

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2006

Электронный журнал,
рег. № П23275 от 07.03.97

<http://www.neva.ru/journal>
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Моделирование динамических систем

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ДУФФИНГА С УСЛОВИЯМИ УДАРА

С.Г.КРЫЖЕВИЧ

198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский проспект, д.28
Санкт - Петербургский государственный университет,
Математико-механический факультет,
e-mail: kryzhevitz@rambler.ru, kryzhevich@hotmail.com

Аннотация.

Исследуются системы, описывающие движение материальной точки по прямой с абсолютно упругими ударами о неподвижный ограничитель. Приводятся условия общего вида, достаточные для наличия у рассматриваемой системы так называемых хаотических инвариантных множеств. Описывается механизм образования такого рода множеств.

Введение

В последнее время появилось большое число научных работ, в которых изучаются различные аспекты динамики систем с условиями удара [3]—[6], [10]—[33]. Хотя такие системы не сводятся к обыкновенным

⁰Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант №03-01-06493 а также Министерства Образования России и Правительства Санкт-Петербурга, грант №PD05-1.1-94, МАС, грант №03-01-06493, программы "Ведущие научные школы" грант НШ-2271.2003.1 и научной программы министерства образования РФ "Университеты России".

дифференциальным уравнениям, их свойства в значительной мере совпадают со свойствами классических динамических систем. Так, в статьях [22] и [23] изучались общие свойства решений виброударных систем, такие, как существование, единственность, ограниченность и непрерывная зависимость от начальных данных и параметров. В статьях [3], [5], [6], [11]–[14], [16], [17], [19], [20], [24]–[27], [29]–[33] для различных периодических виброударных систем показывалась возможность наличия странных аттракторов. Приводились условия периодического и хаотического поведения решений виброударных систем.

Так, в статье [17] изучалась динамика мяча, подскакивающего на гармонически осциллирующей поверхности. Пусть период колебаний поверхности равен T . Рассматривались моменты ударов t_k , фазы $\tau_k = t_k \bmod T$ и соответствующие им скорости v_k . Отображение Пуанкаре строилось следующим образом: паре (τ_k, v_k) ставилась в соответствие пара (τ_{k+1}, v_{k+1}) , соответствующая следующему по времени удару. Показывалось, что при определенных предположениях на рассматриваемую систему такое отображение обладает свойствами, близкими к свойствам так называемой "подковы Смейла" [28], в частности, имеет хаотическое инвариантное множество.

В статье [3] (см. также список литературы в указанной работе) изучались системы с неупругим ударом. Для таких систем исследовалась бифуркация, связанная с приходом периодического движения на границу области решений с бесконечным числом ударов за конечное время. Показывалось, что это может привести к возникновению хаотических колебаний.

В совместных работах автора с В. А. Плиссом [5], [6] исследовалось поведение решений системы с условием абсолютно упругого удара, описываемой в промежутке между ударами линейным уравнением второго порядка с кусочно-постоянной правой частью. Для рассматриваемой системы приводились условия, достаточные для наличия странного аттрактора и условия устойчивости в целом периодического решения рассматриваемой системы. Описывались механизмы возникновения хаотических режимов.

1 Постановка задачи

Рассматривается движение материальной точки по прямой под действием нелинейной восстанавливающей силы, сопротивления среды и периодической вынуждающей силы (рис. 1). Считаем, что рассматриваемая точка абсолютно

упруго ударяется об ограничитель. Движение описывается уравнением

$$\ddot{x} + p(x)\dot{x} + q(x) = f(t). \quad (1.1)$$

Относительно функций $p(x)$ и $q(x)$ предположим, что они являются C^1 -гладкими по x и аналитичны в окрестности значения $x = 0$, причем

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad q'(x) \geq q_0 > 0 \quad (1.2)$$

для любого $x \geq 0$. Отметим, что функция $q(x)$ обратима. Предположим, что

$$\omega^2(x) = q'(x) - p^2(x)/4 > 0 \quad (1.3)$$

и, кроме того, найдутся такие константы α и $\beta \geq 0$, что

$$q'(x) \leq \alpha + \beta p(x) \quad (1.4)$$

для любого $x \geq 0$ и при этом справедливы следующие соотношения:

$$\Delta = 4(\alpha + \beta p_0) - p_0^2 > 0, \\ \sqrt{\alpha + \beta^2} < p_0 \exp \left(\frac{p_0}{\sqrt{\Delta}} \left(\arctg \frac{p_0}{\sqrt{\Delta}} + \arctg \frac{2\alpha + \beta p_0}{\beta \sqrt{\Delta}} \right) \right). \quad (1.5)$$

Введем обозначения $p_1 = p(0)$, $q_1 = q'(0)$. Не умаляя общности, можно считать, что $q(0) = 0$, для этого достаточно вычесть из обеих частей уравнения (1.1) число $q(0)$. Также можно предположить, что $\omega(0) = 1$. Выполнения последнего условия можно добиться, проведя замену переменных $t = \mu\tau$, выбрав при этом подходящее $\mu > 0$.

Пусть правая часть $f(t)$ задана следующей формулой

$$f(t) = f(t, T) = \bar{f}(tT_0/T),$$

где $\bar{f}(t)$ – аналитическая по t функция периода T_0 , а T – большой параметр. Считаем, что на отрезке $[0, T_0)$ функция $\bar{f}(t)$ имеет ровно 2 корня, причем $\bar{f}'(0) > 0$, $\bar{f}'(\tau_1) < 0$. Положим $T_1 = T\tau_1/T_0$, $T_2 = T - T_1$.

Предположим справедливость следующего условия

$$\frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} p(q^{-1}(\bar{f}(s))) ds + \frac{2p_1}{3} \int_{\tau_1}^{T_0} \bar{f}(s) ds + \frac{p_1(T_0 - \tau_1)}{2} = -\alpha_0 < 0. \quad (1.6)$$

Ниже будет показано, что выполнение этого условия означает наличие у рассматриваемой системы неустойчивых решений. Уравнение (1.1) задано

при $x \geq 0$, а условие удара выражается следующим образом: если $x(t_0) = 0$, а $\dot{x}(t_0 - 0) \leq 0$, то

$$\dot{x}(t_0 + 0) = -\dot{x}(t_0 - 0) \quad (1.7)$$

и, если $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0 - 0) = 0$ и $kT + T_1 \leq t_0 < (k + 1)T$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, то $x(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq (k + 1)T$.

