ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2014
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в нелинейных системах

Метод обратных движений для управления угловыми координатами линейных по состояниям систем

Хрящев С. М.

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В статье дана некоторая характеризация свойства управляемости динамической полисистемы, имеющего фундаментальное значение для теории управления. Эта характеризация устанавливает связь свойств управляемости и возвращаемости. На основе этой связи предлагается метод управления, названный методом обратных движений. Этот метод не связан непосредственно с какими-либо специальными свойствами систем управления и может быть применен для систем управления достаточно общего вида. При этом требуется наличие свойства грубости (структурной устойчивости) управляемой системы. Существование последовательности обратных движений может быть установлено для некоторых полисистем специального вида. В частности, этим методом может быть исследована управляемость по угловым переменным линейных по состояниям систем. Для этих систем получены новые условия управляемости в терминах спектральной характеристики линейной по состояниям системы управления. Выполнение этих условий для конкретных систем может быть проиллюстрировано с помощью средств компьютерной графики.

Ключевые слова: Динамическая полисистема, управляемость, линейная по состояниям система управления.

Abstract

For dynamical polysystem we give a characterization of the controllability property which is a fundamental property for control theory. This characterization establishes a link between the controllability and recurrence. Basing on this connection we propose a control method called the method of inverse movements.

This method is not directly associated with any special properties of control systems, and it can be applied to arbitrary control systems having the structural stability property. Existence of the sequence of inverse movements can be established for some special systems. In particular, by this method the angular controllability of state-linear control systems can be investigated. For such systems new controllability conditions in the terms of the spectral characteristic of the matrix function of the state-linear control system have been given. These conditions for specific systems can be tested by using computer graphics.

1 Введение

Исследование управляемости динамических систем является одной из основных задач теории управления. Под управляемостью системы мы понимаем её свойство переходить из некоторой начальной точки в некоторую конечную точку под действием допустимых управляющих воздействий. Если рассматриваются любые пары начальной и конечной точек, то речь идет о полной управляемости системы.

В основе нашего подхода исследования полной управляемости лежит следующая концепция. Для динамической системы такие характеристики как степень управляемости (обширность множества достижимости из начальных точек) и степень возвращаемости (обширность множества возвратных движений) имеют тесную связь. Использование возвратных движений давно применяется для управления системами ([6, 7, 8]), однако для управления использовались, в основном, уже имеющиеся возвратные движения при постоянных значениях управляющих воздействий. Мы же предлагаем способ построения достаточного для полной управляемости множества управляемых возвратных движений, т. е. движений, организованных посредством переключения значений управляющих воздействий, которые позволяют возвращаться в исходные состояния.

С наглядной точки зрения для движения в некотором потоке суть нашего метода заключается в следующем. Если какая-то точка лежит сколь угодно близко от некоторого источника, то из нее можно попасть в любую другую точку бассейна этого источника при постоянном (неизменяемом) управлении, т. е. «самотеком». Поэтому при возможности возвращения в произвольно малую окрестность источника обеспечена полная управляемости во всем бассейне данного источника.

Отметим, что у сложных систем, например у систем с хаотическим поведением, изначально имеется достаточно большой запас неуправляемых возвратных движений. Однако для систем с регулярным поведением запас неуправляемых возвратных движений обычно невелик и является недостаточным для управления. Его приходится пополнять с помощью построения подходящих управляемых возвратных движений.

Предлагаемый способ построения управлений не связан непосредственно с линейностью или гладкостью системы управления.

Одной из важных частных задач теории управления является задача исследования управляемости системы в окрестности её точки покоя[1, 2], что приводит после линеаризации к исследованию управляемости по угловым координатам линейных по состояниям систем, которые являются нелинейными системами специального вида (со свойствами симметрии). Автором этой работы один из вариантов метода применялся ранее для исследования некоторых классов линейных по состояниям систем, [10, 11]. В настоящей работе используется усовершенствованный вариант этого метода, который применяется для исследования управляемости ранее не рассматривавшихся классов линейных по состояниям систем управления.

С технической точки зрения, мы разделяем управляющие воздействия на базовые (глобальные) и корректирующие (локальные), [13]. Для определения существования и нахождения достаточного множества значений базовых управляющих воздействий для линейных по состояниям используется так называемая её спектральная характеристика, [10]. Для нахождения подходящих локальных управлений обычно применяются стандартные методы [9], основанные на решении системы линейных алгебраических уравнений с матрицей управляемости линеаризованной системы.

2 Описание класса систем управления

Введем некоторые понятия, которые будут использоваться в этой работе. Пусть X – некоторое многообразие размерности n, U – некоторое многообразие размерности m, f – некоторая дифференцируемая на множестве $X \times U$ функция. Динамическая система управления (ДСУ) задается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{2.1}$$

В качестве исходного множества допустимых управляющих воздействий мы рассматриваем класс таких функций со значениями во множестве U, которые при подстановке в уравнение (2.1) обеспечивают существование и единственность решений этого дифференциального уравнения. Обычно будем использовать класс кусочно-непрерывных управлений. В дальнейшем мы уточним выбор класса допустимых управляющих воздействий. Это связано с тем, что мы будем разделять управляющие воздействия на базовые (глобального действия) и корректирующие (локального действия). Такое разделение управлений в свою очередь приведет к изменению (расширению) объекта управления.

В качестве допустимых базовых управлений мы будем рассматривать кусочно-постоянные функции со значениями в некотором дискретном подмножестве $U_0 \subset U$. Подмножество U_0 будем называть множеством базисных значений управляющих переменных.

Пусть фиксированы значения $x_0 \in X$ и $u_0 \in U$. Система управления (2.1) называется локально управляемой вдоль траектории $x(t, x_0, u_0)$, исходящей из точки $x_0 \in X$, т. е. $x(0, x_0, u_0) = x_0$, если эта траектория лежит внутри множества, образованного траекториями уравнения (2.1), исходящими из точки x_0, при произвольных управляющих воздействиях из исходного множества допустимых управлений.

2.1 Локальное управление вдоль базовых траекторий

Достаточные условия локальной управляемости вдоль траектории $x(t, x_0, u_0)$ уравнения (2.1), соответствующие некоторым значениям $u_0 \in U$, $x_0 \in X$, могут быть получены рассмотрением уравнений в отклонениях. Поскольку речь идет о локальных условиях, предположим временно, что множества X и U имеют линейную структуру. Рассмотрим невязку $x(t, u) - x(t, u_0)$ (зависимость от x_0 опускаем), которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}[x(t, u) - x(t, u_0)] = f(x, u) - f(x, u_0).$$

В линейном приближении это уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt}[\Delta x] = A(x(t, x_0, u_0), u_0)\Delta x + B(x(t, x_0, u_0), u_0)\Delta u, \tag{2.2}$$

где

$$\Delta x = x(t, u) - x(t, u_0),\ \Delta u = u - u_0,$$
$$A(x, u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u)\,,\ B(x, u) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)\,.$$

Очевидно, при $t = 0$ величина $\Delta x = x(0, x_0, u) - x(0, x_0, u_0) = x_0 - x_0 = 0$.

Линейное нестационарное уравнение (2.2) называется линейных расширением уравнения (2.1). Это уравнение можно рассматривать при любом значении параметра u_0.

В терминах коэффициентов A, B этого уравнения можно дать необходимые и достаточные условия управляемости по переменной Δx для системы (2.2) при условии, что процесс $\{x(t), u(t)\}$ удовлетворяет уравнению (2.1). Для случая линейных по состояниям систем условия локальной управляемости вдоль траектории приведены в разделе 5. Эти же самые условия будут достаточными для локальной управляемости вдоль траектории уравнения (2.1), исходящей из точки x_0 при постоянном значении u_0.

Однако нет необходимости предполагать наличие линейных структур для множеств X и U, если рассматривать ДСУ в расширенном пространстве состояний и управлений, т. е. на касательных расслоениях. Таким образом, $x \in X$, $u \in U$ и $\Delta u \in T_{u_0}U$, $\Delta x \in T_{x(t,u_0)}X$ – соответственно касательные пространства.

3 Описание базовых прямых и обратных глобальных движений

Пусть X – некоторое компактное риманово многообразие (пространство состояний) с метрикой dist размерности n, U – некоторое многообразие риманово размерности m (пространство управлений), динамическая система управления (ДСУ) задается дифференциальным уравнением (2.1). Фиксируем некоторое значение $u = u_* \in U$. Тогда уравнение вида (2.1) задает обычную динамическую систему. Обозначим $x(t, x_0, u_*)$ решение уравнения (2.1), такое что $x(0, x_0, u_*) = x_0$. Введем некоторые понятия. Рассмотрим для некоторого значения u_* динамическую систему с функцией $f(., u_*)$ и некоторое ее инвариантное компактное множество $S(u_*)$. Определим для него устойчивое и неустойчивое многообразия, [3, 5].

$$W^s(S(u_*)) = \left\{ y \,\middle|\, \lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(x(t, y, u_*), S(u_*)) = 0 \right\}, \tag{3.3}$$

$$W^u(S(u_*)) = \left\{ y \,\middle|\, \lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}(x(t, y, u_*), S(u_*)) = 0 \right\}. \tag{3.4}$$

Инвариантное множество $S(u_*)$ называется источником, если $S_-(u_*) = W^s(S_-(u_*))$. Множество $\overline{W^u(S_-(u_*))}$ называется бассейном источника. Здесь и далее черта над множеством означает его замыкание в метрике dist. Инвариантное множество $S_+(u_*)$ называется стоком, если $S_+(u_*) = W^u(S_+(u_*))$. Множество $\overline{W^s(S_+(u_*))}$ называется бассейном стока. В остальных случаях инвариантное множество $S(u_*)$ называется седлом. Его бассейны определяются аналогично как замыкания соответствующих множеств.

Пусть $S_{i'}(u')$ – некоторое инвариантное множество для динамической системы с функцией $f(.,u')$, где $u' \in U$ и $S_{i''}(u'')$ – некоторое инвариантное множество для $f(.,u'')$, $u'' \in U$. Операция движение по стрелке « $\to$ » определяется следующим образом:

$$S_{i'}(u') \to S_{i''}(u'') \quad \Leftrightarrow \quad \overline{W^u(S_{i'}(u'))} \cap \overline{W^s(S_{i''}(u''))}. \tag{3.5}$$

Обозначим

$$P_{i',i''}(u',u'') = \overline{W^u(S_{i'}(u'))} \cap \overline{W^s(S_{i''}(u''))}. \tag{3.6}$$

В дальнейшем отношение « $\to$ » мы будем интерпретировать как возможность достичь из произвольной окрестности множества $S_1(u')$ произвольную окрестность множества $S_1(u'')$.

