ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2005
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Динамические системы на многообразиях

СЛАБЫЕ ОБРАТНЫЕ СВОЙСТВА ОТСЛЕЖИВАНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ.

А.Б.Катина Россия, 198504, Санкт-Петербург, Библиотечная пл., д. 2,
Санкт-Петербургский Государственный Университет,
Математико-механический факультет,
e-mail: katina@severen.net

Аннотация.

Рассматриваются первое и второе слабые обратные свойства отслеживания в нелинейных динамических системах. Получены достаточные условия, при которых диффеоморфизм гладкого многообразия обладает первым слабым обратным свойством отслеживания. Показано, что C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, обладающих первым слабым обратным свойством отслеживания, совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов.

1 Введение. Формулировки основных результатов.

Теория отслеживания приближенных траекторий (псевдотраекторий) в динамических системах изучает вопрос о том, насколько близки псевдотраектории и точные траектории на бесконечных временных промежутках. Этот вопрос важен как с точки зрения приложений (как правило, рассматриваются псевдотраектории, порожденные компьютерным моделированием системы), так и с точки зрения качественной теории динамических систем (наличие тех или иных свойств отслеживания можно трактовать как ослабленную структурную устойчивость). Современное состояние теории отслеживания отражено в монографиях [1, 2].

В данной работе мы изучаем некоторые новые свойства отслеживания. Пусть (M, dist) – метрическое пространство и пусть $f : M \to M$ – гомеоморфизм. Будем обозначать через

$$O(x, f) = \left\{ f^k(x) : k \in \mathbf{Z} \right\}$$

траекторию точки x в динамической системы, порожденной гомеоморфизмом f, и через $N(a, A)$ a-окрестность множества $A \subset M$.

Последовательность

$$\xi = \{x_k \in M : k \in \mathbf{Z}\} \tag{1}$$

назовем d-псевдотраекторией, если выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}\left(f(x_k),\ x_{k+1}\right) < d,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Будем говорить, что динамическая система обладает свойством отслеживания, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории ξ вида (1) найдется такая точка $p \in M$, что выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}\left(f^k(p), x_k\right) < d, k \in \mathbf{Z}. \tag{3}$$

В работах [3, 4] введены следующие определения. Будем говорить, что динамическая система обладает первым (вторым) слабым свойством отслеживания, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории вида (1) найдется такая точка $p \in M$, что выполнено включение

$$\xi \subset N(\varepsilon, O(p, f)) \tag{4}$$

или, соответственно, включение

$$O(p, f) \subset N(\varepsilon, \xi). \tag{5}$$

В работе [3] впервые было введено понятие обратного отслеживания. В отличие от обычного свойства отслеживания, введенного выше, задача об обратном отслеживании формулируется так: фиксируются точная траектория $O(p, f)$ и некоторый метод, порождающий псевдотраектории, и ищутся псевдотраектории, близкие к $O(p, f)$.

Различные авторы, развивавшие результаты работы [3], относящиеся к обратному отслеживанию, рассматривали разнообразные классы методов, порождающих псевдотраектории (см., например, [5, 6]). В данной работе мы ограничимся одним классом методов.

Будем называть непрерывным d-методом последовательность

$$\Psi = \{\psi_k, k \in \mathbf{Z}\}\,, \tag{6}$$

где ψ_k - непрерывные отображения пространства M, удовлетворяющие неравенствам

$$\sup_{x \in M, k \in \mathbf{Z}} \operatorname{dist}\left(\psi_k\left(x\right), f\left(x\right)\right) < d. \tag{7}$$

Будем говорить, что последовательность вида (1) порождается непрерывным d-методом вида (6), если

$$x_{k+1} = \psi\left(x_k\right), k \in \mathbf{Z}.$$

Изучение слабых обратных свойств отслеживания начато в работе [7]. Будем говорить, что динамическая система обладает первым (вторым) слабым обратным свойством отслеживания относительно класса непрерывных методов, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $d > 0$, что для любой точки $p \in M$ и любого непрерывного d-метода Ψ вида (6) найдется такая псевдотраектория вида (1), порождаемая методом Ψ, что выполнено включение (4) (соответственно, включение (5)). Для краткости будем обозначать аббревиатурой 1WISP (1st weak inverse shadowing property) первое слабое обратное свойство отслеживания относительно класса непрерывных методов и аббревиатурой 2WISP (2nd weak inverse shadowing property) второе слабое обратное свойство отслеживания относительно класса непрерывных методов.