Условимся здесь и далее считать все числовые величины, обозначаемые буквами c и C , положительными константами. Примем также следующие стандартные обозначения: $a(t) = o(b(t))$, если $a(t)/b(t) \rightarrow 0$, и $a(t) = O(b(t))$, если $|a(t)| \leq C|b(t)|$. Из вида функции $f(t)$ ясно, что $f'(t) = O(1/T)$. Вместе с тем,

$$T|f'(t)| + |f(t)| > c \quad \text{для любого} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

2 Основные свойства рассматриваемой системы

В отличие от систем, рассмотренных в работах [5] и [6], уравнение (1.1), вообще говоря, нелинейно и не всегда разрешимо. В общем случае, оно может иметь хаотические режимы даже при отсутствии условий удара. Однако, наличие ударов само по себе является сильной нелинейностью и может привести к образованию хаоса даже в случае, когда уравнение (1.1) конвергентно, что и будет продемонстрировано в настоящей работе.

Полагая

$$F(x) = \int_0^x p(s) ds, \quad y = \dot{x} + F(x),$$

сведем уравнение (1.1) к эквивалентной системе:

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -q(x) + f(t), \quad (2.1)$$

заданной на множестве $\Lambda = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \cup \{(0, y) : y \geq 0\}$. Отметим, что $y = \dot{x}$, если $x = 0$, следовательно, условия удара примут вид: $y(t + 0) = -y(t - 0)$ при $x = 0$ и, если $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0 - 0) = 0$ и $kT + T_1 \leq t_0 < (k + 1)T$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, то $x(t) = y(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq (k + 1)T$.

Мы будем также пользоваться следующим стандартным способом сведения уравнения (1.1) к системе: если положить $\hat{y} = \dot{x}$, получим

$$\dot{x} = \hat{y}, \quad \dot{\hat{y}} = -p(x)\hat{y} - q(x) + f(t), \quad (2.2)$$

Система (2.2) задана на том же множестве Λ и условия удара имеют вид (1.7), если заменить \dot{x} на \hat{y} . Положим $z = (x, y)$, $\hat{z} = (x, \hat{y})$.

Системы (2.1) и (2.2) с указанными условиями удара будем отождествлять и обозначать символами (*) и ($\widehat{*}$) соответственно. В зависимости от обстоятельств в дальнейшем мы будем пользоваться той или иной формой рассматриваемой системы. Как следует из результатов статьи [23], для любых t_0 , x_0 и y_0 , удовлетворяющих условиям $(x_0, y_0) \in \Lambda$, решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (*) с начальными данными $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ определено, единственно при всех t и локально непрерывно по начальным данным при всех значениях t , таких, что $x(t) \neq 0$.

Покажем, что рассматриваемая система диссипативна. Рассмотрим положительно определенную функцию

$$v(x, y) = y^2 - yF(x) + \frac{F^2(x)}{2} + 2 \int_0^x q(x) dx.$$

Для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (*) функция $v(x(t), y(t))$ непрерывна по t , в том числе и в точках ударов. В промежутках между ударами производная функции v в силу системы (2.1) равна

$$\dot{v} = -(y - F(x))^2 p(x) - q(x)F(x) + (2y - F(x))f(t).$$

Повторяя доказательство теоремы 4.2 книги [7], легко проверить, что найдется такое число $R_D > 0$, что

$$\dot{v} < 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 > R_D^2. \quad (2.3)$$

Следовательно, все решения системы (*) в некоторый момент попадают в область $D = \{z = (x, y) : x^2 + y^2 \leq R_D^2, x \geq 0\}$ и остаются там с возрастанием времени. Это и означает диссипативность системы (*). Отметим, что величина R , равно как и компакт D , не зависят от T .

Рассмотрим отображение Пуанкаре G для системы (*) на периоде $[0, T]$, то есть положим $G(z_0) = z(T, 0, z_0)$. Помимо виброударной системы (*) рассмотрим дискретную динамическую систему

$$z_{n+1} = G(z_n), \quad (2.4)$$

определенную на множестве Λ . Аналогичным образом определим отображение Пуанкаре \widehat{G} , соответствующее системе ($\widehat{*}$).

Определение 2.1. Назовем решение $z(t)$ системы (*) *неблуждающим*, если $z(0)$ есть *неблуждающая точка системы* (2.4).

Отметим, что в силу (2.3) все неблуждающие решения $z(t)$ при любом значении t содержатся в области D .

3 Свойства решений уравнения (1.1)

Доопределим функции p и q , положив $p(x) = p(-x)$ и $q(x) = -q(-x)$ при $x < 0$. Функции p и q , определенные таким образом, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} p(x) \in \text{Lip}_{loc}, \quad p(x) \geq p_0 > 0 \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}; \\ q \in C^1, \quad q'(x) \geq q_0 > 0 \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Итак, мы можем считать, что уравнение (1.1) и система (2.1) заданы при всех значениях x .

Определение 3.1. Уравнение (1.1) конвергентно, если у него есть единственное периодическое решение $\varphi(t)$, к которому все остальные решения неограниченно приближаются в метрике C^1 с ростом времени.

Периодическому решению $\varphi(t)$ уравнения (1.1) соответствует периодическое решение

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) + F(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

системы (2.1). Будем говорить, что система (2.1) является конвергентной, если таковым является уравнение (1.1).

Лемма 3.1. При сделанных выше предположениях уравнение (1.1) конвергентно.

Доказательство. Периодическое решение $\varphi(t)$ существует в силу диссипативности системы (2.1). Фиксируем $\varphi(t)$ и рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v - F(u + \varphi(t)) + F(\varphi(t)); \\ \dot{v} &= -q(u + \varphi(t)) + q(\varphi(t)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

получаемую из (2.1) подстановкой $x = u + \varphi(t)$, $y = v + \dot{\varphi}(t) + F(\varphi(t))$. Положим

$$\tilde{p}(t, u) = \frac{F(u + \varphi(t)) - F(\varphi(t))}{u}, \quad \tilde{q}(t, u) = \frac{q(u + \varphi(t)) - q(\varphi(t))}{u}.$$

При $u = 0$ непрерывно доопределим $\tilde{p}(t, 0) = p(\varphi(t))$, $\tilde{q}(t, 0) = q'(\varphi(t))$.

