delta \leq 0. \tag{52}$$

Неравенства (52) *описывают подмножество в пространстве параметров вариационного неравенства и оператора наблюдения (см. также [5]). При достаточно малом* $\varepsilon_{D^c_\alpha}$ *второе из неравенств* (52) *будет всегда выполнено. Предположим, что оператор наблюдения задан следующим образом:* $D_\alpha y = (l_1(y), ..., l_k(y))$, *где* $l_j : Y_1 \to \mathbb{R}$, $j = 1, ..., k$, *— линейные непрерывные функционалы;* $Y_1 = W^{s,2}(\Omega)$, $Y_0 = W^{\sigma,2}(\Omega)$, *где* $s > \sigma$. *Тогда* $\varepsilon_{D^c_\alpha} \approx c_1(c_2/k)^{s-\sigma}$, *т .е. дефект полноты оператора наблюдения* D^c_α *зависит от свойств гладкости вложения* $Y^c_1 \subset Y^c_0$.

5 Частотные условия для устойчивости по наблюдениям

Рассмотрим гибридную систему (15) — (18) при $\Psi \equiv 0$ как вариационное уравнение первого порядка с многозначной нелинейностью. Для этого определим новые переменные:

$$\mathbf{y} = (y, z), \ \mathbf{w} = (w, v), \ \boldsymbol{\xi} = (\xi, \zeta), \ \boldsymbol{\eta} = (\eta, \nu), \tag{53}$$

новые пространства:

$$\mathcal{Y}_j = Y_j \times Z_j, \ j = -1, 0, 1, \ \mathcal{W} = W \times V, \ \mathcal{U} = \Xi \times \Sigma, \tag{54}$$

операторные матрицы, зависящие от параметра:

$$\mathcal{A}(q) = \begin{pmatrix} A_1(q) & 0 \\ 0 & A_2(q) \end{pmatrix}, \ \mathcal{B}(q) = \begin{pmatrix} B_1(q) \\ B_2(q) \end{pmatrix}, \ \mathcal{C}(q) = \begin{pmatrix} C_1(q) & C_2(q) \end{pmatrix}, \tag{55}$$

нелинейное многозначное отображение:

$$\boldsymbol{\phi} = (\phi(\cdot,\cdot,\cdot,q),\ g(\cdot,\cdot,\cdot,q)) :\ \mathbb{R}_+ \times \mathcal{W} \to 2^{\Xi} \times \Sigma. \tag{56}$$

Теперь можно переписать систему (15) — (18) в виде уравнения первого порядка с многозначной нелинейностью в пространстве $\mathcal{Y}_{-1}$ следующим образом:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{A}(q)\mathbf{y} + \mathcal{B}(q)\boldsymbol{\xi}, \tag{57}$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathcal{C}(q)\mathbf{y},\ \boldsymbol{\xi}(t) \in \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{w}(t), q). \tag{58}$$

Тогда шкалы пространств наблюдений и пространств выходов для задачи (57), (58) примут вид:

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha}} = S_\alpha \times \tilde{S}_{\tilde{\alpha}},\ \mathcal{R}_{\boldsymbol{\beta}} = R_\beta \times \tilde{R}_{\tilde{\beta}},\ \boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{\beta} = (\beta, \tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^2, \tag{59}$$

а шкалы операторов наблюдений и выходов запишутся так:

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} D_\alpha & 0 \\ 0 & \tilde{D}_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix},\ \mathcal{E}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} E_\alpha & 0 \\ 0 & \tilde{E}_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{M}_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} M_\beta & 0 \\ 0 & \tilde{M}_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix},\ \mathcal{N}_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} N_\beta & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{60}$$

Ясно, что эти шкалы определяют линейные ограниченные операторы

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}_1, \mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha}}),\ \mathcal{E}_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{S}_{\boldsymbol{\alpha}}), \\ \mathcal{M}_{\boldsymbol{\beta}} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}_1, \mathcal{R}_{\boldsymbol{\beta}}),\ \mathcal{N}_{\boldsymbol{\beta}} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{R}_{\boldsymbol{\beta}}),\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^2. \end{gathered} \tag{61}$$

Если $\{\mathbf{y}(\cdot), \boldsymbol{\xi}(\cdot)\}$ — процесс вариационного уравнения (57), (58), $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^2$ — произвольные параметры шкалы, то функции наблюдения и выхода данного уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{s}(\cdot, \boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{y}(\cdot) + \mathcal{E}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\xi}(\cdot),\ \mathbf{r}(\cdot, \boldsymbol{\beta}) = \mathcal{M}_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{y}(\cdot) + \mathcal{N}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\xi}(\cdot). \tag{62}$$

Приведем определение класса нелинейностей для нашей задачи, записанной в новых обозначениях (57) — (62).