Будем говорить, что динамическая система обладает обратным свойством отслеживания относительно класса непрерывных методов [6], если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $d > 0$, что для любой точки $p \in M$ и любого непрерывного d-метода Ψ вида (6) найдется такая псевдотраектория вида (1), порождаемая методом Ψ, что выполнено неравенство (3).

В [7] получены необходимые и достаточные условия, при которых линейный диффеоморфизм

$$f\left(z\right) = Az, z \in \mathbf{C}^n, \tag{8}$$

обладает свойствами 1WISP и 2WISP. Отметим, что класс диффеоморфизмов вида (8), обладающих 2WISP, не совпадает с классом линейных диффеоморфизмов, обладающих вторым слабым свойством отслеживания (этот класс изучен в [4]). В то же время, необходимые и достаточные условия, при которых диффеоморфизм (8) обладает 1WISP и первым слабым свойством отслеживания, совпадают – наличие каждого из этих свойств равносильно гиперболичности матрицы A.

В данной работе мы изучаем слабые обратные свойства отслеживания для нелинейных систем.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Если пространство (M, dist) компактно, то любой гомеоморфизм $f : M \to M$ обладает 2WISP.

Отметим, что Теорема 1 является аналогом Теоремы 1.3 из работы [3], доказанной не для псевдотраекторий, а для их односторонних аналогов. Мы приводим доказательство Теоремы 1 для полноты.

Для формулировки следующего утверждения нам понадобится следующее определение. Будем предполагать, что M – гладкое многообразие с римановой метрикой dist. Будем обозначать через T_xM касательное пространство к M в точке x, а через

$$Df : T_xM \to T_{f(x)}M$$

дифференциал диффеоморфизма f. Для вектора $v \in T_xM$ будем обозначать через $|v|$ его норму, индуцированную римановой метрикой dist.

Фиксируем числа $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$. Будем говорить, что траектория точки $p \in M$ обладает (C,λ)-структурой, если для каждой точки $p_k = f^k(p), k \in \mathbf{Z}$, определены такие проекторы $P(p_k)$ и $Q(p_k)$ касательного пространства $T_{p_k}M$, что если

$$S(p_k) = P(p_k)\,T_{p_k}M,\ U(p_k) = Q(p_k)\,T_{p_k}M,$$

то

(1) $S(p_k) \oplus U(p_k) = T_{p_k}M$;

(2) $Df(p_k)\,S(p_k) \subset S(p_{k+1}), k \in \mathbf{Z}$;
$Df^{-1}(p_k)\,U(p_k) \subset U(p_{k-1}), k \in \mathbf{Z}$;

(3) выполнены неравенства
$|Df^m(p_k)| \le C\lambda^m |v|, v \in S(p_k), m \ge 0;$
$|Df^m(p_k)| \le C\lambda^{-m} |v|, v \in U(p_k), m \le 0;$

(4) $\|P(p_k)\|, \|Q(p_k)\| \le C$, где $\|\cdot\|$ – операторная норма.

Хорошо известно (см., например,[1]), что если f – структурно устойчивый диффеоморфизм гладкого замкнутого (то есть компактного и без края) многообразия M, то существуют такие числа $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$, что траектория любой точки $p \in M$ обладает (C,λ)-структурой.

В следующем утверждении мы получаем достаточные условия, при которых дифеоморфизм f гладкого многообразия M обладает свойством 1WISP (на самом деле оказывается, что при этих условиях диффеоморфизм f обладает липшицевым вариантом 1WISP). Эти условия охватывают случаи как компактного, так и некомпактного многообразия M (для избежания несущественных технических трудностей в некомпактном случае мы ограничимся рассмотрением евклидова многообразия $\mathbf{R}^m$).