Система (3.1) примет вид

$$\dot{u} = v - \tilde{p}(t, u)u; \quad \dot{v} = -\tilde{q}(t, u)u.$$

Очевидно, что $\tilde{p}(t, u) \geq p_0$, $\tilde{q}(t, u) \geq q_0$ для любых $t, u \in \mathbb{R}$. Кроме того,

$$\tilde{q}(t, u) = \frac{\int_{\varphi(t)}^{u+\varphi(t)} q'(\xi) d\xi}{u} \leq \frac{\int_{\varphi(t)}^{u+\varphi(t)} (\alpha + \beta p(\xi)) d\xi}{u} \leq \alpha + \beta \tilde{p}(t, u).$$

Тогда, как следует из результатов работы [2], при выполнении оценок (1.2), (1.4) и (1.5) система (3.1) конвергентна, и, стало быть, то же верно для уравнения (1.1). Лемма доказана.

Замечание 3.1. В дальнейшем достаточно предположить вместо выполнения условий (1.4) и (1.5) конвергентность уравнения (1.1) для достаточно больших значений параметра T . Все приводимые ниже результаты останутся справедливыми.

Обозначим $h(t) = q^{-1}(f(t))$.

Лемма 3.2. При больших значениях параметра T для любого $t \in \mathbb{R}$ справедливы следующие оценки

$$|\varphi(t) - h(t)| \leq C/T, \quad |\dot{\varphi}(t) - \dot{h}(t)| \leq C/T^2. \quad (3.2)$$

Доказательство. Положим $h(t) = q^{-1}(f(t))$ и сделаем замену переменных $\xi = x - h(t)$. Уравнение (1.1) примет вид

$$\ddot{\xi} + p(\xi + h(t))\dot{\xi} + p(\xi + h(t))\dot{h}(t) + q(\xi + h(t)) - q(h(t)) + \ddot{h}(t) = 0. \quad (3.3)$$

Легко заметить, что уравнение (3.3) можно записать следующим образом

$$\ddot{\xi} + p(h(t))\dot{\xi} + q'(h(t))\xi = R(t, \xi, \dot{\xi}),$$

где $|R(t, 0, 0)| = |p(h(t))\dot{h}(t) + \ddot{h}(t)| \leq C_1/T$. Кроме того, найдется такое $\rho > 0$, что

$$|R(t, x_1, y_1) - R(t, x_2, y_2)| \leq C \left(\frac{1}{T} + \rho \right) (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \quad (3.4)$$

для любых пар (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , таких, что $x_i^2 + y_i^2 \leq \rho^2$.

Рассмотрим также уравнение линейного приближения

$$\ddot{\xi} + p(h(t))\dot{\xi} + q'(h(t))\xi = 0. \quad (3.5)$$

В силу результатов Алексеева и Лященко (см. [1]) при больших значениях параметра T уравнение (3.5) сводится к гиперболической системе, причем соответствующие константы гиперболичности могут быть выбраны не

зависящими от T . С другой стороны, рассматривая (3.5) как линейное приближение к (3.3), из теоремы Ляпунова-Пуанкаре получаем, что уравнение (3.3) имеет единственное ограниченное решение, стремящееся к нулю по норме в C^1 при $T \rightarrow \infty$. Очевидно, это будет $\varphi(t) - h(t)$. При этом оценка нормы этого периодического решения, получаемая при доказательстве теоремы Ляпунова-Пуанкаре, даст первую из формул (3.2).

Подставляя $\varphi(t)$ в уравнение (1.1) и дифференцируя полученное соотношение, получаем

$$\ddot{\varphi}(t) + p'(\varphi(t))\dot{\varphi}^2(t) + p(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t) + q'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = f'(t).$$

Следовательно, функция $T\dot{\varphi}(t)$ есть решение уравнения

$$\ddot{x} + p(\varphi(t))\dot{x} + q'(\varphi(t))x + p'(\varphi(t))x^2/T = Tf'(t). \quad (3.6)$$

Применяя к уравнению (3.6) рассуждения, аналогичные первой части доказываемой теоремы, получаем справедливость второй из формул (3.2). Лемма доказана.

Следствие 3.1. *При больших значениях параметра T периодическое решение $\varphi(t)$ уравнения (1.1) имеет на отрезке $[0, T)$ ровно 2 корня $t = \vartheta_1$ и $t = \vartheta_2$. При этом $\min(\vartheta_1, T - \vartheta_1) \leq C$, $|\vartheta_2 - T_1| \leq C$.*

Доказательство. Если t таково, что $\varphi(t) = 0$, то, в силу (3.2)

$$|h(t)| \leq C/T. \quad (3.7)$$

Из (1.8) следует, что на тех отрезках, где выполнено (3.7), производная функции $h(t)$ по модулю оценивается снизу величиной C_1/T . Следовательно, на этих отрезках производная $\dot{\varphi}(t)$ не обращается в нуль, а сама функция $\varphi(t)$ может иметь не более, чем по одному корню. Если $t \in [0, T)$, то неравенство (3.7) при малых ε может иметь место только на отрезках вида $J_1 = [0, C_2)$, $J_2 = (T_1 - C_2, T_1 + C_2)$ и $J_3 = (T - C_2, T)$. Таким образом, функция $\varphi(t)$ имеет ровно два корня, один из которых лежит на отрезке J_2 , а второй либо на отрезке J_1 , либо на отрезке J_3 . Лемма доказана.

