ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

УДК 517.955

Симметрии уравнений динамики политропного газа с самогравитацией

И.И. Клебанов[1,2], С.А. Иванов[2], О.В. Маслова[1]

1 Южно-уральский государственный гуманитарно-педагогический университет,
454080 г. Челябинск проспект Ленина 69
2 Южно-уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)
454080 г. Челябинск проспект Ленина 76

Аннотация

Установлено, что система уравнений динамики идеального нерелятивистского самогравитирующего политропного газа допускает бесконечномерную алгебру Ли с четырьмя произвольными функциями времени. В отличие от случая произвольного уравнения состояния группа симметрий расширяется, допуская также неоднородные растяжения.

Ключевые слова: самогравитирующий политропный газ, уравнения движения, точечные симметрии

Abstract

It is established that the system of dynamics equations of non-relativistic polytropic perfect self-gravitating gas admits infinite-dimensional Lie algebra with four arbitrary functions of time. In contrast to the case of arbitrary state equation the group of symmetries is expanded, allowing also dilations.

Keywords:polytropic self-gravitating gas, dynamics equations, Lie point symmetries

1 Введение

В работах [1, 2] был проведен групповой анализ и найдены частные инвариантные решения модели "Ньютоновская космология которая является базисной при моделировании крупномасштабной структуры Вселенной [3]. Модель представляет собой систему уравнений динамики нерелятивистского самогравитирующего газа с нулевым давлением [1, 2]. Область применимости модели можно расширить, если учесть истинное уравнение состояния газа. В этом случае модель может применяться в теории образования звезд из межзвездного газа [3]. В настоящей работе мы проведем групповой анализ системы уравнений нерелятивистского самогравитирующего политропного газа. Предположение о политропном уравнении состояния принимается в большинстве исследований и хорошо согласуется с данными эксперимента[3]. Опыт исследования дифференциалных уравнений классической газодинамики [4] показал полезность применения методов группового анализа, позволяющего в принципе получить полный список точно решаемых подмоделей, имеющих физический смысл и необходимых для тестирования численных и приближенных аналитических методов решения. Наша цель — вычисления алгебры Ли, допускаемой системой уравнений динамки политропного самогравитирующего газа с целью дальнейшей разработки программы "Подмодели аналогичной программе Л.В. Овсянникова для классической газодинамики [4]. Случаи нулевого давления и произвольного уравнения состояния рассмотрены в работах [1, 5].

2 Вычисление алгебр Ли

Рассматривается система уравнений динамики идеального нерелятивистского самогравитирующего политропного газа. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \overrightarrow{v}) = 0, \\ \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \nabla) \overrightarrow{v} + \nabla \Phi + \nabla p / \rho = 0, \\ \Delta \Phi = 4 \pi G \rho, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \overrightarrow{v} \nabla p + \gamma p \nabla \overrightarrow{v} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где ρ — плотность жидкости, p — давление, Φ — гравитационный потенциал, $\overrightarrow{v}$ — скорость, G — гравитационная постоянная, γ — показатель политропы, ∇ — оператор Гамильтона, Δ — оператор Лапласа [4].

Перепишем систему уравнений (1) (в безразмерных переменных) в декартовых координатах

$$
\begin{cases}
\rho_t + \rho(u_x + v_y + \omega_z) + u\rho_x + v\rho_y + \omega\rho_z = 0 \\
u_t + uu_x + vu_y + \omega u_z + \Phi_x + p_x/\rho = 0 \\
v_t + uv_x + vv_y + \omega v_z + \Phi_y + p_y/\rho = 0 \\
\omega_t + u\omega_x + v\omega_y + \omega\omega_z + \Phi_z + p_z/\rho = 0 \\
\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} - \rho = 0 \\
p_t + up_x + vp_y + \omega p_z + \gamma p(u_x + v_y + \omega_z) = 0
\end{cases}
\tag{2}
$$

где x, y, z — декартовы координаты, t — время, u, v, ω — компоненты вектора скорости.

Генератор группы будем искать в виде

$$
X = \xi^{(x)}\partial_x + \xi^{(y)}\partial_y + \xi^{(z)}\partial_z + \xi^{(t)}\partial_t + \eta^{(\Phi)}\partial_\Phi + \eta^{(\rho)}\partial_\rho + \eta^{(p)}\partial_p + \eta^{(u)}\partial_u + \eta^{(v)}\partial_v + \eta^{(\omega)}\partial_\omega,
\tag{3}
$$

где компоненты касательного векторного поля ξ и η являются функциями всех зависимых и независимых переменных [6].