Теорема 2. Пусть f – диффеоморфизм класса C^1 гладкого многообразия M (где M либо замкнутое многообразие, либо евклидово пространство $\mathbf{R}^m$). Предположим, что существуют константы $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$ со следующим свойством : для любой точки $p \in M$ либо ее ω-предельное множество $\omega(p,f)$ либо α-предельное множество $\alpha(p,f)$ содержит точку q, траектория которой обладает (C,λ)-структурой. В том случае, когда $M = \mathbf{R}^m$, предположим дополнительно, что существует такое число $r > 0$, что для любой точки $x \in M$ выполнено неравенство

$$|f(x+v) - f(x) - Df(x)v| \le \frac{1}{2L}|v| \tag{9}$$

при $|v| \le r$, где

$$L = C^2 \frac{1+\lambda}{1-\lambda}. \tag{10}$$

Тогда f обладает липшицевым вариантом свойства 1WISP, а именно: существует такое число $d_0 > 0$, что для любой точки $p \in M$ и для любого непрерывного d-метода Ψ вида (6) с $d \le d_0$ найдется такая псевдотраектория ξ вида (1), порожденная методом Ψ, что выполнено включение

$$\xi \subset N(4(L+1)d, O(p,f)), \tag{11}$$

где число L задано формулой (10).

Предположим, что f – Ω-устойчивый диффеоморфизм замкнутого многообразия M. Хорошо известно (см., например, ([8]), что в этом случае любая траектория $\left\{f^k(p)\right\}$ стремится при $|k| \to \infty$ к гиперболическому базисному множеству диффеоморфизма f. Так как базисных множеств конечное число, существуют такие числа $C > 0$ и $\lambda \in (0, 1)$, что траектория любой неблуждающей точки q диффеоморфизма f обладает (C, λ) - структурой.

Таким образом, из Теоремы 2 вытекает следующее утверждение.
Следствие. Если диффеоморфизм f гладкого замкнутого многообразия M Ω-устойчив, то он обладает липшицевым вариантом свойства 1WISP.

Обозначим через $\mathrm{Diff}^1(M)$ пространство диффеоморфизмов класса C^1 замкнутого многообразия M с C^1-топологией (см., например, [8]). Пусть R – некоторое свойство диффеоморфизмов. Будем обозначать через $\mathrm{Int}^1(R)$ C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, обладающих свойством R.

Теорема 3. Любой диффеоморфизм из множества $\mathrm{Int}^1(1\mathrm{WISP})$ Ω-устойчив.

Так как множество Ω-устойчивых диффеоморфизмов открыто в $\mathrm{Diff}^1(M)$, из приведенного выше следствия Теоремы 2 и из Теоремы 3 следует, что множество $\mathrm{Int}^1(1\mathrm{WISP})$ совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов.

Отметим, что так как любой диффеоморфизм замкнутого многообразия M обладает свойством 2WISP (см. Теорему 1), то выполнено равенство

$$\mathrm{Int}^1(2\mathrm{WISP}) = \mathrm{Diff}^1(M).$$

2 Доказательства.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как пространство M компактно, найдется его конечное покрытие

$$\{U_i : i \in K\}$$

открытыми множествами, для которых

$$\mathrm{diam}\, U_i < \varepsilon,\ i \in K.$$

Обозначим через K^* множество всех подмножеств индексного множества K. Так как множество K конечно, множество K^* также конечно. Фиксируем точку $p \in M$ и сопоставим ей подмножество $L(p)$ множества K^*, определяемое условиями:

$$O(p,f) \subset \bigcup_{i \in L(p)} U_i$$

и

$$O(p,f) \bigcap U_i \neq \varnothing, \; i \in L(p).$$

Пусть

$$L(p) = \{i_1, \dots, i_m\}.$$

Из второго условия в определении множества $L(p)$ следует, что для любого $j \in \{1, \dots, m\}$ найдется такое $k_j \in \mathbf{Z}$, что

$$f^{k_j}(p) \in U_{i_j}.$$

Так как множество U_{i_j} открыто, найдется такое число d_j, что если

$$\xi = \{x_k : k \in \mathbf{Z}\}$$

псевдотраектория, порожденная непрерывным d_j-методом Ψ вида (6) и такая, что $x_0 = p$, то

$$x_{k_j} \in U_{i_j}.$$

Положим

$$\delta(p) = \min_{j \in \{1, \dots, m\}} d_j.$$

Ясно, что $\delta(p) > 0$.