Пусть

$$\eta = \frac{2\dot{\xi} + p(\varphi(t))\xi}{2\omega(\varphi(t))},$$

где функция $\omega(t) > 0$ определена формулой (1.3). Уравнение (3.5) сводится к системе

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{p(\varphi(t))}{2}\xi + \omega(\varphi(t))\eta, \\ \dot{\eta} &= -\omega(\varphi(t))\xi - \frac{p(\varphi(t))}{2}\eta + R_2(t, \xi, \eta), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где функция R_2 удовлетворяет в малой окрестности нуля условию Липшица, аналогичному (3.4). Перейдем к полярным координатам, полагая $\xi = r \cos \theta$, $\eta = r \sin \theta$. Система (3.8) примет вид

$$\dot{r} = -p(\varphi(t))r/2 + P(t, r, \theta), \quad \dot{\theta} = -\omega(\varphi(t)) + \Theta(t, r, \theta), \quad (3.9)$$

где функции P и Θ определены и непрерывно дифференцируемы по своим аргументам на множестве $\mathbb{R}_t \times [0, \varepsilon]_r \times \mathbb{R}_\theta$ и периодичны по аргументам t и θ . При этом имеют место оценки

$$|P(t, r, \theta)| \leq Cr \left(r + \frac{1}{T} \right), \quad |\Theta(t, r, \theta)| \leq C \left(r + \frac{1}{T} \right).$$

Тогда решение системы (3.9) с начальными данными $r(0) = r_0$, $\theta(0) = \theta_0$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} r(t, r_0, \theta_0) &= r_0 \exp \left(- \int_0^t \frac{p(\varphi(s))}{2} ds + A_r(t) \right), \\ \theta(t, r_0, \theta_0) &= \theta_0 - \int_0^t \omega(\varphi(s)) ds + A_\theta(t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\max(|A_r(t)|, |A_\theta(t)|) \leq at/T$, если $t \geq 0$, причем константу a можно выбрать сколь угодно малой, если r_0 достаточно мало, а T достаточно велико (рис. 2). Заметим также, что

$$\dot{r}(t, r_0, \theta_0) = r(-p_1/2 + O(1/t)), \quad \dot{\theta}(t, r_0, \theta_0) = -1 + O(1/t). \quad (3.11)$$

Пусть $\varphi_0(t)$ – решение (1.1) с начальными данными $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Поскольку расстояние между $\varphi(t)$ и $\varphi_0(t)$ в момент времени $t = 0$ оценивается сверху величиной C/T , все проведенные выше рассуждения, а равно и оценки (3.10), применимы к уравнению, получаемому из (1.1) заменой $\chi = x - \varphi_0(t)$. Условимся далее полагать

$$\Upsilon = \Upsilon(0, T_1) = \int_0^{T_1} p(\varphi(s)) ds/2. \quad (3.12)$$

Заметим, что в силу леммы 3.2

$$\Upsilon = \int_0^{T_1} p(q^{-1}(f(s))) ds/2 + o(T), \quad \Xi = \int_0^{T_1} \omega(q^{-1}(f(s))) ds + o(T).$$

4 Поведение решений на отрезке $(0, T_1)$

На этом отрезке функция $f(t)$ положительна. Введем в рассмотрение множество Γ , заданное условием $\Gamma = \{(x_0, y_0) : x_0 \geq 0, \exists t \in [0, T_1/2] : x(t, 0, x_0, y_0) = y(t, 0, x_0, y_0) = 0\}$.

Лемма 4.1. В окрестности начала координат Γ представляет собой график C^1 - гладкой функции $x = \gamma(y)$, где

$$\gamma(y) = \sqrt{-\frac{8y^3}{9f'(0)}}(1 + o(1)), \quad y < 0. \quad (4.1)$$

Доказательство. В окрестности $t = 0$ представим $f(t) = f'(0)t + o(t)$. Пусть решение $z(t) = (x(t), y(t))$ системы (*) таково, что $x(t_0) = y(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in [0, T_1/2]$. Заметим, что в этом случае $\dot{x}(t_0) = 0$.

Если t_0 достаточно мало, то $x(t)$ не обращается в нуль на $[0, t_0]$. В противном случае найдутся последовательности моментов времени t_0^k и t_1^k , такие, что $0 < t_1^k < t_0^k$, причем решения $x_k(t)$ с начальными данными $x_k(t_0^k) = \dot{x}_k(t_0^k) = 0$ обращаются в нуль в момент t_1^k . Отметим, что $\ddot{x}_k(t_0^k) = f(t_0^k) > 0$. Не умаляя общности, считаем, что $x_k(t) > 0$ на отрезке (t_1^k, t_0^k) (легко видеть, что моменты ударов любого решения не имеют точек сгущения на любом отрезке, на котором $f(t) > 0$). Тогда существуют моменты времени $t_2^k \in (t_1^k, t_0^k)$, такие, что $\dot{x}_k(t_2^k) = 0$, причем $\dot{x}_k(t) < 0$ на отрезке (t_2^k, t_0^k) . Тогда $\ddot{x}_k(t_2^k) \geq 0$. С другой стороны, из уравнения (1.1) следует, что $\ddot{x}_k(t_2^k) + q(x_k(t_2^k)) = f(t_2^k)$. Значит, $x_k(t_2^k) \geq q^{-1}(f(t_2^k)) > \bar{f}'(0)t_2^k/(2q_1T)$, если k достаточно велико, а t_2^k , соответственно, достаточно мало. Найдется такой момент времени $t_3^k \in [t_1^k, t_2^k]$, что $\dot{x}(t_3^k) > \bar{f}'(0)/(2q_1T)$. Это противоречит тому, что $\dot{x}(t_2^k) = 0$, $t_2^k - t_3^k \rightarrow 0$, а вторые производные $\ddot{x}_k(t)$ могут при больших k быть оценены на отрезках $[t_1^k, t_0^k]$ сверху по модулю величиной $2 \max |f(t)|$.

Положим $s = t - t_0$, представим $x(s + t_0) = x_2s^2 + x_3s^3 + O(s^4)$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}(s + t_0) &= 2x_2s + 3x_3s^2 + O(s^3), & \ddot{x}(s + t_0) &= 2x_2 + 6x_3s + O(s^2); \\ f(t_0 + s) &= f_0 + f_1s + O(s^2), & f_0 &= f'(0)t_0 + O(t_0^2), & f_1 &= f'(0) + O(t_0). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1.1), получаем, что $x_2 = f_0/2$ и $x_3 = (f_1 - p_1f_0)/6$. При $t = 0$ получаем $s = -t_0$, откуда следует, что

$$\begin{aligned} x(0) &= f'(0)t_0^3/3 + O(t_0^4), & \dot{x}(0) &= -f'(0)t_0^2/2 + O(t_0^3), \\ y(0) &= -f'(0)t_0^2/2 + O(t_0^3), \end{aligned}$$

что и означает справедливость (4.1). Лемма 4.1 доказана.