Определение 5 ***Класс нелинейностей*** $\mathfrak{N}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *для вариационного уравнения* (57), (58), *определенный с помощью квадратичных форм* $\mathcal{F}(\cdot,\cdot,q)$ *и* $\mathcal{G}(\cdot,\cdot,q)$ *на* $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{U} \times Q$, *состоит из всех отображений* (56), *для которых выполнены следующие условия:*

Для любого числа $T > 0$ и любых двух функций $\mathbf{y}(\cdot) \in L^2(0,T;\mathcal{Y}_1)$ и $\boldsymbol{\xi}(\cdot) \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ таких, что

$$\boldsymbol{\xi}(t) \in \boldsymbol{\phi}(t, \mathcal{C}(q)\mathbf{y}(t), q) \quad \textit{для п. в. } t \in [0,T], \tag{63}$$

будет выполнено неравенство

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}(t), \boldsymbol{\xi}(t), q) \geq 0 \quad \textit{для п. в. } t \in [0,T], \tag{64}$$

и существует непрерывная функция $\Phi : \mathcal{Y}_1 \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\int_s^t \mathcal{G}(\mathbf{y}(\tau), \boldsymbol{\xi}(\tau), q) \geq \Phi(\mathcal{C}(q)\mathbf{y}(t)) - \Phi(\mathcal{C}(q)\mathbf{y}(s)) \ \textit{для всех } 0 \leq s < t \leq T. \tag{65}$$

Далее нам потребуются дополнительные предположения относительно вариационного уравнения (57), (58) для всех $q \in Q$.

(A4) Оператор $\mathcal{A}(q) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_{-1})$ регулярен, т. е. для любых $T > 0$, $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{Y}_1$, $\boldsymbol{\Psi}_T \in \mathcal{Y}_1$ и $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathcal{Y}_0)$ решения прямой задачи

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{A}(q)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{для п. в. } t \in [0,T] \tag{66}$$

и двойственной задачи

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}} = -\mathcal{A}^*(q)\boldsymbol{\Psi} + \mathbf{f}(t), \ \boldsymbol{\Psi}(T) = \boldsymbol{\Psi}_T \quad \text{для п. в. } t \in [0,T] \tag{67}$$

сильно непрерывны по t в норме пространства $\mathcal{Y}_1$.

(A5) Пара $(\mathcal{A}(q), \mathcal{B}(q))$ L^2-управляема, т. е. для любого $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{Y}_0$ существует управление $\boldsymbol{\xi}(\cdot) \in L^2(0,\infty;\mathcal{U})$ такое, что задача

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{A}(q)\mathbf{y} + \mathcal{B}(q)\boldsymbol{\xi}, \ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{68}$$

является корректно поставленной на промежутке $[0, +\infty)$.

Определение 6 *Вариационное уравнение* (57), (58) *называется* ***абсолютно дихотомичным*** *в классе $\mathfrak{N}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ относительно выхода $\mathbf{r}(\cdot, \boldsymbol{\beta})$, определенного по формуле* (62)*, если для любого процесса $\{\mathbf{y}(\cdot), \boldsymbol{\xi}(\cdot)\}$ этого вариационного уравнения при $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, $\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0$ верно следующее утверждение: Либо функция $\mathbf{y}(\cdot)$ не ограничена на промежутке $[0, \infty)$ в норме пространства $\mathcal{Y}_0$, либо она ограничена в пространстве $\mathcal{Y}_0$ по этой норме и существуют константы c_1 и c_2 (которые зависят только от $\mathcal{A}(q)$, $\mathcal{B}(q)$ и $\mathfrak{N}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$) такие, что*

$$||\mathcal{M}_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{y}(\cdot) + \mathcal{N}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\xi}(\cdot)||^2_{\mathcal{R}_{\boldsymbol{\beta}}} \leq c_1(||\mathbf{y}_0||^2_{\mathcal{Y}_0} + c_2). \tag{69}$$

Теорема 2 *Предположим, что* $\boldsymbol{\phi} \in \mathfrak{N}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *и что для операторов* $\mathcal{A}(q)$ *и* $\mathcal{B}(q)$ *выполнены условия* ***(A4)*** *и* ***(A5)****. Пусть существует число* $\mu > 0$ *такое, что выполнено частотное условие*

$$\begin{gathered} \mathcal{F}^c(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, q) + \mathcal{G}^c(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, q) - \mu||\mathcal{M}^c_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{y} + \mathcal{N}^c_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\xi}||^2_{\mathcal{R}^c_{\boldsymbol{\beta}}} \leq 0, \\ \forall(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{Y}^c_1 \times \mathcal{U}^c \ \exists\omega \in \mathbb{R}: \ i\omega\mathbf{y} = \mathcal{A}^c(q)\mathbf{y} + \mathcal{B}^c(q)\boldsymbol{\xi}, \end{gathered} \tag{70}$$