Так как множество K^* конечно, множество определенных выше множеств $L(p)$ также конечно. Фиксируем для каждого из таких множеств "порождающую" его точку p. Пусть

$$P = \{p_1, \dots, p_N\} -$$

полный набор таких "порождающих" точек, соответствующих всевозможным различным множествам $L(p)$.

Положим

$$d = \min_{l=1,\dots,N} \delta(p_l)$$

и покажем, что d искомое.

Фиксируем произвольную траекторию $O(q, f)$ системы f. Найдется такой индекс $l \in \{1, \dots, N\}$, что

$$L(q) = L(p_l).$$

Пусть Ψ – непрерывный d-метод вида (6). Рассмотрим такую псевдотраекторию ξ, порожденную методом Ψ, что $x_0 = p_l$. Из нашего выбора числа d следует, что псевдотраектория ξ пересекает каждое из множеств U_j, $j \in L(p)$. В этом случае

$$O(q, f) \subset \bigcup_{j \in L(p_l)} U_j \subset N(\varepsilon, \xi),$$

что и доказывает Теорему 1.

2.2. Доказательство Теоремы 2.

Доказательству Теоремы 2 предпошлем вспомогательное утверждение.
Лемма 1. Пусть диффеоморфизм f удовлетворяет условиям Теоремы 2. Предположим, что траектория точки $q \in M$ обладает (C, λ)-структурой. Тогда существует такое число $d_0 > 0$, что для любого непрерывного d-метода Ψ вида (6) с $d \le d_0$ найдется такая псевдотраектория ξ вида (1), порождаемая методом Ψ, что выполнено включение

$$\xi \subset N(4Ld, O(q, f)), \tag{12}$$

где число L задано формулой (10).
Доказательство.

Доказательство этого утверждения использует метод, предложенный для доказательства Теоремы 1.1 в [6]. Рассмотрим вначале случай диффеоморфизма

$$f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m.$$

Пусть $q_k = f^k(q)$, $q \in \mathbf{Z}$. Рассмотрим непрерывный d-метод $\Psi = \{\psi_k\}$, где

$$\psi_k : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$$

– непрерывные отображения.
Будем искать псевдотраекторию $\xi = \{x_k : k \in \mathbf{Z}\}$ в виде

$$x_k = q_k + v_k.$$

Для последовательности $V = \{v_k\}$ должны выполняться равенства

$$\psi_k(x_k) = x_{k+1},$$

равносильные равенствам

$$\psi_k(q_k + v_k) = q_{k+1} + v_{k+1}. \tag{13}$$

Представим

$$f(q_k + v_k) = f(q_k) + Df(q_k)\,v_k + R_k(v_k)$$

и перепишем равенства (13) так:

$$v_{k+1} = Df(q_k)\,v_k + R_k(v_k) + R_k^*(v_k)\,, \tag{14}$$

где

$$R_k^*(v_k) = \psi(q_k + v_k) - f(q_k + v_k)\,.$$

Отметим, что R_k и R_k^* непрерывны,

$$|R_k^*(v)| < d,\ R_k(0) = 0,\ |R_k(v)| \le \frac{1}{2L}|v|$$

при $|v| \le r$.

Рассуждения, проведенные при доказательстве Теоремы 1.1 в [6], показывают, что если

$$d \le d_0 = \frac{r}{2L},$$

то уравнения (14) (а, следовательно, и уравнения (13)) имеют решения $\{v_k\}$ с $\sup\limits_{k \in \mathbf{Z}} |v_k| \le 2Ld$. Это и доказывает Лемму 1 для случая $M = \mathbf{R}^m$. В случае гладкого замкнутого многообразия M доказательство Леммы 1 повторяет доказательство Теоремы 1.1 в [6] практически дословно.

Докажем теперь Теорему 2.