Перейдем к рассмотрению системы (*). Очевидно, что для уравнения $\ddot{x} + p_1\dot{x} + q_1x = 0$ функция $v^0(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + p_1x\dot{x} + q_1x^2$ является функцией Ляпунова. В малой окрестности начала координат она же будет функцией

Ляпунова для уравнения $\ddot{x} + p(x)\dot{x} + q(x) = 0$ и для системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -p(x)y - q(x). \quad (4.2)$$

Фиксируем $\beta > 0$. Введем следующее обозначение:

$$D_\beta = \{(x, \hat{y}) : x > 0, \hat{y} < 0, v^0(x, \hat{y}) < \exp(-\beta T)\}.$$

Обозначим через S_β^x часть границы области D_β , заданную условием $x = 0$, через S_β^y участок границы области D_β , заданный условием $\hat{y} = 0$, а через S_β^v часть границы области D_β , заданную условием $v(x, \hat{y}) = \exp(-\beta T)$. Как следует из леммы 4.1, окрестность D_β разбивается кривой Γ на две части $D_\beta^+ = \{(x, \hat{y}) \in D_\beta : x \geq \gamma(\hat{y})\}$ и $D_\beta^- = \{(x, \hat{y}) \in D_\beta : x < \gamma(\hat{y})\}$ (рис. 3).

Лемма 4.2. *Для любого $\beta > 0$ найдется такое T_β , что если $T > T_\beta$, то существует такое значение $T_3 = T_3(T) \in (T_1 - C, T_1 + C)$, что любое решение $\hat{z}(t)$ системы (*) с начальными данными $\hat{z}(0) = \hat{z}_0 \in D_\beta^+$, не имеет ударов на промежутке $[0, T_3)$.*

Доказательство. Поскольку v^0 – функция Ляпунова системы (4.2), векторное поле системы (2.2) в любой точке S_β^v в момент времени $t = 0$ направлено внутрь области D_β . С возрастанием времени первая компонента векторного поля в каждой фиксированной точке остается неизменной, а вторая компонента увеличивается. Легко видеть, что векторное поле остается направленным внутрь области D_β , таким образом на промежутке $[0, T_1]$ все решения покидают D_β либо через S_β^x , либо через S_β^y . Эти возможности реализуются в зависимости от того, имеет ли перед этим рассматриваемое решение $\hat{z}(t)$ удар или нет. В первом случае $\hat{z}(0) \in D_\beta^-$, во втором $\hat{z}(0) \in D_\beta^+$. Остановимся на рассмотрении этого второго случая.

Фиксируем $z_0 \in D_\beta^+$ и решение $\hat{z}(t)$ системы (*), такое, что $\hat{z}(0) = z_0$. Пусть t_0 – первый положительный момент времени, такой, что $x(t_0) = 0$. Тогда, поскольку рассматриваемое решение покидает область D_β через отрезок S_β^y , найдется такое $t_1 \in (0, t_0)$, что $\dot{x}(t_1) = 0$, $\ddot{x}(t_1) \geq 0$. С другой стороны, если $t_0 < T_1$ (в противном случае, утверждение леммы для решения $\hat{z}(t)$ очевидно), то $\dot{x}(t_0 - 0) \leq 0$ и $\ddot{x}(t_0 - 0) = f(t_0) - p_1 \dot{x}(t_0 - 0) > 0$. Поскольку $\dot{x}(t_1) = 0$, а $\dot{x}(t_0 - 0) \leq 0$, то найдется момент времени $t_2 \in (t_1, t_0)$, такой, что $\ddot{x}(t_2) \leq 0$. Поскольку $\ddot{x}(t_1) \geq 0$ и $\ddot{x}(t_0 - 0) > 0$, найдется такой момент времени $t_3 \in (t_1, t_0)$, что $\ddot{x}(t_3) = 0$. Но если T достаточно велико, то $\ddot{x}(0) \geq f'(0)/2 \geq C/T$. Подставляя $x(t)$ в уравнение (1.1) и дважды дифференцируя полученное соотношение по t , получаем, что $x^{IV}(t) = O(1/T^2)$, откуда следует, что $t_3 > cT$. С другой стороны, $|x(t) - h(t)| \leq C/T$, следовательно, $|h(t_0)| \leq C/T$ и $|t_0 - T_1| \leq C$.

Выбрав в качестве T_3 минимум t_0 по всем решениям $\widehat{z}(t)$, получим справедливость утверждения доказываемой леммы.

Таким образом, все решения, начинающиеся при $t = 0$ в области D_β^+ , ведут себя на отрезке $(0, T_3)$ так же, как и решения уравнения (1.1), в частности, верно следующее утверждение.

Лемма 4.3. *При сделанных выше предположениях найдется константа $C > 0$, что для любых двух решений $\widehat{z}_{1,2}(t)$ с начальными данными $\widehat{z}_i(0) \in D_\beta^+$, справедливо соотношение*

$$(\widehat{z}_1(T_3) - \widehat{z}_2(T_3))^2 = \exp(-2\Upsilon(1 + o(1))) (\widehat{z}_1(0) - \widehat{z}_2(0))^2.$$

5 Поведение решений виброударной системы на отрезке $[T_1, T]$

Пусть

$$T_4 = \min\{t > T_1 : |f'(t)| = -p_0 f(t)/2\}. \quad (5.1)$$

Очевидно, что $T_4 \in (T_1, T)$. Рассмотрим отрезки $I_1 = [0, T_3)$, $I_2 = [T_3, T_4)$ и $I_3 = [T_4, T)$. На отрезке I_3 справедлива оценка $p_0 f(t) \leq 2f'(t)$.