и функционал

$$\begin{aligned} J(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, q) = \int_0^\infty \big(\mathcal{F}^c(\mathbf{y}(\tau), \boldsymbol{\xi}(\tau), q) + \mathcal{G}^c(\mathbf{y}(\tau), \boldsymbol{\xi}(\tau), q) - \\ -\mu||\mathcal{M}^c_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{y}(\tau) + \mathcal{N}^c_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\xi}(\tau)||^2_{\mathcal{R}^c_{\boldsymbol{\beta}}}\big)d\tau \end{aligned} \tag{71}$$

ограничен сверху на множестве $\mathfrak{M}_{\mathbf{y}_0} = \{\mathbf{y}(\cdot), \boldsymbol{\xi}(\cdot) : \dot{\mathbf{y}} = \mathcal{A}(q)\mathbf{y} + \mathcal{B}(q)\boldsymbol{\xi}, \ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \ \mathbf{y}(\cdot) \in \mathfrak{M}^c_\infty, \ \boldsymbol{\xi}(\cdot) \in L^2(0, \infty; \mathcal{U}^c)\}$ *для любого* $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{Y}^c_0$*. Предположим также, что любой обобщенный потенциал* Φ *из класса нелинейностей* $\mathfrak{N}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *неотрицателен, и что существует константа* $c > 0$ *такая, что*

$$\Phi(\mathcal{C}(q)\mathbf{y}) \leq c||\mathbf{y}||^2_{\mathcal{Y}_0}, \quad \forall\mathbf{y} \in \mathcal{Y}_0. \tag{72}$$

Тогда вариационное уравнение (57), (58) *абсолютно дихотомично в классе* $\mathfrak{N}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *относительно выхода* $\mathbf{r}(\cdot, \boldsymbol{\beta})$*, определенного по формуле* (62).

Доказательство Приведем схему доказательства теоремы 2. Эрмитова форма $\mathcal{F}^c + \mathcal{G}^c$, частотные условия и предположения теоремы позволяют доказать, что существуют самосопряженный (вещественный) оператор $P = P^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}_{-1}, \mathcal{Y}_0) \cap \mathcal{L}(\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1)$ и число $\mu > 0$ такие, что ([10])

$$\begin{aligned} (-\mathcal{A}\mathbf{y} - \mathcal{B}\boldsymbol{\xi}, P\mathbf{y})_{-1,1} \geq \mathcal{F}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, q) + \mathcal{G}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, q) + \mu||\mathcal{M}_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{y} + \mathcal{N}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\xi}||^2_{\mathcal{R}_{\boldsymbol{\beta}}}, \\ \forall(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{73}$$

Применяя данное неравенство к задаче (57), (58), записанной в виде (15) — (18), с процессом $\{\mathbf{y}(\cdot), \boldsymbol{\xi}(\cdot)\}$ и тестовой функцией $P\boldsymbol{\eta}(t) = -P\mathbf{y}(t) + \mathbf{y}(t)$, получим следующее неравенство

$$\begin{aligned} (\dot{\boldsymbol{y}}(t), P\mathbf{y}(t))_{-1,1} + \mathcal{F}(\mathbf{y}(t), \boldsymbol{\xi}(t), q) + \mathcal{G}(\mathbf{y}(t), \boldsymbol{\xi}(t), q) + \Psi(\mathbf{y}(t), q) - \\ -\Psi(-P\mathbf{y}(t) + \mathbf{y}(t), q) + \mu||\mathcal{M}_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{y}(t) + \mathcal{N}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\xi}(t)||^2_{\mathcal{R}_{\boldsymbol{\beta}}} \leq 0, \text{ п. в. } t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{74}$$

Теперь проинтегрируем неравенство (74) на произвольном промежутке $0 \leq s < t$ с учетом условия (65). Введем функционал Ляпунова $\mathbf{V}(\mathbf{y}) := (\mathbf{y}, P\mathbf{y})_0$, где $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}_0$, и получим неравенство

$$\begin{gathered}\mathbf{V}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{V}(\mathbf{y}(s)) + \Phi(\mathcal{C}(q)\mathbf{y}(t)) - \Phi(\mathcal{C}(q)\mathbf{y}(s)) + \\ + \int_s^t \mathcal{F}(\mathbf{y}(\tau), \boldsymbol{\xi}(\tau), q)d\tau + \int_s^t (\Psi(\mathbf{y}(\tau), q) - \Psi(-P\mathbf{y}(\tau) + \mathbf{y}(\tau), q))d\tau + \\ + \mu \int_s^t ||\mathcal{M}_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{y}(\tau) + \mathcal{N}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\xi}(\tau)||^2_{\mathcal{R}_{\boldsymbol{\beta}}} d\tau \leq 0 \quad \text{для любых} \quad 0 \leq s < t.\end{gathered} \tag{75}$$