Расчет по стандартному алгоритму Ли - Овсянникова [6] с применением пакета GeM [7] приводит к определяющим уравнениям

$$
\begin{cases}
\eta^{(u)}_{t,v} = \eta^{(u)}_{t,w} = \eta^{(v)}_{t,w} = \eta^{(u)}_{v,v} = \eta^{(u)}_{v,w} = \eta^{(u)}_{w,w} = \eta^{(v)}_{w,w} = \xi^{(t)}_x = 0, \\
\xi^{(x)}_x = \frac{1}{2}\frac{-2\eta^{(\rho)}p + \eta^{(p)}\rho}{\rho p}, \quad \xi^{(y)}_x = -\eta^{(u)}_v, \quad \xi^{(z)}_x = -\eta^{(u)}_w, \quad \eta^{(F)}_x = -\eta^{(u)}_t, \\
\eta^{(\rho)}_x = \eta^{(p)}_x = \eta^{(u)}_x = \eta^{(v)}_x = \eta^{(w)}_x = \xi^{(t)}_y = 0, \quad \xi^{(x)}_y = \eta^{(u)}_v, \quad \xi^{(z)}_y = -\eta^{(v)}_w, \\
\xi^{(y)}_y = \frac{1}{2}\frac{-2\eta^{(\rho)}p + \eta^{(p)}\rho}{\rho p}, \quad \eta^{(F)}_y = -\eta^{(v)}_t, \quad \xi^{(x)}_z = \eta^{(u)}_w, \quad \xi^{(y)}_z = \eta^{(v)}_w, \\
\eta^{(\rho)}_y = \eta^{(p)}_y = \eta^{(u)}_y = \eta^{(v)}_y = \eta^{(w)}_y = \xi^{(t)}_z = 0, \quad \xi^{(z)}_z = \frac{1}{2}\frac{-2\eta^{(\rho)}p + \eta^{(p)}\rho}{m\rho}, \\
\eta^{(F)}_z = -\eta^{(w)}_t, \quad \eta^{(\rho)}_z = \eta^{(p)}_z = \eta^{(u)}_z = \eta^{(v)}_z = \eta^{(w)}_z = 0, \quad \xi^{(t)}_t = -\frac{1}{2}\frac{\eta^{(\rho)}}{\rho}, \\
\xi^{(x)}_t = \frac{1}{2}\frac{-2\eta^{(u)}_w\rho wp - 2\eta^{(u)}_v\rho vp + \eta^{(\rho)}up - \eta^{(p)}\rho u + 2\eta^{(u)}\rho p}{\rho p}, \\
\xi^{(y)}_t \frac{1}{2}\frac{2\eta^{(u)}_v\rho up - 2\eta^{(v)}_w\rho wp + \eta^{(\rho)}vp - \eta^{(p)}\rho v + 2\eta^{(v)}\rho p}{\rho p}, \\
\xi^{(z)}_t = \frac{1}{2}\frac{2\eta^{(u)}_w\rho up + 2\eta^{(v)}_w\rho vp + \eta^{(\rho)}wp - \eta^{(p)}\rho w + 2\eta^{(w)}\rho p}{\rho p}, \\
\eta^{(\rho)}_t = \eta^{(p)}_t = \xi^{(t)}_\rho = \xi^{(x)}_\rho = \xi^{(y)}_\rho = \xi^{(z)}_\rho = \eta^{(F)}_\rho = 0, \quad \eta^{(\rho)}_\rho = \frac{\eta^{(\rho)}}{\rho}, \\
\eta^{(p)}_\rho = \eta^{(u)}_\rho = \eta^{(v)}_\rho = \eta^{(w)}_\rho = \xi^{(t)}_u = \xi^{(x)}_u = \xi^{(y)}_u = \xi^{(z)}_u = \eta^{(F)}_u = \eta^{(\rho)}_u = \eta^{(p)}_u = 0, \\
\eta^{(u)}_u = \frac{1}{2}\frac{-\eta^{(\rho)}p + \eta^{(p)}\rho}{\rho p}, \quad \eta^{(v)}_u = -\eta^{(u)}_v, \quad \eta^{(w)}_u = -\eta^{(u)}_w, \\
\xi^{(t)}_w = \xi^{(x)}_w = \xi^{(y)}_w = \xi^{(z)}_w = \eta^{(F)}_w = \eta^{(\rho)}_w = 0, \quad \eta^{(w)}_w = \frac{1}{2}\frac{-\eta^{(\rho)}p + \eta^{(p)}\rho}{\rho p}, \\
\xi^{(t)}_F = \xi^{(x)}_F = \xi^{(y)}_F = \xi^{(z)}_F = 0, \quad \eta^{(F)}_F = \frac{-\eta^{(\rho)}p + \eta^{(p)}\rho}{\rho p}, \\
\eta^{(\rho)}_F = \eta^{(p)}_F = \eta^{(u)}_F = \eta^{(v)}_F = \eta^{(w)}_F = \xi^{(t)}_p = \xi^{(x)}_p = \xi^{(y)}_p = \xi^{(z)}_p = \eta^{(F)}_p = \eta^{(\rho)}_p = 0, \\
\eta^{(p)}_p = \frac{\eta^{(p)}}{p}, \quad \eta^{(u)}_p = \eta^{(v)}_p = \eta^{(w)}_p = 0.
\end{cases}
\tag{4}
$$