Лемма 5.1. *На отрезке I_3 система (*) имеет единственное постоянное решение $z \equiv 0$. При этом $z(T, T_4, z_0) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ равномерно по $z_0 \in D$ (рис. 4).*

Доказательство. Пусть $z = (x, y)^T$. Положим

$$w = w(x, y, t) = v(x, y) - 2xf(t).$$

Отметим, что $w(z, 0) = w(z, T_1) = v(z)$. При тех значениях t , для которых $f(t) < 0$, функция $w(z, t)$ положительно определена на множестве Λ . Для любого решения $z(t)$ системы (*) функция $w(z(t))$ непрерывна по t , в том числе и в точках ударов. Вычислим ее производную в силу системы (2.1):

$$\dot{w} = -(y - F(x))^2 p(x) - q(x)F(x) + F(x)f(t) - 2f'(t)x < 0,$$

если $\Lambda \ni z \neq 0$. Стало быть, вдоль любого ненулевого решения функция $w(z(t))$ неограниченно убывает. Лемма 5.1 доказана.

Отметим, что в силу единственности решений системы (*) моменты ударов любого ненулевого решения на отрезке I_3 не имеют точек сгущения.

Следовательно, любое решение $z(t) = (x(t), y(t)) \neq 0$ системы (*) имеет на отрезке I_3 конечное число ударов. Обозначим их последовательные моменты через t_k ($k = 1, \dots, N$) и положим $y_k = y(t_k + 0) = \dot{x}(t_k + 0)$.

Лемма 5.2. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такое положительное число T^0 и натуральное число K , что если $T > T^0$, то для всякого $z(T_1) \in D \setminus \{0\}$ и для любого $k > K$, такого, что $t_k \in I_3$,

$$\ln \frac{y_k}{y_1} \in (-\Sigma_+(t_k), -\Sigma_-(t_k)), \quad \text{где} \quad \Sigma_{\pm}(t) = -\frac{p_1}{3} \int_{T_1}^t (f(s) \mp \varepsilon) ds.$$

Доказательство. Фиксируем решение $z(t)$ системы (*) и его первую компоненту $x(t)$, которая является в промежутках между ударами решением уравнения (1.1). Функция $x(t)$ является решением уравнения

$$\ddot{x} + p_1 \dot{x} + q_1 x = g(t), \tag{5.2}$$

где $g(t) = f(t) + (p_1 - p(x(t)))\dot{x}(t) + q_1 x(t) - q(x(t))$. Рассмотрим промежутки $J_k = [t_k, t_{k+1}]$ между двумя последовательными ударами решения $x(t)$. Фиксируем k и представим функцию $g(t)$ на отрезке J_k в виде степенного ряда

$$g(t) = g_0 + g_1(t - t_k) + g_2(t - t_k)^2 + \dots \tag{5.3}$$

Рассмотрим $\phi(t)$ -решение (5.2), такое, что $\phi(t_k) = \phi_0 = g_0/q_1$, $\phi'(t_k) = 0$. Представляя решение $\phi(t)$ в виде ряда

$$\phi(t) = \phi_0 + \phi_2(t - t_k)^2 + \phi_3(t - t_k)^3 + \phi_4(t - t_k)^4 + O((t - t_k)^4) \tag{5.4}$$

и подставляя ряды (5.3) и (5.4) в уравнение (5.2), получаем

$$\begin{aligned} & 2\phi_2 + 6\phi_3(t - t_k) + 12\phi_4(t - t_k)^2 + 2p_1\phi_2(t - t_k) + 3p_1\phi_3(t - t_k)^2 + \\ & + q_1\phi_0 + q_1\phi_2(t - t_k)^2 + O((t - t_k)^3) = \\ & = g_0 + g_1(t - t_k) + g_2(t - t_k)^2 + O((t - t_k)^3). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\phi_2 = 0$, $\phi_3 = g_1/6$, $\phi_4 = g_2/12 - p_1g_1/24$. Рассмотрим функцию

$$u(t) = (\dot{x}(t) - \dot{\phi}(t))^2 + p_1(\dot{x}(t) - \dot{\phi}(t))(x(t) - \phi(t)) + q_1(x(t) - \phi(t))^2.$$

Производная функции $u(t)$ в силу уравнения (5.2) в промежутках между ударами решения $\phi(t)$ равна $-p_1u(t)$. Тогда $u(t_{k+1} - 0) = \sigma_k u(t_k + 0)$, где

$\sigma_k = \exp(-p_1(t_{k+1} - t_k))$. Вместе с тем, $x(t_k) = x(t_{k+1}) = 0$, $\dot{x}(t_k + 0) = y_k$, $\dot{x}(t_{k+1} - 0) = -y_{k+1}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} & (y_{k+1} + \dot{\phi}(t_{k+1}))^2 + \phi(t_{k+1})p_1(y_{k+1} + \dot{\phi}(t_{k+1})) + q_1\phi(t_{k+1})^2 = \\ & = \sigma_k(y_k^2 - \phi_0 p_1 y_k + q_1 \phi_0^2). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Пусть $\delta_k = y_k - y_{k+1}$, $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$. Тогда

$$1 - \sigma_k = p_1 \Delta_k - p_1^2 \Delta_k^2 / 2 + p_1^3 \Delta_k^3 / 6 + O(\Delta_k^4); \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} y_{k+1} + y_k &= - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \ddot{x}(t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-g(t) + p_1 \dot{x}(t) + q_1 x(t)) dt = \\ &= -g_0 \Delta_k - g_1 \Delta_k^2 / 2 - g_0 \Delta_k^3 / 3 + q_1 \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) dt = -g_0 \Delta_k + O(\Delta_k^2). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Оценим интеграл во второй строке формулы (5.7):

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \int_{t_k}^t \dot{x}(s) ds = \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \int_{t_k}^t ds \left(y_k + \int_{t_k}^s (g(\tau) - p_1 \dot{x}(\tau) - q_1 x(\tau)) d\tau \right) = \\ &= y_k \Delta_k^2 / 2 + g_0 \Delta_k^3 / 6 + O(\Delta_k^4). \end{aligned} \quad (5.8)$$

С другой стороны, аналогично можно получить, что

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) dt = y_{k+1} \Delta_k^2 / 2 + g_0 \Delta_k^3 / 6 + O(\Delta_k^4). \quad (5.9)$$

Взяв полусумму равенств (5.8) и (5.9) и подставив ее в формулу (5.7), получим, что $y_{k+1} + y_k =$

$$= -g_0 \Delta_k + q_1 \Delta_k^2 (y_k + y_{k+1}) / 4 - g_1 \Delta_k^2 / 2 + g_0 q_1 \Delta_k^3 / 6 - g_2 \Delta_k^3 / 6 + O(\Delta_k^4),$$