Движение по стрелке называется прямым, если $u' = u'' = u_*$, т. е. $S_{i'}(u_*) \to S_{i''}(u_*)$. Для постоянного значения $u_* \in U$ последовательность движений по стрелкам от некоторого источника $S_-(u_*)$ через седловые множества $S(u_*)$ к некоторому стоку $S_+(u_*)$, содержащемуся в бассейне $\overline{W^u(S_-(u_*))}$ источника $S_-(u_*)$, будем называть последовательностью прямых движений системы (2.1).

Для набора значений $\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_k\}$ последовательность движений по стрелкам от некоторого стока к некоторому источнику, т. е. последовательность

$$S_1(u_1) \to \dots \to S_i(u_i) \to \dots \to S_k(u_k) \tag{3.7}$$

будем называть последовательностью обратных движений системы (2.1), где $S_1(u_1)$ – сток, $S_i(u_i)$, – седловое множество при $1 < i < k$, $S_k(u_k)$ – источник.

Далее мы будем предполагать, что для выбранных значений u_i все пересечения вида (3.5), (3.6) не пусты и трансверсальны, т. е. выполнены условия

$$n_i + m_i = n + s_i, \quad m_i + n_{i+1} = n + p_{i,i+1}, \tag{3.8}$$

где при $i = 1, \dots, k$ обозначено $s_i = \dim S_i(u_i)$,

$$n_i = \dim N_i(u_i), \quad N_i(u_i) = \overline{W^s(S_i(u_i))}, \tag{3.9}$$

$$m_i = \dim M_i(u_i), \quad M_i(u_i) = \overline{W^u(S_i(u_i))}, \tag{3.10}$$

$$p_{i,i+1} = \dim P_{i,i+1}(u_i,u_{i+1}), \quad P_{i,i+1}(u_i,u_{i+1}) = M_i(u_i) \cap N_{i+1}(u_{i+1}) \tag{3.11}$$

и предполагается , что

$$M_1(u_1) = S_i(u_1), \quad N_i(u_k) = S_i(u_k). \tag{3.12}$$

Кроме того, мы считаем, что $s_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, k$, а также считаем, что $p_{0,1} = 0$, $p_{k,k+1} = 0$ и $p_{i,i+1} \geq 0$, $i = 1, \ldots, k-1$. Здесь и далее для простоты записи мы опускаем зависимость от u_i в формулах для размерностей.

При введенных обозначениях условия (3.8) можно переписать в следующем виде

$$n_{i+1} - n_i = p_{i,i+1} - s_i, \quad m_{i+1} - m_i = s_{i+1} - p_{i,i+1}. \tag{3.13}$$

Далее мы будем предполагать, что с ростом параметра i размерности m_i последовательности неустойчивых многообразий M_i убывают, а размерности n_i последовательности неустойчивых многообразий N_i возрастают. Из условий (3.13) следует, что эквиваленты следующие пары неравенств

$$\begin{gathered} n_i > n_{i+1}, \quad m_i < m_{i+1}, \quad 1 \leq i < k-1 \quad \Leftrightarrow \\ s_i > p_{i,i+1}, \quad p_{i,i+1} < s_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq k-1. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Из формул (3.13) можно выразить размерности множеств N_i, M_i через размерности множеств $S_i, P_{i,i+1}$, $1 \leq i \leq k$.

$$\begin{aligned}
n_1 = n, \quad m_1 = s_1, \\
n_2 = n - s_1 + p_{1,2}, \quad m_2 = s_1 + s_2 - p_{1,2}, \\
n_3 = n - s_1 - s_2 + p_{1,2} + p_{2,3}, \quad m_3 = s_1 + s_2 + s_3 - p_{1,2} - p_{2,3}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n_i = n - s_1 - \cdots - s_{i-1} + p_{1,2} + \cdots + p_{i-1,i}, \\
m_i = s_1 + s_2 + \cdots + s_i - p_{1,2} - \cdots - p_{i-1,i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n_k = n - s_1 - \cdots - s_{k-1} + p_{1,2} + \cdots + p_{k-1,k}, \\
m_k = s_1 + s_2 + \cdots + s_k - p_{1,2} - \cdots - p_{k-1,k},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Отметим, что $n_1 = n$, $m_1 = s_1$ при $i = 1$, $n_i > s_i$, $m_i > s_i$ при $2 \leq i \leq k-1$ и при $i = k$ справедливо $n_k = s_k$, $m_k = n$. Последние равенства означают, что

$$n = s_1 + \cdots + s_k - p_{1,2} + \cdots - p_{k-1,k}. \tag{3.16}$$

Таким образом, мы показали, что условия (3.8), (3.13), (3.15) являются эквивалентными условиями трансверсальности соответствующих пересечений.

Уточним процесс управления формирования последовательности обратных движений вида (3.7). Мы предполагаем, что можно построить такие множества $S_i(u_i), 1 \leq i \leq k$, что в некоторой окрестности множества $S_i(u_i)$ все точки этой окрестности достижимы друг из друга посредством только локальных управлений Δu_i при неизменном базовом значении u_i. Аналогично в некоторой окрестности множества $P_{i,i+1}(u_i, u_{i+1}), 1 \leq i \leq k-1$ все точки этой окрестности достижимы друг из друга посредством только локальных управлений Δu_i или Δu_{i+1} при неизменных значениях u_i, u_{i+1}. На остальной части множеств вида $W^s(S_i(u_i))$ или $W^u(S_i(u_i))$ процесс управления осуществляется только посредством неизменного значения базового управления u_i при нулевых локальных управлениях.

Очевидно, управляемость конкретной системы вида (2.1) будет обеспечена, если будет найден набор базовых управлений $\{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_k\}$, для которого имеется последовательность обратных движений вида (3.7), причем бассейны источника $S(u_k)$ и бассейн стока $S(u_1)$ совпадают с пространством состояний X. Таким образом, существование последовательности обратных движений может рассматриваться как условие управляемости системы.

Далее для линейных по состояниям систем, в которых управляют угловыми координатами, указывается, как могут быть построены последовательности обратных движений.

4 Линейные по состояниям системы управления

Мы будем далее рассматривать линейные по состояниям системы управления вида

$$\dot{\vec{x}} = A(u)\vec{x}, \quad \vec{x} \in X \subset R^{n+1} \setminus \{0\},\ u \in U \subset R^m. \tag{4.17}$$

Мы предполагаем, что матричная функция $A(u)$ дифференцируема на множестве U. Кроме того, мы предполагаем, что рассматриваемые матричные семейства принадлежат некоторому классу матричных функций, на котором введена некоторая топология и мы рассматриваем подкласс таких функций, которые называем функциями общего положения с точки зрения этой топологии. Обычно этот подкласс является открытым множеством, плотным во всем множестве функций. В частности, из этого предположения следует, что для типичной аналитической векторной функции $A(.)$ для почти каждого значения u матрица $A(u)$ имеет простые собственные числа, [4]. Для типичных значений управляющего параметра ниже приведены канонические формы уравнений вида (4.17) в специальных (сферических) координатах для различных значений параметра n.

Для вектора $\vec{x}$ обозначим $r = |\vec{x}|$ и $\vec{p} = \frac{\vec{x}}{r}$ и рассмотрим соответствия

$$\vec{x} \in R^{n+1}, \quad \vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} =: \vec{p} \in S^n. \tag{4.18}$$

Таким образом, сфера S^n отождествляется с множеством

$$\left\{\vec{p} \in R^{n+1} \,||\vec{p}| = 1\right\} = S^n.$$

Для уравнения (4.17) получим уравнения движений в координатах $\vec{p}, r$. Очевидно,

$$r^2 = (\vec{x}, \vec{x}), \quad \frac{\partial r^2}{\partial t} = 2r\dot{r} = 2(\dot{\vec{x}}, \vec{x}) = 2(A\vec{x}, \vec{x}) = 2(A\vec{p}, \vec{p})r^2.$$

Следовательно, $\dot{r} = (A\vec{p}, \vec{p})r$. Далее, так как $\vec{x} = \vec{p}r$, то

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{p}}r + \vec{p}\dot{r} = \dot{\vec{p}}r + \vec{p}(A\vec{p}, \vec{p})r,$$

следовательно, $\dot{\vec{p}}r + \vec{p}(A\vec{p}, \vec{p})r = A\vec{p}r$. Таким образом, уравнения движений можно представить в следующей форме

$$\dot{\vec{p}} = (A - (A\vec{p}, \vec{p})I)\vec{p}, \quad \vec{p} \in S^n, \tag{4.19}$$

$$\dot{r} = (A\vec{p}, \vec{p})r, \quad r \in R^1_+, \tag{4.20}$$

где S^n – n-мерная сфера, R^1_+ – луч положительных чисел.

Взаимно однозначное соответствие $\vec{p} \leftrightarrow \boldsymbol{\zeta}$ вводит функцию $\vec{p} = \vec{p}(\boldsymbol{\zeta})$, где $\boldsymbol{\zeta}$ – угловые координаты сферы S^n. Ее производная $\dot{\vec{p}} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\dot{\boldsymbol{\zeta}}$. Таким образом, уравнения движений (4.19) – (4.20) можно переписать в следующей форме

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)^+ (A - (A\vec{p}(\boldsymbol{\zeta}), \vec{p}(\boldsymbol{\zeta}))I)\, p(\boldsymbol{\zeta}), \quad \vec{\zeta} \in S^n, \tag{4.21}$$

$$\dot{r} = (A\vec{p}(\boldsymbol{\zeta}), \vec{p}(\boldsymbol{\zeta}))r, \quad r \in R^1_+. \tag{4.22}$$

где матрица

$$\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)^+ = \left(\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)^T \frac{\partial \vec{p}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)^T$$

является псевдообратной матрицей для матрицы $\frac{\partial \vec{p}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}$. Уравнения (4.21), (4.22) в символическом виде могут быть записаны в следующей форме

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = Z_{A(u)}(\boldsymbol{\zeta}), \quad \boldsymbol{\zeta} \in S^n, \tag{4.23}$$

$$\dot{r} = R_{A(u)}(\boldsymbol{\zeta})r, \quad r \in R^1_+. \tag{4.24}$$

Выражения для векторной функции Z и скалярной функции R, зависящих от угловых переменных $\boldsymbol{\zeta}$, могут быть выписаны для каждого конкретного способа параметризации сферы S^n.