Их решение дает бесконечномерную алгебру Ли с генераторами

$$\begin{aligned}
X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y, X_3 = \partial_z, X_4 = \partial_t \\
X_5 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_\omega - \omega\partial_v \\
X_6 = z\partial_x - x\partial_z + \omega\partial_u - u\partial_\omega \\
X_7 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u \\
X_8 = 2\Phi\partial_\Phi - 2\rho\partial_\rho + u\partial_u + v\partial_v + u\partial_\omega + t\partial_t + 2x\partial_x + 2y\partial_y + 2z\partial_z \\
X_9 = 2\rho\partial_\rho + 2p\partial_p - t\partial_t - x\partial_x - y\partial_y - z\partial_z \\
X_\infty^{(1)} = -F_{1,tt}x\partial_\Phi + F_{1,t}\partial_u + F_1(t)\partial_x \\
X_\infty^{(2)} = -F_{2,tt}y\partial_\Phi + F_{2,t}\partial_v + F_2(t)\partial_y \\
X_\infty^{(3)} = -F_{3,tt}z\partial_\Phi + F_{3,t}\partial_\omega + F_3(t)\partial_z \\
X_\infty^{(4)} = F_4(t)\partial_\Phi,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $F_i(t)$ - произвольные функции.

Генераторы X_1, X_2, X_3, X_4 соответствуют трансляциям,

X_5, X_6, X_7 - вращениям,

X_8, X_9 - неоднородным растяжениям,

$X_\infty^{(1)}, X_\infty^{(2)}, X_\infty^{(3)}$ являются обобщенными преобразованиями Галилея,

$X_\infty^{(4)}$ означает калибровочную инвариантность.

В случае $F_1(t) = F_2(t) = F_3(t) = t, F_4(t) = 0$ мы видим, что алгебра Ли (5) содержит подалгебру, соответствующую группе Галилея, что является необходимым условием механической обоснованности модели. Таким образом, в случае политропного газа алгебра Ли расширяется по сравнению с произвольным уравнением состояния [5], допуская неоднородные растяжения.

В последующих работах для реализации программы "Подмодели"мы возьмем за основу 13-ти мерную подалгебру с генераторами

$$\begin{aligned}
\hat{X}_1 = \partial_x, \quad \hat{X}_2 = \partial_y, \quad \hat{X}_3 = \partial_z, \quad \hat{X}_4 = \partial_t, \quad \hat{X}_5 = \partial_\Phi, \quad \hat{X}_6 = t\partial_x + \partial_u, \\
\hat{X}_7 = t\partial_y + \partial_v, \quad \hat{X}_8 = t\partial_z + \partial_\omega, \quad \hat{X}_9 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_\omega - \omega\partial_v, \\
\hat{X}_{10} = z\partial_x - x\partial_z + \omega\partial_u - u\partial_\omega, \quad \hat{X}_{11} = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \\
\hat{X}_{12} = 2\Phi\partial_\Phi - 2\rho\partial_\rho + u\partial_u + v\partial_v + \omega\partial_\omega + t\partial_t + 2x\partial_x + 2y\partial_y + 2z\partial_z, \\
\hat{X}_{13} = 2\rho\partial_\rho + 2p\partial_p - 2t\partial_t - x\partial_x - y\partial_y - z\partial_z.
\end{aligned} \tag{6}$$

Коммутаторы приведены в таблице 1.