откуда

$$y_{k+1} + y_k = -g_0 (\Delta_k + q_1 \Delta_k^3 / 12) - g_1 \Delta_k^2 / 2 - g_2 \Delta_k^3 / 3 + O(\Delta_k^4). \quad (5.10)$$

Вычитая (5.9) из (5.8), легко видеть, что $\delta_k = O(\Delta_k^2)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} y_k &= (y_k + y_{k+1} + \delta_k) / 2 = \\ &= \delta_k / 2 - g_0 (\Delta_k / 2 + q_1 \Delta_k^3 / 24) - g_1 \Delta_k^2 / 4 - g_2 \Delta_k^3 / 6 + O(\Delta_k^4). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Подставляя (5.4) в (5.5), получаем

$$\begin{aligned} & \sigma_k (y_k^2 - \phi_0 p_1 y_k + q_1 \phi_0^2) = \\ &= (y_{k+1} + 3\phi_3 \Delta_k^2)^2 + p_1 \phi_0 (y_{k+1} + 3\phi_3 \Delta_k^2 + 4\phi_4 \Delta_k^3) + \\ &+ q_1 (\phi_0 + \phi_3 \Delta_k^2)^2 + O(\Delta_k^4) = \\ &= y_{k+1}^2 + \phi_0 p_1 y_{k+1} + q_1 \phi_0^2 + 6y_{k+1} \phi_3 \Delta_k^2 + 3p_1 \phi_0 \phi_3 \Delta_k^2 + 4p_1 \phi_0 \phi_4 \Delta_k^3 + \\ &+ 2q_1 \phi_0 \phi_3 \Delta_k^3 + O(\Delta_k^4). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Из (5.12) следует, что

$$\begin{aligned} y_k^2 - y_{k+1}^2 &= (1 - \sigma_k)(q_1\phi_0^2 - p_1y_k\phi_0 + y_k^2) + \phi_0p_1(y_{k+1} + y_k) + \\ &+ y_{k+1}g_1\Delta_k^2 + p_1g_0g_1\Delta_k^2/(2q_1) + p_1g_0g_2\Delta_k^3/(3q_1) - \\ &- p_1^2g_0g_1\Delta_k^3/(6q_1) + g_0g_1\Delta_k^3/3 + O(\Delta_k^4). \end{aligned}$$

Подставляя (5.6), (5.10) и (5.11) в последнее равенство, получим

$$\begin{aligned} -g_0\delta_k\Delta_k &= (p_1\Delta_k - p_1^2\Delta_k^2/2 + p_1^3\Delta_k^3/6)(g_0^2/q_1 - \\ &- p_1g_0((2\delta_k - 2g_0\Delta_k - g_1\Delta_k^2)/4q_1) + g_0^2\Delta_k^2/4) - \\ &- p_1g_0(g_0\Delta_k + g_0q_1\Delta_k^3/12 + g_1\Delta_k^2/2 + g_2\Delta_k^3/3)/q_1 + g_0g_1\Delta_k^3/2 + \\ &+ p_1g_0g_1\Delta_k^2/(2q_1) + p_1g_0g_2\Delta_k^3/(3q_1) - \\ &- p_1^2g_0g_1\Delta_k^3/(6q_1) + g_0g_1\Delta_k^3/6 + O(\Delta_k^4) = \\ &= -p_1^2g_0^2\Delta_k\delta_k/(2q_1) - g_0^2p_1^3\Delta_k^3/(12q_1) + p_1g_0^2\Delta_k^3/6 + \\ &+ p_1^2g_0g_1\Delta_k^3/(12q_1) - g_0g_1\Delta_k^3/6 + O(\Delta_k^4). \end{aligned}$$

Группируя слагаемые, зависящие от δ_k , и сокращая на $-g_0\Delta_k(1 - p_1^2/(2q_1))$, получаем, что

$$\delta_k = -(g_0p_1 - g_1)\Delta_k^2/6 + O(\Delta_k^3), \quad (5.13)$$

если $p_1 \neq \sqrt{2q_1}$. Для случая $p_1 = \sqrt{2q_1}$ соотношение (5.13) получается предельным переходом. Поскольку $y_k = -g_0\Delta_k/2 + O(\Delta_k^2)$, эквивалентной формой (5.13) является следующая:

$$y_{k+1} = y_k - \delta_k = y_k(1 + (g_0p_1 - g_1)\Delta_k/3 + O(\Delta_k^2)),$$

которую, в свою очередь, можно переписать в виде

$$\ln y_{k+1} - \ln y_k = (g_0p_1 - g_1)\Delta_k/3 + \tilde{\xi}_k,$$

где $\tilde{\xi}_k = O(\Delta_k^2)$. Заметим, что разность $f(t) - g(t)$ равномерно мала вместе с производными на отрезке (t_k, t_{k+1}) , соответствующем большому значению k . Вместе с тем, поскольку $g'(t)$ стремится к нулю с ростом T , то же самое верно и для g_1 . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $K > 0$, что если $k > K$, то

$$\ln y_{k+1} - \ln y_k = \frac{p_1}{3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt + \xi_k, \quad (5.14)$$

где $|\xi_k| \leq \varepsilon\Delta_k/2$ при $k > K$. Суммируя равенства (5.14), получаем

$$\ln y_n - \ln y_1 = \frac{p_1}{3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k.$$

Выберем константу $C = C(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\xi_k| \leq C + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon \Delta_k / 2 = C + 2\varepsilon(t_n - t_1) / 2.$$

А тогда

$$\left| \left(\ln y_n - \ln y_1 + \frac{p_1}{3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(t) dt \right) / (t_n - t_1) \right| \leq C / (t_n - t_1) + \varepsilon / 2 \leq \varepsilon,$$

если разность $t_n - t_1$ достаточно велика. Лемма 5.2 доказана.

Так как $w(0, y, t) = y^2$, справедливо следующее утверждение.

Следствие 5.1. Если $z(t)$ – решение системы (*) с начальными данными $z(T_1) \in D$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T^0 > 0$, что если $T > T^0$, то для любого $t \in I_3$ имеет место соотношение

$$c \exp(2\Sigma_-(t)) w(z(T_1), T_1) \leq w(z(t), t) \leq C \exp(2\Sigma_+(t)) w(z(T_1), T_1).$$

Оценим количество ударов решения $z(t)$ на промежутке I_3 .