Далее мы ограничимся исследованием управляемости по угловым координатам систем вида (4.17), т. е. исследованием подсистемы (4.23), предполагая, что в процессе всего времени управления радиальная переменная остается ограниченной. Для обоснования управляемости мы будем применять метод построения последовательности обратных движений. В качестве элементов этой последовательности будут участвовать некоторые подмножества пространства состояний, в которых имеется достаточно много неуправляемых возвратных движений, обладающих локальной управляемостью.

5 Условия локальной управляемости для линейных по состояниям систем управления

Для обеспечения глобальной управляемости предлагаемый метод требует обеспечить локальную управляемость вдоль базовых траекторий.

Для линейной по состояниям системы (4.17) с постоянным базовым управление $u = u_0$ локальная подсистема управления (2.2) принимает вид

$$\dot{\Delta x} = A(u_0)\Delta x + A'(u_0)x\Delta u, \quad \Delta x(0) = 0,$$

где Δx – отклонение от базовой траектории, Δu – локальное управление, знак «$'$» означает производную по параметру u.

Для систем с непрерывно изменяющимся локальным управляющим параметром имеется достаточное условие локальной управляемости при постоянном базовом скалярном значении параметра u_0 вдоль траектории, проходящей через точку x_0, которое имеет вид (см. [9])

$$\operatorname{rank} C(x_0, u_0) = n + 1, \quad C(x_0, u_0) = \{(\operatorname{ad}^k A(u_0))A'(u_0)x_0\}_{k=0}^n. \tag{5.25}$$

В формуле (5.25) для любых матриц A, B обозначено

$$(\operatorname{ad}^0 A)B = B, \quad (\operatorname{ad}^k A)B = [(\operatorname{ad}^{k-1} A)B, A], \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $[B, A] = BA - AB$.

Значения локальных управлений (в первом приближении) определяются как решения линейного матричного уравнения с матрицей $C(x_0, u_0)$ вида (5.25), [13].

6 Линейные динамические подсистемы максимальной степени колебательности

Зафиксируем некоторое значение базовых управлений u_* и для исходной линейной системы (4.17) с матрицей $A(u_*)$ рассмотрим некоторые её подсистемы на инвариантных для матрицы $A(u_*)$ подпространствах размерности $s+1 \leq n+1$.

Мы будем рассматривать такие подсистемы в специальной (собственной) системе координат, в которой матрица подсистемы имеет квазидиагональный вид. При этом мы предполагаем, что матрица подсистемы имеет не более одного вещественного собственного числа. Эта подсистема в собственных координатах имеет вид

$$\dot{\vec{x}}' = A'\vec{x}', \quad \vec{x}' \in R^{s+1} \setminus \{0\}. \tag{6.26}$$

Канонические формы матриц A' четной $s+1 = 2l$ и нечетной $s+1 = 2l+1$ размерностей будут соответственно следующие

$$A' = \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{pmatrix} \right\}, \tag{6.27}$$

$$A' = \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{pmatrix}, \lambda_{l+1}, \right\}, \tag{6.28}$$

где $\alpha_i \pm i\beta_i$ – комплексно-сопряженные собственные числа, $i = 1, \ldots, l = [\frac{s+1}{2}]$, λ_{l+1} – вещественное собственное число. Очевидно, эти собственные числа зависят от фиксированного значения u_*.

6.1 Проекции движений линейных системы на сферы

Линейные дифференциальные уравнения вида (6.26) с постоянной матрицей A' вида (6.27) или (6.28) могут быть записаны следующим образом. Рассмотрим отдельно четный и нечетный случаи размерности $s+1$ вектора $\vec{x}' = (x_1', \ldots, x_{s+1}')$.

В четном случае, т. е. при $s+1 = 2l$ можно ввести l пар полярных систем координат, связанных с декартовыми по формулам

$$x_{2i-1}' = r_i \cos\varphi_i, \quad x_{2i}' = r_i \sin\varphi_i, \quad -\pi \leq \varphi_i \leq \pi, \quad r_i > 0, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Так как значения $\varphi_i = \pm\pi$ отождествляются, то можно считать, что $\varphi_i \in S^1$. Следовательно, $\boldsymbol{\varphi} \in S^1 \times \cdots \times S^1 = T^l$, где T^l – l-мерный тор. Поэтому уравнение (6.26) можно переписать в виде системы двух уравнений

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in T^l, \tag{6.29}$$

$$\dot{\vec{r}} = R\vec{r}, \quad \vec{r} \in R^l_+, \tag{6.30}$$

где $\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_l)$, $\vec{r} = \mathrm{col}(r_1, \dots, r_l)$, $\boldsymbol{\beta} = \mathrm{col}(\beta_1, \dots, \beta_l)$, $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $R = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\alpha})$.

Перейдем в уравнении (6.30) к сферической системе координат $\boldsymbol{\psi}, \rho$. Радиальная координата, ρ определяется соотношением $\rho = |\vec{r}|$. Набор угловых координат определяется из по формулы $\vec{r} = \rho\vec{r}_0(\boldsymbol{\psi})$, где $\vec{r}_0(\boldsymbol{\psi})$ – вектор единичной длины, выраженный через набор угловых координат $\boldsymbol{\psi}$. Условия $r_i > 0$, $i = 1, \dots, l$ влекут следующие ограничения на значения сферических координат

$$\boldsymbol{\psi} = \mathrm{col}(\psi_1, \dots, \psi_{l-1}), \quad 0 \le \psi_j \le \frac{\pi}{2}, \quad j = 1, \dots, l-1, \quad \rho > 0.$$

Если обозначить отрезок $D = \{0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}\}$, то $\boldsymbol{\psi} \in D^{l-1}$, $l = 1, 2, \dots$. Множество D^0 понимается как одноточечное. Тогда уравнение (6.30) может быть переписано в виде системы двух уравнений

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\Psi}_{A'}(\boldsymbol{\psi}), \quad \boldsymbol{\psi} \in D^{l-1}, \tag{6.31}$$

$$\dot{\rho} = P_{A'}(\boldsymbol{\psi})\rho, \quad \rho \in R_+, \tag{6.32}$$

где $P_{A'}(\boldsymbol{\psi}) = (\vec{r}_0(\boldsymbol{\psi}))^T R(\vec{r}_0(\boldsymbol{\psi}))$, вид функции $\boldsymbol{\Psi}_{A'}(\boldsymbol{\psi})$ для дальнейшего не существенен. Заметим, что для $l = 1$ уравнение вида (6.31) отсутствует.

Таким образом, сферическая составляющая линейного уравнения (6.26) удовлетворяет системе уравнений (6.29), (6.31), заданных на сфере S^s при $s = 2l - 1$, параметризованной набором угловых координат $\mathrm{col}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})$.

Если вещественные части комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы A' совпадают, т. е.

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_l,$$

то $\boldsymbol{\Psi}_{A'}(\boldsymbol{\psi}) = 0$ и система уравнений (6.29), (6.31) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\beta}, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = 0. \tag{6.33}$$

Далее будем считать, что комплексно-сопряженные собственные числа попарно не совпадают, т. е. в этом случае (при совпадении вещественных частей) мнимые части β_i собственных чисел попарно не совпадают.

В нечетном случае, т. е. при $s+1 = 2l+1$ нужно дополнительно рассмотреть систему уравнений

$$\dot{\rho} = P_{A'}(\boldsymbol{\psi})\rho, \quad \dot{x}'_{2l+1} = \lambda_{l+1} x'_{2l+1}$$

и ввести полярные координаты по формулам

$$\rho = R\cos\chi, \quad x'_{2l+1} = R\sin\chi, \quad R > 0, \quad -\frac{\pi}{2} \le \chi \le \frac{\pi}{2}.$$

Тогда упомянутую систему уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= (\lambda_{l+1} - P_{A'}(\boldsymbol{\psi}))\sin\chi\cos\chi, \\ \dot{R} &= \left(P_{A'}(\boldsymbol{\psi})\cos^2\chi + \lambda_{l+1}\sin^2\chi\right)R. \end{aligned} \tag{6.34}$$

В силу периодичности правых частей уравнения (6.34) мы считаем, что значения $\chi = \pm\frac{\pi}{2}$ отождествляются, т. е. $\chi \in S^1$. Таким образом, сферическая составляющая линейного уравнения (6.26) удовлетворяет системе уравнений (6.29), (6.31), (6.34) заданных на сфере S^s при $s = 2l$, параметризованной набором угловых координат $\boldsymbol{\zeta} = \mathrm{col}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \chi)$. Заметим, что, уравнения движений на сфере S^{2l} четной размерности получаются надстройкой уравнений вида (6.29) – (6.31) движений на сфере S^{2l-1} нечетной размерности посредством уравнения (6.34).

Если вещественные части комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы A' совпадают, т. е.

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_l = \lambda_{l+1} =: \alpha, \tag{6.35}$$

то $P_{A'}(\boldsymbol{\psi}) = \alpha$ и система уравнений (6.29), (6.31), (6.34) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\beta}, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = 0, \quad \dot{\chi} = 0. \tag{6.36}$$

Подсистемы (6.33) или (6.36) будем называть подсистемами, имеющими максимальную степень колебательности. Такие подсистемы имеют неуправляемые возвратные траектории $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\beta}t \in T^l$ при постоянных $\boldsymbol{\psi}$ и χ.