Пусть d_0 - число, существование которого установлено в Лемме 1. Фиксируем $d \le d_0$, точку $p \in M$ и непрерывный d-метод Ψ вида (6). По условию Теоремы 2 одно из множеств $\omega(p, f)$ или $\alpha(p, f)$ содержит точку q, траектория которой обладает (C, λ) - структурой. Пусть для определенности такая точка q есть в множестве $\omega(p, f)$ (случай $q \in \alpha(p, f)$ рассматривается аналогично). Применив Лемму 1, найдем псевдотраекторию ξ, порожденную методом Ψ,

для которой выполнено включение (13).
Пусть x_k - произвольная точка псевдотраектории ξ. Так как выполнено включение (13), существует такая точка $q_m \in O(q,f)$, что

$$\operatorname{dist}(x_k, q_m) < 4Ld. \tag{15}$$

Множество $\omega(p,f)$ инвариантно, поэтому $q_m \in \omega(p,f)$. Следовательно, существует такая последовательность $l_n \to \infty$, $n \to \infty$, что

$$f^{l_n}(p) \to q_m,\ n \to \infty.$$

Найдется такое l_n, что

$$\operatorname{dist}\left(f^{l_n}(p), q_m\right) < d,$$

а тогда из (15) следует, что

$$x_k \in N\left(4(L+1)d, f^{l_n}(p)\right) \subset N\left(4(L+1)d, O(p,f)\right).$$

В силу произвольности точки $x_k \in \xi$ следует, что выполнено включение (11). Тем самым Теорема 2 полностью доказана.

2.3. Доказательство Теоремы 3.

В ходе доказательства Теоремы 3 мы будем ссылаться на утверждение (Теорема 4), доказанное независимо Aoki [9] и Hayashi [10]. Дадим необходимое определение.
Будем говорить, что диффеоморфизм f гладкого замкнутого многообразия M обладает свойством P, если все его периодические точки гиперболические.
Пусть

$$F = \operatorname{Int}^1(P).$$

Теорема 4 ([9, 10]). Любой диффеоморфизм $f \in F\ \Omega$ - устойчив.

Докажем теперь Теорему 3. Из Теоремы 4 следует, что для доказательства Теоремы 3 достаточно показать, что выполнено включение

$$\operatorname{Int}^1(\mathrm{1WISP}) \subset F. \tag{16}$$

Будем доказывать включение (16) от противного. Предположим, что существует диффеоморфизм $f \in \operatorname{Int}^1(\mathrm{1WISP}) \setminus F$. Это означает, что существует такая окрестность W диффеоморфизма f в $\operatorname{Diff}^1(M)$, что любой диффеоморфизм $f' \in W$ обладает свойством 1WISP, и в любой окрестности W' диффеоморфизма f найдется диффеоморфизм f'', имеющий негиперболическую периодическую точку.

Фиксируем диффеоморфизм $f_1 \in W$, у которого есть негиперболическая периодическая точка p периода m. Выберем такую окрестность W_1 диффеоморфизма f_1 в $\mathrm{Diff}^1(M)$, что

$$f_1 \in W_1 \subset W.$$

Стандартные рассуждения показывают, что существует такой диффеоморфизм $f_2 \in W_1$, что дифференциал $Df_2^m(p)$ имеет по крайней мере одно собственное число, равное 1.

Пусть $p_i = f_2^i(p)$, $i = 0, \ldots, m-1$. Фиксируем непересекающиеся окрестности U_i, $i = 0, \ldots, m-1$, точек p_i. Ясно, что в окрестности W_1 содержится диффеоморфизм f_3 (C^1-малое возмущение диффеоморфизма f_2), обладающий следующими свойствами:

1. $p_i = f_3^i(p)$, $i = 0, \ldots, m-1$;
2. в каждой из окрестностей U_i, $i = 0, \ldots, m-1$, существуют локальные координаты y_i, в которых

   (a) точка p_i – начало координат в U_i;

   (b) существует такое число $\alpha > 0$ (не зависящее от i), что если

   $$U_i^\alpha = U_i \bigcap \{|y_i| < \alpha\},$$

   то

   $$f_3(U_i^\alpha) \subset U_{i+1}$$

   (как обычно, мы считаем, что $p_m = p_0$ и $U_m = U_0$);