В силу теоремы Соболева о вложении можно считать, что функция $\mathbf{y}(t)$ непрерывна. Определим новую функцию для $t > 0$:

$$\begin{gathered}\mathbf{W}(t) := \mathbf{V}(\mathbf{y}(t)) + \Phi(\mathcal{C}(q)\mathbf{y}(t)) + \int_0^t \mathcal{F}(\mathbf{y}(\tau), \boldsymbol{\xi}(\tau), q)d\tau + \\ + \int_0^t (\Psi(\mathbf{y}(\tau), q) - \Psi(-P\mathbf{y}(\tau) + \mathbf{y}(\tau), q))d\tau.\end{gathered} \tag{76}$$

Из выражения (75) следует, что для любых $0 \leq s < t$ функция $\mathbf{W}(\cdot)$ монотонно убывающая:

$$\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s) \leq -\mu \int_s^t ||\mathcal{M}_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{y}(\tau) + \mathcal{N}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\xi}(\tau)||^2_{\mathcal{R}_{\boldsymbol{\beta}}} d\tau \leq 0. \tag{77}$$

Рассмотрим два случая. В первом случае предполагаем, что функция $\mathbf{y}(\cdot)$ ограничена в $\mathcal{Y}_0$ на $[0, \infty)$, тогда $\mathbf{W}(\cdot)$ ограничена снизу и существует ее предел при $t \to +\infty$. Следовательно, верна оценка для любого $t > 0$:

$$\mu \int_0^t ||\mathcal{M}_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{y}(\tau) + \mathcal{N}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\xi}(\tau)||^2_{\mathcal{R}_{\boldsymbol{\beta}}} d\tau \leq \mathbf{W}(0) - \lim_{t \to +\infty} \mathbf{W}(t) \leq c||\mathbf{y}_0||^2_{\mathcal{Y}_0} + \tilde{c}, \tag{78}$$

где $c > 0$, $\tilde{c} > 0$ — константы. Во втором случае предполагаем, что $\mathbf{W}(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$, тогда $\mathbf{V}(\mathbf{y}(t)) \to -\infty$ при $t \to +\infty$, т. к. остальные члены формулы (76) ограничены снизу. Следовательно, $||\mathbf{y}(t)||_{\mathcal{Y}_0} \to \infty$.

■

Построение определяющих наблюдений проводится на основе подхода [9], [10]. Примеры дихотомичных вариационных уравнений можно найти в этих же статьях.

Список литературы

[1] Andrews K. T., Kuttler K. L., Shillor M. On the dynamic behaviour of a thermoviscoelastic body in frictional contact with a rigid obstacle. *Euro. Jnl. Appl. Math.*, 1997, vol. 8, pp. 417–436.

[2] Duvant G., Lions J.-L. *Inequalities in mechanics and physics*. Berlin, Springer-Verlag, 1976, 397 p.

[3] Ermakov I. V., Kalinin Yu. N., Reitmann V. Determining modes and almost periodic integrals for cocycles. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 13, pp. 1837–1852.

[4] Kalinichenko D., Reitmann V. Bifurcation on a finite time interval in nonlinear hyperbolic-parabolic parameter dependent control systems. Proc. The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madrid, 2014, p. 211.

[5] Kalinichenko D., Reitmann V., Skopinov S. Asymptotic behavior of solutions to a coupled system of Maxwell's equations and a controlled differential inclusion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Supplement*, 2013, pp. 407–414.

[6] Reitmann V. Frequency domain conditions for the existence of almost periodic solutions in evolutionary variational inequalities. *Stochastics and Dynamics*, 2004, vol. 4, pp. 483–499.

[7] Березанский, Ю. М, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Киев, Наук. думка, 1965, 799 с.

[8] Ермаков, И. В., Райтманн, Ф., Определяющие функционалы для системы микроволнового нагрева, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат., мех., астрон.*, 2012, вып. 4, с. 13–17.

[9] Лихтарников, А. Л., Якубович, В. А., Дихотомия и устойчивость неопределенных нелинейных систем в гильбертовых пространствах, *Алгебра и анализ*, 1997, том 9, вып. 6, с. 132–155.

[10] Лихтарников, А. Л., Якубович, В. А., Частотная теорема для уравнений эволюционного типа, *Сиб. мат. журн.*, 1976, том 17, вып. 5, с. 1069–1085.

[11] Панков, А. А., *Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений*, Киев, Наук. думка, 1985, 182 с.