6.2 Управляение проекциями линейных систем максимальной степени колебательности посредством локальных управлений

Предположим, что при некотором значении $u = u_*$ система вида (4.17) имеет подсистему четного или нечетного порядка с подматрицами соответственно вида (6.27) или (6.28). Пусть четному и нечетному случаям отвечают следующие поднаборы собственных чисел матрицы $A(u_*)$, соответствующие этим подсистемам.

$$\alpha_1(u_*) \pm \beta_1(u_*), \dots, \alpha_l(u_*) \pm \beta_l(u_*), \tag{6.37}$$

$$\alpha_1(u_*) \pm \beta_1(u_*), \dots, \alpha_l(u_*) \pm \beta_l(u_*),\ \lambda_{l+1}(u_*). \tag{6.38}$$

Предположим кроме того, что при выполнены условия

$$\alpha_1(u_*) = \dots = \alpha_l(u_*) \quad \text{или} \quad \alpha_1(u_*) = \dots = \alpha_l(u_*) = \lambda_{l+1}(u_*). \tag{6.39}$$

Соответственно этим наборам введем обозначения для инвариантных подпространств $R^{s+1}(u_*)$ матрицы $A(u_*)$ в четном и нечетном случаях, т. е.

$$\begin{gathered} R^{2l}(u_*) \quad \leftrightarrow \quad \alpha_1(u_*) = \dots = \alpha_l(u_*), \\ R^{2l+1}(u_*) \quad \leftrightarrow \quad \alpha_1(u_*) = \dots = \alpha_l(u_*) = \lambda_{l+1}(u_*), \end{gathered} \tag{6.40}$$

где $s+1 = 2l$ или $s+1 = 2l+1$. Обозначим

$$S^s(u_*) = R^{s+1}(u_*) \cap S^n. \tag{6.41}$$

Далее рассмотрим управляемость системы (4.23) в окрестности инвариантной при $u = u_*$ сферы $S^s(u_*) \subset S^n$.

Лемма 1 *Пусть существует значение u_* базового управления, для которого справедливы следующие предположения.*

1. Матрица $A(u_*)$ имеет поднаборы собственных чисел вида (6.37) или (6.38), для которых выполнены условия (6.39).

2. Система управления (4.23) локально управляема вдоль траекторий систем (6.33) или (6.36) с базовым значением u_*, лежащих на сфере $S^s(u_*)$ (для пары $\{A(u_*), A'(u_*)\}$ выполнено достаточное условие (5.25)).

Тогда проекция системы управления (4.23) глобально управляема в окрестности сферы $S^s(u_*)$ при одном базовом значении управляющего параметра u_* при помощи локальных управлений Δu.

Доказательство. Первое из уравнений системы (6.33) или (6.36) задает движения на торе $T^l(u_*)$, инвариантном для систем (6.33) или (6.36), и, следовательно, для системы (4.23) при $u = u_*$. Всё пространство состояний систем (6.33) или (6.36) представимо в виде некоторого расслоения со слоем $T^l(u_*) \subset S^s(u_*)$, а именно как прямое произведение базы (некоторое $(s-l)$-мерное пространство) на типичный слой (тор T^l). Для простоты записи будем

a) b)

Рис. 1: Трубчатая окрестность a) периодической траектории b) почти периодической траектории.

опускать зависимость от u_*. Движение на слое задается первым уравнением, т. е. $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\beta}$, где $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1 \ldots, \beta_l)$. В зависимости от рациональной соизмеримости или несоизмеримости координат β_i набора $\boldsymbol{\beta}$ траектории уравнения являются замкнутыми или всюду плотными в торе. Напомним, что координаты β_i набора $\boldsymbol{\beta}$ являются рационально несоизмеримыми, если линейная комбинация этих координат с рациональными (или целыми) коэффициентами равна нулю тогда и только тогда, когда все эти коэффициенты равны нулю. В противном случае координаты являются рационально соизмеримыми. Для этих двух случаев покажем, что в окрестности сферы $S^s(u_*)$ можно перейти из любой точки в любую точку только под действием локальных управлений при фиксированном базовом управлении u_*.

1. Рассмотрим сначала случай, когда все числа из набора $\boldsymbol{\beta}$ рационально соизмеримы. Тогда все траектории уравнения (6.29) являются периодическими. Каждую базовую траекторию при $u = u_*$ можно окружить трубчатой окрестностью, лежащей в множестве S^n, составленной из траекторий при локальных управлениях Δu, причем радиус этой трубки ограничен снизу числом, пропорциональным уровню $\overline{\Delta u}$ локальных управлений Δu, т. е. $(|\Delta u| \leq \overline{\Delta u})$. В силу компактности тора T^l число таких трубок, покрывающих тор, конечно. Такая процедура покрытия может быть проведена для каждого слоя, который является тором Следовательно, трубчатыми окрестностями можно покрыть всю сферу S^s, объединение которых дает окрестность сферы S^s. Переходя с трубки на трубку при помощи локальных управлений, можно из любой начальной точки сферы попасть в любую конечную точку сферы S^s.

2. Рассмотрим теперь случай, когда числа из набора $\boldsymbol{\beta}$ является рацио-

нально несоизмеримыми. Тогда все траектории динамической системы (6.29) являются почти периодическими, а именно для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует почти период $\tau(\varepsilon)$, что для любой траектории $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}_0, .)$ на торе T^l справедливо следующее. Если в начальный момент времени $t = 0$ для траектории выполнено условие $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}_0, 0) = \boldsymbol{\varphi}_0$, то через почти период выполнено условие $|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}_0, \tau(\varepsilon)) - \boldsymbol{\varphi}_0| < \varepsilon$. Аналогично случаю 1, каждую базовую траекторию при $u = u_*$ на временном интервале длины $\tau(\varepsilon)$ можно окружить трубчатой окрестностью, составленной из траекторий при локальных управлениях Δu. Из этой трубчатой окрестности можно составить замкнутую трубку, однако радиус этой трубки будет меньше на величину $\varepsilon/2$ радиуса трубки для периодического случая, где $\varepsilon < 2\overline{\Delta u}$ (в первом приближении). Далее рассуждения аналогичны. Лемма 1 доказана.

Заметим, что утверждение леммы 1 можно получить из теоремы [7] при незначительном изменении ее формулировки.

7 Управление угловыми координатами произвольных линейных систем

Для проекций линейных систем (4.17) по угловым координатам, т. е. для систем вида (4.19) (или а краткой записи (4.23)), конкретизируем вид последовательностей обратных движений, введенных в разделе 3 для систем общего вида.

Пусть для некоторого k и набора параметров $u_1, \ldots, u_k$ множества

$$S_1(u_1) := S^{s_1}(u_1), \ldots, S_k(u_k) := S^{s_k}(u_k), \tag{7.42}$$

образованные по формулам (6.40), (6.41), являются некоторыми инвариантными сферами при соответствующих значениях u_i параметра u для системы (4.23). По формулам вида (3.9), (3.10) образуем для $i = 1, \ldots, k$ множества

$$N_i(u_i) := S^{n_i}(u_i) = \overline{W^s(S^{s_i}(u_i))}, \quad M_i(u_i) := S^{m_i}(u_i) = \overline{W^u(S^{s_i}(u_i))} \tag{7.43}$$

и для $i = 1, \ldots, k-1$ по формулам вида (3.11) образуем множества

$$P_{i,i+1}(u_i, u_{i+1}) = M_i(u_i) \cap N_{i+1}(u_{i+1}) =: S^{p_{i,i+1}}(u_i, u_{i+1}). \tag{7.44}$$

Теорема 1 *Предположим, что для последовательности обратных движений вида (3.7) с элементами вида (7.42) выполнены следующие условия.*

1.1 Для каждого u_i , $i = 1, \ldots, k$ выполнены условия леммы 1, обеспечивающие локальную управляемость вдоль траекторий систем (6.33) или (6.36) с базовым значением u_i, лежащих на сфере $S^{s_i}(u_i)$.

1.2. Для всех пар u_i, u_{i+1} точки множеств $P_{i,i+1}(u_i, u_{i+1})$ обладают свойством локальной достижимости (имеется ранговый критерий, см. [9]).

2.1. Справедливы условия (6.39) (равенство вещественных частей собственных чисел для каждого элемента $S^{s_i}(u_i)$).

2.2. Для наборов (7.43) размерности множеств $N_i(u_i)$ убывают, а размерности множеств $M_i(u_i)$ возрастают при $i = 1, \ldots, k$, т. е. выполнены условия (3.14), и они согласованы с размерностями множеств $S_i(u_i)$ и $P_{i,i+1}(u_i, u_{i+1})$ вида (7.44), т. е. выполнены условия трансверсальности (3.7) (или выполнены условия (3.15), (3.16)).

2.3 Сток $S^{s_1}(u_1) = N_1(u_1)$ и источник $S^{s_k}(u_k) = M_{u_k}$ имеют своими бассейнами всё пространство состояний.

Тогда последовательность обратных движений вида (3.7) обеспечивает полную управляемость проекции линейной системы (4.17) на сферу S^n, т. е. управляемость по угловым координатам системы (4.23).

Доказательство теоремы следует из следующих замечаний. Из условия 2.1 теорем следует, что при $u = u_i$ в силу формулы (6.39) все траектории динамической системы (4.23) на инвариантной сфере $S^{s_i}(u_i)$ являются возвратными, а именно состоят только из периодических или всюду плотных траекторий. Поэтому из условия 1.1 теоремы 1 по лемме 1 следует, что полисистема (4.23) полностью управляема в некоторой окрестности каждой сферы $S^{s_i}(u_i), i = 1, \ldots, k$ посредством только локальных управлений Δu_i при постоянном базовом управлении u_i.

Условие 2.2 теоремы означает, что в условиях существования последовательности обратных движений вида (3.7), движения вне окрестностей элементов $S^{s_i}(u_i)$ попеременно происходит по множествам

$$N_1(u_1), M_1(u_1), N_2(u_2), M_2(u_2), \ldots, N_k(u_k), M_k(u_k)$$

и в точках множеств $P_{i,i+1}(u_i, u_{i+1})$ происходит переключение базовых значений управляющих воздействий с u_i на u_{i+1}, $i = 1, \ldots, k-1$, что возможно в силу условия 1.2 теоремы.

Первое из условий 2.3 теоремы означает, что из любого начального состояния с помощью прямых движений можно попасть на первый элемент цепочки обратных движений, второе из условий 2.3 теоремы означает, что из последнего элемента цепочки обратных движений можно попасть в любое конечное состояние также с помощью прямых движений.