   (c) вектор координат y_i представляется в виде

   $$y_i = \left(y_i^{(1)}, y_i^{'}\right),$$

   где вектор $y_i^{(1)}$ одномерный, а вектор $y_i^{'}$ $(n-1)$-мерный (мы считаем, что $\dim M = n$);

   (d) ограничение

   $$\varphi_i = f_3|_{U_i^\alpha}$$

   задается формулой

$$\varphi_i(y_i) = \left(g_i y_i^{(1)}, B_i y_i^{'}\right),$$

где B_i - матрица размера $(n-1) \times (n-1)$;

(e) выполнено равенство

$$g_0 \dots g_{m-1} = 1.$$

Свойства $(2.a) - (2.e)$ означают, что одномерное подпространство L_0, натянутое на ось $y_0^{(1)}$ (в координатах y_0 в окрестности U_0), соответствует единичному собственному числу дифференциала $Df_3^m(p)$. Одномерные подпространства, натянутые на оси $y_i^{(1)}$ (в окрестностях U_i), являются образами L_0 под действием дифференциалов $Df_3^i(p)$.

Фиксируем такое $\Delta > 0$, что $2\Delta < \alpha$. Выберем такое $\varepsilon \in (0, \Delta)$, что

$$f_3(U_i^\varepsilon) \subset U_{i+1}^\Delta,\ 0 \le i \le m-1. \tag{17}$$

Так как $f_3 \in W_1$, f_3 обладает свойством 1WISP.

Найдем число $d > 0$, соответствующее выбранному $\varepsilon > 0$ в силу свойства 1WISP. Кроме того, считаем, что выполнены включения

$$N(d, f_3(U_i^\varepsilon)) \subset U_{i+1}^\Delta \tag{18}$$

(напомним, что слева во включениях (18) стоят d-окрестности множеств $f_3(U_i^\varepsilon)$ в метрике многообразия M).

Построим непрерывный d-метод $\Psi = \{\psi_k,\ k \in \mathbf{Z}\}$ следующим образом. Рассмотрим такое непрерывное отображение ψ многообразия M в себя, что

(1) если $y_i \in U_i$, то

$$\psi(y_i) = \left(g_i y_i^{(1)} + \operatorname{sign} g_i \cdot \frac{d}{2} \cdot \eta\left(y_i^{(1)}\right), B_i\, y_i^{'}\right),$$

где, как обычно, $\operatorname{sign} a$ – это знак числа $a \neq 0$, а непрерывная функция η такова, что

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \Delta, \\ 0, & |t| \ge \alpha; \end{cases}$$

и $\eta(t) \in (0,1)$, $|t| \in [\Delta, \alpha)$;

(2) $\psi(x) = f_3(x)$ для $x \in M \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{m} U_i^{\alpha}$;

(3) $\operatorname{dist}(\psi(x), f_3(x)) < d$, $x \in M$.

Легко понять, что такое отображение существует.
Положим $\psi_k(x) = \psi(x)$, $k \in \mathbf{Z}$. Для завершения доказательства Теоремы 3 покажем, что ни одна псевдотраектория $\xi = \{x_k\}$, порожденная d-методом Ψ, не лежит в $N(\varepsilon, O(p, f_3))$.

Пусть, напротив, существует такая псевдотраектория ξ, что

$$\xi \subset N(\varepsilon, O(p, f_3)). \tag{19}$$

Из включения (19) следует, что для всякой точки x_k псевдотраектории ξ найдется такая точка $p_i \in O(p, f_3)$, что

$$x_k \in N(\varepsilon, p_i). \tag{20}$$

Так как отображения ψ_k, задающие метод Ψ, не зависят от индекса k, при любом сдвиге индексов последовательности ξ новая последовательность по-прежнему порождается методом Ψ. Поэтому можно считать, что $k = m - i$ во включении (20).