Полученные результаты позволят в дальнейшем решить следующие задачи: расчет оптимальной системы подалгебр 13-ти мерной алгебры Ли (6),

Таблица 1: Таблица коммутаторов для 13-ти мерной подалгебры (6)

	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_2$	$\hat{X}_3$	$\hat{X}_4$	$\hat{X}_5$	$\hat{X}_6$	$\hat{X}_7$	$\hat{X}_8$	$\hat{X}_9$	$\hat{X}_{10}$	$\hat{X}_{11}$	$\hat{X}_{12}$	$\hat{X}_{13}$
$\hat{X}_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\hat{X}_3$	$\hat{X}_2$	$2\hat{X}_1$	$-\hat{X}_1$
$\hat{X}_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\hat{X}_3$	0	$-\hat{X}_1$	$2\hat{X}_2$	$-\hat{X}_2$
$\hat{X}_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\hat{X}_2$	$\hat{X}_1$	0	$2\hat{X}_3$	$-\hat{X}_3$
$\hat{X}_4$	0	0	0	0	0	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_2$	$\hat{X}_3$	0	0	0	$\hat{X}_4$	$-\hat{X}_4$
$\hat{X}_5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2\hat{X}_5$	0
$\hat{X}_6$	0	0	0	$-\hat{X}_1$	0	0	0	0	0	$-\hat{X}_8$	$\hat{X}_7$	$\hat{X}_6$	0
$\hat{X}_7$	0	0	0	$-\hat{X}_2$	0	0	0	0	$\hat{X}_8$	0	$-\hat{X}_6$	$\hat{X}_7$	0
$\hat{X}_8$	0	0	0	$-\hat{X}_3$	0	0	0	0	$-\hat{X}_7$	$\hat{X}_6$	0	$\hat{X}_8$	0
$\hat{X}_9$	0	$-\hat{X}_3$	$\hat{X}_2$	0	0	0	$-\hat{X}_8$	$\hat{X}_7$	0	$-\hat{X}_{11}$	$\hat{X}_{10}$	0	0
$\hat{X}_{10}$	$\hat{X}_3$	0	$-\hat{X}_1$	0	0	$\hat{X}_8$	0	$-\hat{X}_6$	$\hat{X}_{11}$	0	$-\hat{X}_9$	0	0
$\hat{X}_{11}$	$-\hat{X}_2$	$\hat{X}_1$	0	0	0	$-\hat{X}_7$	$\hat{X}_6$	0	$-\hat{X}_{10}$	$\hat{X}_9$	0	0	0
$\hat{X}_{12}$	$-2\hat{X}_1$	$-2\hat{X}_2$	$-2\hat{X}_3$	$-\hat{X}_4$	$-2\hat{X}_5$	$-\hat{X}_6$	$-\hat{X}_7$	$-\hat{X}_8$	0	0	0	0	0
$\hat{X}_{13}$	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_2$	$\hat{X}_3$	$\hat{X}_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

построение и изучение инвариантных решений (в первую очередь моделирующих сферически симметричное движение газа) и частично-инвариантных решений ("Вихрь Овсянникова"[8]), а также так называемых "простых"(по терминологи Овсянникова) решений [9, 10].

3 Благодарности

Работа выполнена по госзаданию Министерства образования и науки РФ (проект 1.8630.2017/БЧ «Групповой анализ уравнений динамики политропного самогравитирующего газа»). Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

Список литературы

[1] **Klebanov I., Startsun O., Ivanov S.** Model of the Newtonian cosmology: Symmetries, invariant and partialy invariant solutions //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. v. 39, p. 248 - 251.

[2] **Клебанов И.И., Старцун О.В., Иванов С.А.** Групповой анализ модели «Ньютоновская космология» // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2015, материалы 68-ой научной конференции. Под редакцией: В.Ф. Зайцева, В.Д. Будаева, А.В. Флегонтова. Санкт-Петербург: Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, 2015. с. 33 - 36.

[3] **Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.** Строение и эволюция Вселенной // М: Наука, 1975. - 732с.

[4] **Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. - 336с.

[5] **Клебанов И.И., Иванов С.А., Старцун О.В.** Группы Ли, допускаемые уравнениями динамики идеальной самогравитирующей жидкости // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2016, материалы научной юбилейной конференции, посвященной 70-летию профессора В.Ф. Зайцева. Под редакцией: В.Ф. Зайцева, В.Д. Будаева, А.В. Флегонтова. Санкт-Петербург: Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, 2016. с. 89 - 92.

[6] **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений // М: Наука, 1978. - 399с.

[7] **Shevyakov A.F.** Symbolic Computation of Local Symmetries of Nonlinear and Linear Partial and Ordinary Differential Equations // Math. Comput. Sci., 2010. v. 4, p. 203 - 222.

[8] **Ovsyannikov L.V.** Singular vortex // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1995. v. 36, No 3, p. 360–366.

[9] **Ovsyannikov L.V.** «Simple» solutions of the equations of dynamics for a polytropic gas // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1999. No. 2, 5 -12.

[10] **Klebanov I., Ivanov S.** Group theoretical justification of a «simple» cosmological model // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2015. v. 105, No. 3, p. 377 - 381.