Таким образом, условия теоремы гарантируют, что последовательности обратных движений $S_1(u_1) \to \cdots \to S_k(u_k)$ вида (3.7) с элементами вида (7.42) обеспечивает управляемость полисистемы (4.23), т.е. теорема 1 справедлива.

Далее в следующем разделе 8 мы введем операции, с помощью которых можно дать формальную запись (см. формулы (8.48)) процесса управления.

8 Операции для описание прямых и обратных глобальных движений

Для записи последовательности прямых и обратных (глобальных) движений в силу уравнения (4.23) введем некоторые операции, удобные для этих целей.

Сначала введем операции для описание прямых движений при некотором фиксированном значении $u_* \in U$. Мы считаем, что собственные числа матрицы $A(u_*)$ занумерованы в порядке возрастания их вещественных частей.

1. Пусть сферы S^{q_1} и S^{q_2} размерности q_1 и q_2 являются инвариантными множествами системы вида (4.23). Заметим, что сферы S^{q_1} и S^{q_2} можно считать вложенными в пространство R^{n+1}. При этом они имеют вид $S^{q_1} = R^{q_1+1} \cap S^n$ и $S^{q_2} = R^{q_2+1} \cap S^n$, где R^{q_1+1}, R^{q_2+1} – инвариантные подпространства матрицы $A(u_*)$, отвечающие соответственно наборам собственных чисел $\{\lambda_{i+l}\}_{l=0}^{q_1}, \quad \{\lambda_{j+k}\}_{k=0}^{q_2}$, причем комплексно-сопряженные пары попадают в одну подгруппу индексов и для любых пар индексов, входящих в разные поднаборы, справедливо неравенство $\operatorname{Re}\lambda_{i+l} < \operatorname{Re}\lambda_{j+k}$.

Рассмотрим операцию «$\to$», которая была введена ранее в формуле (3.5), для фиксированного значения u_*. Она будет отражать факт подчинения сфер S^{q_1} и S^{q_2}. Будем считать, что

$$(S^{q_1} \to S^{q_2}) \Longleftrightarrow W^u(S^{q_1}) \cap W^s(S^{q_2}) \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\lambda_{i+l} < \operatorname{Re}\lambda_{j+k} \neq \emptyset. \qquad (8.45)$$

В этом случае операцию «$\to$» будем интерпретировать как прямое движение от инвариантной сферы S^{q_1} к инвариантной сфере S^{q_2} при постоянном значении u_*. Операция «$\to$» обладает свойством транзитивности, т.е. если $(S^{q_1} \to S^{q_2})$ и $(S^{q_2} \to S^{q_3})$, то $(S^{q_1} \to S^{q_3})$.

2. Пусть S^{q_1}, S^{q_2} – две инвариантные сферы с подчинением $(S^{q_1} \to S^{q_2})$, причем не существует подгруппы индексов, расположенной между двумя ука-

занными подгруппами. Наименьшей сферой, содержащей сферы S^{q_1} и S^{q_2}, является сфера S^q размерности q, представимая в виде $S^q = R^{q+1} \cap S^n$, где R^{q+1} – инвариантное подпространство матрицы $A(u_*)$, отвечающее группе собственных чисел $\{\lambda_{i+l}\}_{l=0}^{q_1} \cup \{\lambda_{j+k}\}_{k=0}^{q_2}$. Очевидно, что $S^q = \overline{W^u(S^{q_1})} \cap \overline{W^s(S^{q_2})}$, где $q_1 + q_2 + 1 = q$. Будем говорить, что сфера S^q натянута на сферы S^{q_1} и S^{q_2} и отражать это свойство формулой $(S^{q_1} \to S^{q_2}) = S^{q_1+q_2+1}$. Легко проверить, что операция «$\to$» ассоциативна, т. е.

$$((S^{q_1} \to S^{q_2}) \to S^{q_3}) = (S^{q_1} \to (S^{q_2} \to S^{q_3})). \tag{8.46}$$

В силу ассоциативности операции «$\to$» скобки можно опускать.

Обратно, если для некоторой сферы S^q ей соответствующую группу собственных чисел можно разбить на две подгруппы, которым соответствуют две её подсферы S^{q_1} и S^{q_2}, причем $q = q_1 + q_2 + 1$, то $S^{q_1+q_2+1} = (S^{q_1} \to S^{q_2})$.

3. Будем обозначать посредством включения $S^j \subset S^i$, что сфера S^j содержится в сфере S^i, и посредством проектирования $S^i \supset S^j$, что сфера S^i содержит сферу S^j. С помощью операции «$\subset$» мы будем из сферы $S^{q_1+q_2+1} = (S^{q_1} \to S^{q_2})$ выделять сферу S^{q_1}, т. е.

$$S^{q_1} \subset (S^{q_1} \to S^{q_2}),$$

а с помощью операции «$\supset$» мы будем из сферы $S^{q_1+q_2+1} = (S^{q_1} \to S^{q_2})$ выделять сферу S^{q_2}, т. е.

$$(S^{q_1} \to S^{q_2}) \supset S^{q_2}.$$

4. Далее введем операцию, используемую для описания обратных движений. Эта операция будет использоваться для описаний переключений базовых управлений с u' на u''.

Сопоставим сфере $S^s \subset S^n$ размерности s, где $1 \leq s \leq n$, трансверсальную сферу $S^{n-s+p} \subset S^n$ размерности $n-s+p$, зависящую от параметра p, где $1 \leq n-s+p \leq n$, обладающую свойством

$$S^s \cap S^{n-s+p} = S^p, \quad 0 \leq p \leq n. \tag{8.47}$$

Очевидно, введенная операция не однозначна, т. е. сфере S^s можно сопоставить любую сферу S^{n-s+p}, имеющую с ней непустое пересечение. Эту операцию сопоставления будем обозначать «$\curvearrowright$», таким образом,

$$S^s \curvearrowright S^{n-s+p}.$$

Далее, применяя введенные операции, будем строить множества $N_i = S^{n_i}$, $M_i = S^{m_i}$, S^{s_i}, $S^{p_{i,i+1}}$, определенные формулами (3.9), (3.10). Алгоритм пересчета размерностей этих множеств дан в формуле (3.16). Процесс начинается при $n_1 = n, m_1 = s_1$ и заканчивается при $n_k = s_k, m_k = n$.

Цепь преобразований множества $X = S^n(\vec{u}_1)$ в множество $X = S^n(\vec{u}_k)$ задается следующей ниже последовательностью преобразований, которые сгруппированы в k шагов. Для простоты обозначений в схеме (8.48) не отражена зависимость сфер от $\vec{u}_i, i = 1, \ldots, k$.

В формуле (8.48) множество $N_i = S^{n_i}$ начинает строку с номером i, множество $M_i = S^{m_i}$ заканчивает эту же строку, множество S_i (подчеркнуто волнистой линией) связывает множества N_i, M_i. Таким образом, $N_i \to S_i \to M_i$, где $i = 1, \ldots, k$. В строке с номером k в подчеркнутой сфере использовано условие (3.16). Пример использования введенных операций для описания управляемых движений дан в формуле (10.62).

$$
\begin{array}{r}
1. S^n = \left(S^{n-1-s_1} \to S^{s_1}\right) \supset S^{s_1} \curvearrowright \\
2. \quad \curvearrowright S^{n-s_1+p_{1,2}} \subset \\
\subset \left(S^{n-s_1+p_{1,2}} \to S^{s_1-p_{1,2}-1}\right) = \\
= \left(\left(S^{n-1-s_1-s_2+p_{1,2}} \to S^{s_2}\right) \to S^{s_1-p_{1,2}-1}\right) = \\
= \left(S^{n-1-s_1-s_2+p_{1,2}} \to \left(S^{s_2} \to S^{s_1-p_{1,2}-1}\right)\right) = \\
= \left(S^{n-1-s_1-s_2+p_{1,2}} \to S^{s_1+s_2-p_{1,2}}\right) \supset \\
\supset S^{s_1+s_2-p_{1,2}} \curvearrowright \\
3. \quad \curvearrowright S^{n-s_1-s_2+p_{1,2}+p_{2,3}} \subset \\
\subset \left(S^{n-s_1-s_2+p_{1,2}+p_{2,3}} \to \left(S^{s_1+s_2-p_{1,2}-p_{2,3}-1}\right)\right) = \\
= \left(S^{n-1-s_1-s_2-s_3+p_{1,2}+p_{2,3}} \to S^{s_3}\right) \to S^{s_1+s_2-p_{1,2}-p_{2,3}-1}\Big)\Big) = \\
= \left(S^{n-1-s_1-s_2-s_3+p_{1,2}+p_{2,3}} \to \left(S^{s_3} \to S^{s_1+s_2-p_{1,2}-p_{2,3}-1}\right)\right) = \\
= \left(S^{n-1-s_1-s_2-s_3+p_{1,2}+p_{2,3}} \to S^{s_1+s_2+s_3-p_{1,2}-p_{2,3}}\right) \supset \\
\supset S^{s_1+s_2+s_3-p_{1,2}-p_{2,3}} \curvearrowright \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
i. \quad \curvearrowright S^{n-s_1-\cdots-s_{i-1}+p_{1,2}+\cdots+p_{i-1,i}} \subset \\
\subset \left(S^{n-s_1-\cdots-s_{i-1}+p_{1,2}+\cdots+p_{i-1,i}} \to S^{s_1+\cdots+s_{i-1}-p_{1,2}-\cdots-p_{i-1,i}-1}\right) = \\
= \left(\left(S^{n-1-s_1+\cdots-s_{i-1}-s_i+p_{1,2}+\cdots+p_{i-1,i}} \to S^{s_i}\right) \to S^{s_1+\cdots+s_{i-1}-p_{1,2}-\cdots-p_{i-1,i}-1}\right) = \\
= \left(S^{n-1-s_1+\cdots-s_{i-1}-s_i+p_{1,2}+\cdots+p_{i-1,i}} \to \left(S^{s_i} \to S^{s_1+\cdots+s_{i-1}-p_{1,2}-\cdots-p_{i-1,i}-1}\right)\right) = \\
= \left(S^{n-1-s_1+\cdots-s_{i-1}-s_i+p_{1,2}+\cdots+p_{i-1,i}} \to S^{s_1+\cdots+s_{i-1}+s_i-p_{1,2}-\cdots-p_{i-1,i}}\right) \supset \\
\supset S^{s_1+\cdots+s_{i-1}+s_i-p_{1,2}-\cdots-p_{i-1,i}}\Big) \curvearrowright \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k. \quad \curvearrowright S^{n-s_1-\cdots-s_{k-1}+p_{1,2}+\cdots+p_{k-1,k}} \subset \\
\subset \left(\underline{S^{n-s_1-\cdots-s_{k-1}+p_{1,2}+\cdots+p_{k-1,k}}} \to S^{s_1+\cdots+s_{k-1}-p_{1,2}-\cdots-p_{k-1,k}-1}\right) = \\
= \left(S^{s_k} \to S^{s_1+\cdots+s_{k-1}-p_{1,2}-\cdots-p_{k-1,k}-1}\right) = \\
= S^{s_1+\cdots+s_{k-1}+s_k-p_{1,2}-\cdots-p_{k-1,k}} = S^n.
\end{array}
\tag{8.48}
$$