Из соотношений (17) – (19) следует, что

$$x_0 = \psi^{m-i}(x_k) \in U_0^{\varepsilon}.$$

Те же рассуждения показывают, что если $k \geq 0$, то

$$x_k \in U_{k(\mathrm{mod\,m})}^{\varepsilon} \subset U_{k(\mathrm{mod\,m})}^{\Delta}. \tag{21}$$

Пусть $x_k = \left(x_k^{(1)}, x_k^{'}\right)$ в локальных координатах окрестности $U_{k(\mathrm{mod\,m})}^{\Delta}$. Так как

$$\left|x_k^{(1)}\right| < \varepsilon < \Delta,$$

из определения отображения ψ следует, что

$$x_1^{(1)} = g_0\, x_0^{(1)} + \operatorname{sign} g_0 \cdot \frac{d}{2},$$

$$x_2^{(1)} = g_1\, x_1^{(1)} + \operatorname{sign} g_1 \cdot \frac{d}{2},$$

$$\dots$$

$$x_{m-1}^{(1)} = g_{m-2}\, x_{m-2}^{(1)} + \operatorname{sign} g_{m-2} \cdot \frac{d}{2},$$

$$x_{m}^{(1)} = g_{m-1}\, x_{m-1}^{(1)} + \operatorname{sign} g_{m-1} \cdot \frac{d}{2}$$

$$\ldots$$

Из свойства (2.e) диффеоморфизма f_3 следует, что $g_i \neq 0$.
Предположим для определенности, что $g_i > 0, i = 0, \ldots, m-1$ (случаи других знаков рассматриваются аналогично).

Пусть $g = \min\limits_{j \in \{1,\ldots,m-1\}} g_j\, g_{j-1} \ldots g_0$. Из формул

$$x_1^{(1)} = g_0\, x_0^{(1)} + \frac{d}{2},$$

$$x_2^{(1)} = g_1\, g_0\, x_0^{(1)} + g_1\, \frac{d}{2} + \frac{d}{2},$$

$$\ldots$$

$$x_m^{(1)} = g_{m-1}\, g_{m-2}\, \ldots g_0\, x_0^{(1)} + g_{m-1}\, g_{m-2}\, \ldots g_1 \cdot \frac{d}{2} + \ldots + \frac{d}{2} =$$

$$= x_0^{(1)} + \frac{d}{2} \sum_{j=2}^{m-1} g_j\, g_{j-1}\, \ldots g_1$$

и т.д. следует, что если $l > 0$, то

$$x_{lm}^{(1)} \geq\; x_0^{(1)} + l\, g\, \frac{d}{2}.$$

Ясно, что найдется такое $l > 0$, что $x_{lm}^{(1)} > \varepsilon$. Полученное противоречие с включением (21) завершает доказательство.

Список литературы

[1] S.Yu.Pilyugin, Shadowing in Dynamical Systems. Lecture Notes in Math., vol. 1706, Springer – Verlag, Berlin, 1999.

[2] Ken Palmer, Shadowing in Dynamical Systems. Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] R. M. Corless, S.Yu.Pilyugin, Approximate and real trajectories for Generic Dynamical Systems. J. Math. Anal. Appl., vol. 189, 1995, pp. 409-423.

[4] S.Yu.Pilyugin, A.A.Rodionova, K. Sakai, Orbital and weak shadowing properties, Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol. 9, 2003, pp. 287-308.

[5] P.Kloeden, Y. Ombach, A. Pokrovskii, Continuous and inverse shadowing. Fuct. Differ. Equ. 6 (1999), pp. 137-153.

[6] S.Yu.Pilyugin, Inverse shadowing by continuous methods, Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol. 8, 2003, pp. 29-38.

[7] А.Б.Катина, Обратные слабые свойства отслеживания для линейных систем, Вестник СПбГУ, 2005 (в печати).

[8] С.Ю.Пилюгин, Введение в грубые системы дифференциальных уравнений, Л.: ЛГУ, 1988

[9] N.Aoki, The set of Axiom A diffeomorphisms with no cycle. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)23, 1992,pp. 21-65.

[10] S.Hayashi, Diffeomorphisms in $F^1(M)$ satisfy Axiom A. Ergod. Theory Dyn. Syst.,12,1992, pp.233-353.