9 Спектральная характеристика линейных по состояниям систем

В этом разделе мы установим, когда существуют значения управляющих параметров $u_i, i = 1, \ldots, k$, обеспечивающие существование последовательности обратных движений вида (3.7). Существование этой последовательности является главным предположением теоремы 1. Это можно сделать посредством анализа спектральной характеристики матричного семейства $A(u), u \in U$, введенной в этом разделе. А именно, с помощью спектральной характеристики можно выяснить, существуют ли такие наборы базовых управлений, которые обеспечивают существование цепочки обратных движений вида (3.7). При существовании таких наборов их можно найти, используя численные методы и методы компьютерной графики. Примеры соответствующих графиков спектральных функций даны далее.

Для матричного семейства $A(u), u \in U$, где $U \subset R^m$, рассмотрим уравнение

$$\det(A(u) - \lambda E) = 0, \tag{9.49}$$

которое задает неявную комплекснозначную функцию $\lambda(u)$. Вещественная часть $\operatorname{Re}\lambda(u)$ этой функции называется спектральной характеристикой линейной по состояниям системы управления вида (4.17).

Запас неуправляемых возвратных движений зависит от степени колебательности динамической системы, которая при фиксированном значении u может быть охарактеризована количеством пар комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы $A(u)$ этой системы. Если все собственные числа вещественные, то степень колебательности считается равной нулю.

В работе был [12] рассмотрен некоторый класс систем управления, имеющих так называемые тривиальные спектральные характеристики. Было показано, что для таких систем существуют цепочки обратных движений. Напомним, что спектральная характеристика называется тривиальной, если выполнены следующие условия. Во-первых, график её функции является связным множеством в пространстве $U \times R$ с системой координат $(u, \operatorname{Re}\lambda)$. Во-вторых, существует набор $\{u_i\}_i^n$ базовых значений управляющего параметра, что для каждого базового значения u_i имеется не более одной пары комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы $A(u_i)$ (случай минимальной колебательности). В-третьих, ни для какого значения u_i, $i = 1, \ldots, n$ не может быть равенства $\alpha(u_i) = \lambda(u_i)$, где $\alpha(u_i)$ – вещественная часть комплексно-сопряженной пары собственных чисел $\alpha(u_i) \pm i\beta(u_i)$, $\lambda(u_i)$ – вещественное собственное число.

В настоящей работе рассматриваются другие виды спектральных характеристик, для которых существуют цепочки обратных движений. В частности, рассматриваются случаи, когда для базовых значений управляющего параметра u_i допускается существование более одной пары комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы $A(u_i)$ и кроме того, допускаются равенства вещественных частей собственных чисел. В этих случаях управляемость системы можно обеспечить меньшим числом базовых значений управляющего параметра. Эта возможность связана с тем, что для систем вида (6.33) или (6.36) имеется более богатое по сравнению со случаем из работы [12] множество неуправляемых возвратных движений.

10 Управляемость проекций линейных систем на сферу S^n для скалярного управляющего параметра

Пусть $\dim U = 1$. Мы изучим зависимость числа k, где $1 \leq k \leq n$, базовых значений управляющего параметра, достаточных для управляемости, от порядка n системы управления.

В случае аналитических матричных семейств $A(u), u \in U$ общего положения для почти всех значений параметра u матрица $A(u)$ размерности $n+1$ имеет только простые собственные числа. Мы будем предполагать, что значениям $u_* \in U_0$, где U_0 – множество значений базовых управлений, отвечают матрицы $A(u_*)$ с простыми собственными числами. В пространстве состояний системы (4.23), т. е. в сфере S^n, простому вещественному собственному числу $\lambda(u_*)$ матрицы $A(u_*)$ соответствует инвариантная сфера $S^0(u_*)$ (две точки покоя), а простой комплексно-сопряженной паре собственных чисел $\alpha(u_*) \pm \beta(u_*)$ соответствует инвариантная сфера $S^1(u_*)$ (окружность). У простых собственных чисел матрицы $A(u_*)$ могут совпадать их вещественные части. Это будет происходить при тех значениях параметра u_*, которые соответствуют точкам пересечения ветвей графика спектральной характеристики, т. е. точкам с координатами (u_*, λ_*). Заметим, что в случае матричного семейства общего положения с одномерным параметром в каждой точке вида (u_*, λ_*) могут пересекаться не более двух ветвей функции (9.49) и эти ветви пересекаются трансверсально.

Будем различать следующие два случая. Случай пересечения ветви

Рис. 2: График зависимостей от параметра u вещественных частей собственных чисел матрицы $A(u)$ третьего порядка.

комплексно-сопряженных собственных чисел с ветвью вещественных собственных чисел и случай пересечения двух ветвей комплексно-сопряженных собственных чисел. (подробности см. в [4]). Таким образом, в первом случае для некоторого значения u_* базового управляющего параметра выполнено условие

$$\alpha_i(u_*) = \lambda_{l+1}(u_*), \tag{10.50}$$

где $\beta_i(u_*) \neq 0$; в втором случае для некоторого значения u_* базового управляющего параметра выполнено условие

$$\alpha_i(u_*) = \alpha_j(u_*), \tag{10.51}$$

где $\quad \beta_i(u_*) \neq \beta_j(u_*)$, $\beta_i(u_*) \neq 0$, $\beta_j(u_*) \neq 0$.

Следовательно, при $n \geq 2$ условию (10.50) соответствует инвариантная сфера $S^2(u_*)$, а при $n \geq 3$ условию (10.51) соответствует инвариантная сфера $S^3(u_*)$. Все остальные случае пересечения ветвей не являются случаями общего положения для управляющего одномерного ($m = 1$) параметра u и не рассматриваются.

Таким образом, для одномерных управляющих воздействий сфера $S^3(u_*) \subset S^n$ является максимально возможным подмножеством, которое образовано только возвратными траекториями при фиксированном значении управляющего параметра u_*. Поэтому с помощью одного базового значения управляющего параметра u_* можно управлять угловыми координатами посредством локальных управлений только для линейных систем до порядка $n + 1 = 4$ включительно.

В случае произвольного значения параметра n достаточное число k различных управляющих воздействий определяется тем обстоятельством, за

Рис. 3: Графики зависимостей от параметра u вещественных частей собственных чисел матрицы $A(u)$ четвертого порядка.

сколько шагов сфера S^n может быть пройдена по схеме (8.48) посредством обратных движений вида (3.7) по трехмерным сферам, где $S_i(u_i) = S^3(u_i)$, $i = 1, \ldots, k$. См. ниже формулу (10.61) и формулу (10.62). Таким образом, в рамках данного метода управления число k базовых значений одномерного управляющего параметра u имеет следующую оценку снизу (см. также формулу 11.66):

$$k \geq \left[\frac{n-1}{3}\right] + 1. \tag{10.52}$$

Из этой формулы следует, что двумя базовыми значениями ($k = 2$) можно управлять угловыми координатами линейных систем до порядка $n + 1 = 7$ включительно, а тремя базовыми значениями ($k = 3$) можно управлять линейными системами до порядка $n + 1 = 10$ включительно.

Примеры графиков спектральной характеристик, соответствующих этим случаям, даны на рис. 2 – 7, причем на правом графике в крупном масштабе дана центральная часть левого графика.

10.1 Построение модели линейной по состояниям системы и исследование ее управляемости

Введем квадратные матрицы второго порядка

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.53}$$

и образуем матрицу $B(\alpha, \gamma, \delta) = \alpha(I + \gamma K) + \delta K$, где α, γ, δ – некоторые скалярные параметры. При условии $|\alpha| < \frac{\delta}{\gamma}$, где $\gamma > 0, \delta > 0$, собственные числа λ матрицы B являются комплексно-сопряженными, т. е. $\lambda = \alpha \pm \beta i$, где $\beta = \sqrt{\alpha^2\gamma^2 - \beta^2} > 0$. Многокомпонентному параметру $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ соответствует квазидиагональная матрица

$$\overline{B}(\overline{\alpha}, \gamma, \delta) = \operatorname{diag}\{B(\alpha_1, \gamma, \delta), \dots, B(\alpha_l, \gamma, \delta)\}. \qquad (10.54)$$

Пусть параметр α является функциональным, т. е. $\alpha = \alpha(u), u \in U$. Тогда $\beta = \beta(u)$. Определим матричную функцию параметра u

$$\overline{B}(\overline{\alpha}(u), \gamma, \delta) = \operatorname{diag}\{B(\alpha_1(u), \gamma, \delta), \dots, B(\alpha_l(u), \gamma, \delta)\}. \qquad (10.55)$$

Для простоты будем рассматривать линейные функции $\alpha_i(u) = \alpha_i^0 + \alpha_i^1 u$, $i = 1, \dots, l$. Очевидно,

$$\overline{B}(\overline{\alpha}(u), \gamma, \delta) = \overline{B}(\overline{\alpha}^1, \gamma, 0)u + \overline{B}(\overline{\alpha}^0, \gamma, \delta) := B_1 u + B_0 = B(u). \qquad (10.56)$$

Далее возмутим квазидиагональную матрицу $B_1 u + B_0$ некоторой малой матрицей $C(\varepsilon)$, чтобы обеспечить локальную управляемость матричной функции $A(u) = B(u) + C(\varepsilon)$. Для простоты $C(\varepsilon) = C_1\varepsilon$. При линейной зависимости от параметра u и от параметра ε матрица $A(u) = A_1 u + A_0$, где $A_1 = B_1, A_0 = B_0 + C_1\varepsilon$. Для обеспечения локальной управляемости для пары (A_1, A_0) нужно проверить выполнение условий (5.25).

Очевидно, вещественные части собственных чисел матрицы $A(u)$

$$\operatorname{Re}\lambda_i(u, \varepsilon) = \alpha_i(u) + O(\varepsilon) \quad i = 1, \dots, l. \qquad (10.57)$$

Пример. Рассмотрим числовой пример линейной системы восьмого порядка, т. е. $l = 4$. Пусть $\varepsilon = 0.1$ и

$$\alpha_1(u) = u, \quad \alpha_2(u) = -u, \quad \alpha_3(u) = 2u - 1, \quad \alpha_4(u) = -2u + 1.$$

Матрица $A(u)$ имеет вид

$$A(u) = \begin{pmatrix} 1.5u & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & -0.1 & 0.1 & -0.2 \\ -1 & 0.5u & 0.2 & -0.1 & 0.2 & 0.1 & -0.1 & 0.2 \\ -0.1 & -0.1 & -1.5u & 1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & -1 & -0.5u & 0.1 & -0.1 & -0.2 & 0.1 \\ -0.1 & -0.2 & -0.1 & 0. & 3u - 1.5 & 1 & 0.2 & 0.1 \\ -0.2 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -1 & u - 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.2 & 0.1 & -3u + 1.5 & 1 \\ 0.1 & -0.1 & -0.2 & 0.1 & -0.1 & -0.2 & -1 & -u + 0.5 \end{pmatrix}$$

Рис. 4: Графики зависимостей от параметра u вещественных частей собственных чисел матрицы $A(u)$ пятого порядка.

Для этой матрицы рассмотрим систему управления $\dot{x} = A(u)x$ с пространством состояний R^8. Тогда пространством состояний по угловым переменным будет сфера S^7. Решая уравнения

$$\alpha_1(u) = \alpha_3(u), \quad \alpha_1(u) = \alpha_2(u), \quad \alpha_2(u) = \alpha_3(u), \tag{10.58}$$

мы найдем значения

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{1}{3}, \tag{10.59}$$

которые можно принять за базовые значения управляющих переменных. Этим значениям параметров соответствуют трехмерные инвариантные сферы

$$S^3(u_0; \alpha_1, \alpha_3), \quad S^3(u_1; \alpha_1, \alpha_2), \quad S^3(u_2; \alpha_2, \alpha_3), \tag{10.60}$$

которые будут элементами последовательности обратных движений.

Предположим теперь, что нам неизвестна история происхождения матрицы $A(u)$ восьмого порядка. Однако, по этой матрице мы можем найти всю информацию, достаточную для управления системой. График спектральной характеристики этой матрицы дан на рис. 7, который построен с помощью пакета символьных вычислений MAPLE.

Из формулы (10.52) следует, что для $n + 1 = 8$ минимальное количество управляющих воздействий $k = 3$. Из графика на рис. 7 можно найти три значения базовых управляющих переменных u_0, u_1, u_2, которым соответствуют три сферы вида (10.60) при этих значениях параметра u. Легко видеть, что

Рис. 5: Графики зависимостей от параметра u вещественных частей собственных чисел матрицы $A(u)$ шестого порядка.

эти значения u_0, u_1, u_2 отличаются от значений вида (10.59) лишь на величину порядка малости $O(\varepsilon)$, однако в силу грубости предлагаемой процедуры это не скажется на процессе управления.

Легко проверить, что матричное семейство $A(u)$ удовлетворяет условию (5.25) локальной управляемости вдоль траекторий при постоянных значениях параметра u. Для этого нужно использовать представление матрицы $A(u) = A_1 u + A_0$, последовательно определить столбцы матрицы C из формулы (5.25) и вычислить определитель, составленный из этих столбцов.

Покажем, что последовательность

$$S^3(u_0; \alpha_1, \alpha_3) \to S^3(u_1; \alpha_1, \alpha_2) \to S^3(u_2; \alpha_2, \alpha_3). \qquad (10.61)$$

действительно является последовательностью обратных движений.

На начальном шаге используют базовое управление u_0 для того, чтобы из произвольной начальной точки пространства состояний S^7 перейти на сферу $S^3(u_0; \alpha_1, \alpha_3)$, соответствующую условию равенства вещественных частей собственных чисел $\alpha_1(u_0) = \alpha_3(u_0)$, которая является стоком. Сфера $S^3(u_0; \alpha_1, \alpha_3)$ пересекается со сферой $S^5(u_1; \alpha_3; \alpha_1, \alpha_2)$, соответствующей значениям $\alpha_1(u_1), \alpha_2(u_1), \alpha_3(u_1)$. Пересечением является сфера $P_{0,1}(u_0, u_1)$ размерности $p_{0,1}(u_0, u_1) = 1$. Для сферы $S^5(u_1; \alpha_3; \alpha_1, \alpha_2)$ стоком является ее часть в виде сферы $S^3(u_1; \alpha_1, \alpha_2)$, которая соответствует условию $\alpha_1(u_0) = \alpha_2(u_0)$. В свою очередь сфера $S^3(u_1; \alpha_1, \alpha_2)$ является источником для сферы $S^5(u_1; \alpha_1, \alpha_2; \alpha_4)$. Сфера $S^5(u_1; \alpha_1, \alpha_2; \alpha_4)$ пересекается со сферой $S^3(u_2; \alpha_2, \alpha_3)$, соответствующей условию $\alpha_2(u_0) = \alpha_3(u_0)$. Эта сфера является

Рис. 6: Графики зависимостей от параметра u вещественных частей собственных чисел матрицы $A(u)$ седьмого порядка.

источником для всего пространства состояний S^7 при $u = u_2$. Таким образом, с помощью управляемых движений перейти из любой начальной точки сферы S^7 в любую конечную точку той же сферы S^7. Это словесное описание процесса управление может быть заменено следующей формальной записью

$$\begin{aligned} S^7 = [S^3(u_0;\alpha_4;\alpha_2) \to S^3(u_0;\alpha_1,\alpha_3)] \supset S^3(u_0;\alpha_1,\alpha_3)] \curvearrowright \\ \curvearrowright S^5(u_1;\alpha_3;\alpha_1,\alpha_2) \subset [S^5(u_1;\alpha_3;\alpha_1,\alpha_2) \to S^1(u_1;\alpha_4)] = \\ = [[(S^1(u_1;\alpha_3) \to S^3(u_1;\alpha_1,\alpha_2)] \to S^1(u_1;\alpha_4)] = \\ = [S^1(u_1;\alpha_3) \to [S^3(u_1;\alpha_1,\alpha_2) \to S^1(u_1;\alpha_4)]] = \\ = [S^1(u_1;\alpha_3) \to S^5(u_1;\alpha_1,\alpha_2;\alpha_4)] \supset S^5(u_1;\alpha_1,\alpha_2;\alpha_4) \curvearrowright \\ \curvearrowright S^3(u_2;\alpha_2,\alpha_3) \subset [S^3(u_2;\alpha_2,\alpha_3) \to S^3(u_2;\alpha_1,\alpha_4)] = S^7. \end{aligned} \tag{10.62}$$

11 Управляемость проекций линейных систем на сферу S^n для многомерного управляющего параметра

Другой возможностью (кроме увеличения числа базовых управляющих воздействий) обеспечить существование цепочки обратных движений в пространстве состояний S^n размерности n является наличие управляющего пространства U достаточно высокой размерности m. Далее мы выясним, как должна зависеть размерность m от размерности n, чтобы обеспечить управляемость системы, а также какое минимальное число k значений базовых

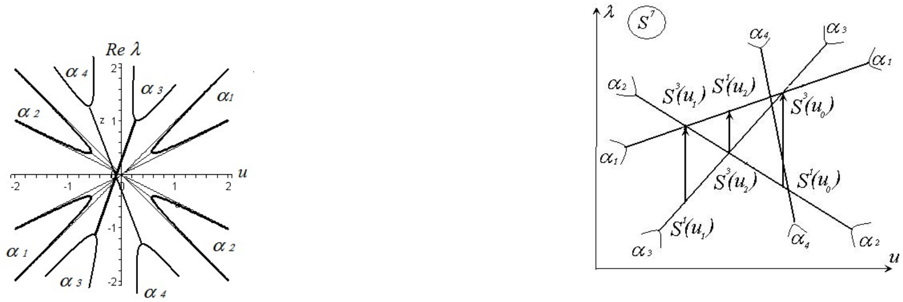

Рис. 7: Графики зависимостей от параметра u вещественных частей собственных чисел матрицы $A(u)$ восьмого порядка.

управляющих необходимо для управляемости линейной системы по угловым координатам.

Для матричного семейства $A(\boldsymbol{u})$ размерности $n+1$, где $\boldsymbol{u} = (u^1, \dots, u^m) \in U \subset R^m$ – параметризующее множество, спектральная характеристика, определяемая уравнением $\det(A(\boldsymbol{u}) - \lambda I) = 0$ вида (9.49), имеет $n+1$ ветвь. Каждая ветвь является некоторой m-мерной поверхностью, а именно для каждой ветви графика точки $\{(\boldsymbol{u}, \operatorname{Re}\lambda)\} \in R^m \times R^1 = R^{m+1}$.

Предположим, что l ветвей графика пересекаются при некотором значении $\boldsymbol{u}_*$, т. е. матрица $A(\boldsymbol{u}_*)$ имеет l пар комплексно-сопряженных собственных чисел с одинаковыми вещественными частями. Тогда с динамической точки зрения условие

$$\alpha_{i_1}(\boldsymbol{u}_*) = \dots = \alpha_{i_l}(\boldsymbol{u}_*) \qquad (11.63)$$

равенства вещественных частей собственных чисел означает, что для значения $\boldsymbol{u}_*$ существует инвариантная сфера $S^{2l-1}(\boldsymbol{u}_*) \subset S^n$, движения по которой по угловым координатам происходят в соответствии с уравнениями (6.33). Случай инвариантной сферы четной размерности для условия вида (6.35) рассматривается аналогично.

Для матричного семейства общего положения (см. [4]) в пространстве R^{m+1} может пересекаться не более $m+1$ ветвей спектральной характеристики, т. е.

$$l \leq m + 1. \qquad (11.64)$$

Размерность пересечения равна $m + 1 - l$. При $l = m + 1$ пересечение ветвей является одноточечным множеством в пространстве R^{m+1}, которому соответствует инвариантная сфера $S^{2m+1}(\boldsymbol{u}_*) \subset S^n$. Таким образом, в случае общего положения на число m накладывается условие

$$2m+1 \leq n. \tag{11.65}$$

Справедлива теорема.

Теорема 2 *Пусть существует последовательность обратных движений $S_1 \to \cdots \to S_k$ вида (3.7), где $S_i = S^{s_i}$, $s_i \leq 2m+1$, $i = 1, \ldots, k$.*

Тогда при управлении по угловым переменным число k базовых управлений удовлетворяет условию

$$k \geq \left[\frac{n-1}{2m+1}\right] + 1, \tag{11.66}$$

где квадратные скобки означают целую часть числа.

Доказательство. Из условия (3.16) следует, что число переключений управлений будет тем меньше, чем больше будет размерность $s_i = \dim S_i$ и меньше размерность пересечений $p_{i,i+1} = \dim P_{i,i+1}$, $i = 1, \ldots, k$. Обозначим $s = 2m+1$, тогда $s_i \leq s$, $p_{i,i+1} \geq 0$. Рассмотрим сначала случай, когда размерность n пространства состояний кратна числу s, т. е. $n = k_0 s$ для некоторого натурального k_0. Если формуле (3.16) положить $s_i = s$ и $p_{i,i+1} = 0$, где $i = 1, \ldots, k$, то она примет вид $n = k_0 s$, т. е. пространство состояний S^n можно пройти по схеме (8.48) за k_0 шагов. Это наиболее благоприятный случай с точки зрения наименьшего количества шагов, т. е. $k \geq k_0$. Но тогда пространства состояний размерности $sk_0 - j$, где $j = 1, \ldots, s-1$, также можно пройти не быстрее, чем за k_0 шагов. Таким образом, пространство состояний размерности $(k_0-1)s_0+1$ можно пройти за k_0 шагов, а пространства состояний размерности $(k_0-1)s$ можно пройти за k_0-1 шаг. Отсюда следует, что $k_0 = \left[\frac{n-1}{s}\right] + 1$, т. е. справедлива формула (11.66). Теорема доказана.

Теперь приведем окончательную схему управления по угловым координатам линейной по состояниям системой вида $\dot{x} = A(\boldsymbol{u})x$ с матрицей $A(\boldsymbol{u})$ размерности $n+1$, которая имеет управляющее пространство $U = \{\boldsymbol{u}\}$ размерности m, удовлетворяющее условию (11.65).

Для этой системы рассматривают ее спектральная характеристика и из анализа свойств этой спектральной характеристики выясняют, существует ли набор базовых управлений $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$, такой что для каждого $\boldsymbol{u}_* = \boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, k$ выполнено условие вида (11.63) с некоторым $l_i \leq m+1$. Это условие означает, что существует инвариантная сфера $S^{s_i}(\boldsymbol{u}_i)$, где $s_i = 2l_i - 1 <$

$2m+1$, все точки окрестности которой достижимы друг из друга посредством локальных управлений $\Delta u \le \overline{\Delta}$. Для нахождения набора базовых управлений на графике спектральной характеристики находят все точки пересечения ветвей и выбирают нужные. Далее для выбранных значений $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ с помощью схемы (8.48) проверяют, действительно ли последовательность

$$S^{s_1}(\boldsymbol{u}_1) \to \dots \to S^{s_k}(\boldsymbol{u}_k)$$

является последовательностью обратных движений вида (3.7), что гарантирует управляемость системы.

Напомним, что мы рассматриваем матричные семейства $A(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in U$ общего положения. Например, эти семейства являются аналитическими функциями с соответствующей нормой. Для таких семейств число k базовых управлений удовлетворяет условию (11.65). Для семейств $A(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in U$ общего положения для почти всех наборов $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ выполнены условие (5.25) локальной управляемости, условие (3.8) трансверсальности элементов последовательности обратных движений и условие (11.64) для пересечения ветвей графика спектральной характеристики. Эти условия сохраняются при малых деформациях семейств. Если мы нашли набор $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ базовых управлений с некоторой малой погрешности, то эта погрешность может быть скомпенсирована с помощью локальных управлений, допустимый уровень $\overline{\Delta}$ которых должна быть больше этой погрешности.

Очевидно, для любых n и m можно указать семейство $A(\boldsymbol{u})$ не общего положения, когда можно добиться полной управляемости при любом $k \ge 1$.

12 Заключение

В работе изложен метод построения обратных управляемых движений, который позволяет формировать запас возвратных движений, достаточный для полной управляемости системы. Показано применение метода к исследованию управляемости линейных по состояниям систем управления.

В данной работе мы осуществляли построение управлений с учетом их грубости в том смысле, что если матричное семейство $A(u)$, задающее линейную систему, немного возмущено, то управления, построенные предложенным методом, оказывается пригодным и для возмущенного матричного семейства. При этом корректировка базовых управлений может быть произведена использованием локальных управлений. Такие системы являются системами общего положения. Они в определенном смысле составляют большинство линейных по состояниям систем управления.

Линейные по состояниям системы управления могут иметь различные степени колебательности. В работе [10] были рассмотрены системы с минимальной степенью колебательности для случая размерности пространства управлений $m = 1$, т. е. для скалярного управления. В этом случае для построения достаточного множества возвратных движений требуется $k = n$ базовых управляющих воздействий, где n - размерность пространства состояний.

В настоящей работе были рассмотрены линейные системы с произвольной положительной степенью колебательности, для которых получены достаточные условия управляемости. Эти классы обладают той особенностью, что при неизменных (постоянных) управлениях изначально имеется некоторое множество неуправляемых возвратных движений, причем тем обширнее, чем выше степень колебательности. В работе дана оценка для минимального значения k, достаточного для управляемости, через параметры n и m. Показано, что для построения достаточного множества возвратных движений всегда требуется $1 \leq k \leq n$ базовых управляющих воздействия. Из анализа доказательств можно сделать следующий вывод. В случае проектирования систем с векторными управлениями размерность m этих векторов не имеет смысла брать более половины (примерно) размерности n пространства состояний (см. формулу (11.65)), так как при таком выборе обеспечивается максимальная степень колебательности, возможная для систем, находящихся в общем положении. В этом случае можно использовать всего одно переключение управлений (см. формулу (11.66)). Таким образом, во всех случаях общее количество используемых для управления переменных оказывается равным размерности пространства состояний. Однако, в последнем случае две группы управляющих параметров могут быть настроены заранее, т. е. до процесса управления, и в процессе управления нужно осуществить смену (переключение) этих групп лишь один раз.

Во всех случаях для линейных колебательных систем достаточный конечный набор значений базовых управлений может быть найден с помощью спектральной характеристики матричного семейства $A(u)$. Графики типовых спектральных характеристик можно найти найти в статье [12]. Для найденного набора значений базовых управлений предложен формальный способ записи управляемых движений, см. формулы (8.48), (10.62).

Если система управления обладает нулевой степенью колебательности, т. е. для любого $u \in U$ матрица $A(u)$ имеет только вещественные собственные числа, то для определения существования достаточного множества базовых управляющих значений требуется, кроме исследования спектральной характеристики, провести проверку так называемых условий зацепляемости инвариантных множеств различных степеней устойчивости при изменении управляющего параметра $u \in U$. Примеры соответствующих систем приведены в работах, [10, 11], а также [13].

Предлагаемый метод может быть применен к произвольным системам, т. е. необязательно к проекциям линейных систем на сферы. В общем случае существование пересечений элементов последовательности обратных движений (см. формулы (3.5) – (3.6)) основано на следующих мотивировках. Во-первых, представляется, что инвариантные множества систем похожи на сферы в том, смысле, что диапазон изменения их кривизны не слишком велик. В противном случае для некоторых систем могут не пересекаться даже инвариантные множества достаточно высоких размерностей. Во-вторых, при изменении параметра $u \in U$ для выполнения условия зацепляемости инвариантных множеств, зависящих от этого параметра, требуется обеспечение существования достаточно обширного множества поворотов пространства состояний, [13]. Эти особенности структуры пространств состояний могут накладывать определенные ограничения на применение изложенного метода.

Список литературы

[1] *Калман Р.* Об общей теории систем управления. // Труды I конгресса ИФАК. изд-во АН СССР, 1961. Т.2. С. 521–547.

[2] *Sussmann H.J.* The control problem $\dot{x} = A(u)x$.// Chech. Math. J., 1972. V.22. No 3. P. 490-494.

[3] *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.

[4] *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978.

[5] Пилюгин С.Ю. Введение в грубые системы дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1988.

[6] *Brockett R.W.* System Theory on Group Manifolds Coset Spaces.// SIAM J. Conrt. and Optim., 1972. V.10. No 2. P. 265-284.

[7] *Bonnard B.* Controllability des systemes bilineares. //Math Syst. Theory, 1981. V. 15. No 1. P. 79-92.

[8] *Lobry C.* Controllability of nonlinear control dynamical systems.//SIAM J. Contr. and Optim., 1974. V. 12. No.1. P. 1–4.

[9] *Вахрамеев С.А., Сарычев А.В.* Геометрическая теория управления.// В кн.: Итоги науки и техники (алгебра, топология, геометрия), Т. 23, 1985. С. 197-280.

[10] *Хрящев С.М.* Спектральный метод исследования управляемости динамических систем вблизи инвариантных множеств.// Автоматика и телемеханика, 1998. №3. С. 29 - 42.

[11] *Хрящев С.М.* Об управляемости линейных по состоянию динамических систем.//Автоматика и телемеханика, 2000. №10. С. 59 - 71.

[12] *Хрящев С.М.* Проверка условий управляемости линейных по состоянию систем с помощью пакета символьных вычислений MAPLE.// Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2007. №1. С. 260 - 268.

[13] *Хрящев С.М.* Управление динамическими системами. Методы исследования систем с регулярным и хаотическим поведением траекторий. Издательство LAP (LAMBERT Academic Publishing), 2011. ISBN 978-3-8433-0802-1.