Лемма 5.3. Для любого ненулевого решения $z(t)$ с начальными данными $z(T_1) \in D$ число N ударов на промежутке I_3 оценивается по формуле

$$N = \frac{\exp(\Sigma + a_1(T, z)T_2)}{\sqrt{w(z(T_1), T_1)}}, \quad \text{где} \quad \Sigma = -\frac{p_1}{3} \int_{T_1}^T f(s) ds,$$

и $a_1(T, z) = o(1)$ при $T \rightarrow \infty$.

Доказательство. Положим $w_1 = \sqrt{w(z(T_1), T_1)}$. Из асимптотической устойчивости периодического решения $\Phi(t)$ системы (2.1) следует, что найдется такое C_1 , что на подотрезках отрезка $[T_1, T]$ длины не менее C_1 , где $f(t) \leq 0$, любое решение $z(t)$ системы (*) с начальными данными $z(T_1) \in D$ имеет удары. Поскольку в момент удара $w(z(t_1), t_1) = y_1^2$, скорость y_1 первого удара решения $z(t)$ на промежутке I_3 оценивается по формуле $cw_1 \leq y_1 \leq Cw_1$.

Фиксируем число $\delta > 0$ и момент времени $s \in (T_1, T_4 - 1)$, где число T_4 определяется формулой (5.1). Поскольку скорости y_k последовательных ударов удовлетворяют соотношению $y_k = -f(t_k)(t_{k+1} - t_k)(1 + o(1))/2$ и в силу леммы 5.2 число ударов $N(s)$ на отрезке $[s, s + \delta]$ оценивается по формуле

$$N(s) \in \left[\frac{\delta \min_{s \leq t \leq s + \delta} |f(t)| \exp(\Sigma_-(t))}{w_1} - 1, \frac{\delta \max_{s \leq t \leq s + 1} |f(t)| \exp(\Sigma_+(t))}{w_1} + 1 \right]. \quad (5.15)$$

Покрывая промежутки I_3 малыми отрезками равной длины и применяя для каждого из них оценку (5.15), получаем оценки сверху и снизу для числа N , что и доказывает лемму.

6 Обгон

Исследуем, как меняется расстояние между решениями системы $(\widehat{*})$ с течением времени, пока t пробегает отрезок I_3 . Рассмотрим решение $z(t) = (x(t), y(t))^T$ задачи Коши для системы $(\widehat{*})$ с начальными данными $x(t_0) = x_0 > 0$, $y(t_0) = y_0 < 0$. Пусть t' – первый момент удара решения $z(t)$ после t_0 , а $\eta = y(t_0 + 0) > 0$. Тогда

$$t' - t_0 = -\frac{x_0}{y_0} + r_1(t_0, x_0, y_0), \quad \eta = -y_0 + f(t_0)\frac{x_0}{y_0} + r_2(t_0, x_0, y_0) \quad (6.1)$$

где $r_1(t_0, x_0, y_0) = o(x_0/y_0)$, а $r_2(t_0, x_0, y_0) = O(y_0^2 + x_0^2/y_0^2 + x_0/(Ty_0))$.

Пусть t'' – момент удара решения $z(t)$, следующий за t' , η'' – соответствующее значение послеударной скорости. В силу формул (5.13),

$$\eta'' = -(\eta + p_1 f(y_0)(t'' - t')\eta/3) + O(\eta^2(\eta + 1/T)).$$

Фиксируем некоторое значение $t \in (t', t'')$. Тогда

$$y(t) = \eta + f(t_0)(t - t') + r_3(t, t', \eta),$$

где $r_3(t, t', \eta) = O(\eta^3 + \eta/T)$,

$$x(t) = \eta(t - t') + f(t_0)(t - t')^2/2 + r_4(t, t', \eta),$$

где $r_4(t, t', \eta) = O(\eta^2(\eta^2 + 1/T))$. Подставляя в последние формулы значения t' и η из (6.1), получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(-y_0 + f(t_0)\frac{x_0}{y_0}\right) \left(t - t_0 + \frac{x_0}{y_0}\right) + f(t_0) \left(t - t_0 + \frac{x_0}{y_0}\right)^2 + \\ &+ r_5(t, x_0, y_0); \\ y(t) &= -y_0 + f(t_0)\frac{x_0}{y_0} + f(t_0) \left(t - t_0 + \frac{x_0}{y_0}\right) + r_6(t, x_0, y_0), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $r_{5,6}(t, x_0, y_0) = O(x_0^3/y_0^3 + x_0/(Ty_0))$. С другой стороны, как следует из (5.7) и (5.13),

$$t'' - t' = \frac{2\eta}{f_0} \left(1 + \frac{p_1\eta}{3}\right) + O(\eta^3).$$

Если x_0 стремится к нулю, $t' \rightarrow t_0$, $\eta \rightarrow y_0$. Вычисляя в (6.2) производные $x(t)$ и $y(t)$ по x_0 и y_0 , учитывая (5.13) и устремляя в (6.2) x_0 к нулю, t' к t_0 , а t к t'' , получаем следующую матрицу производных:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 - \frac{p_1(t'' - t')}{2} + O((t'' - t')^2) & t'' - t' + O((t'' - t')^2) \\ -\frac{2 + p_1(t'' - t')/3 + O((t'' - t')^2)}{t'' - t'} & -1 + \frac{p_1(t'' - t')}{2} + O((t'' - t')^2) \end{array} \right) \quad (6.3)$$

Таким образом, решению, соответствующему большему значению скорости η в момент удара, отвечает больший промежуток $t'' - t'$ времени между соседними ударами. В случае, когда координаты y двух решений в некоторый момент времени совпадают, промежуток между двумя ударами больше для того решения, которому соответствуют большие начальные данные по оси x . Это явление, характерное для систем с условиями удара, назовем обгоном (рис. 5). Именно благодаря ему в рассматриваемой виброударной системе возникает неустойчивость.

Фиксируем $z_0 \in \Lambda$ и соответствующее решение $z(t) = z(t, T_1, z_0)$. Пусть t_k – моменты ударов $z(t)$, а y_k – соответствующие скорости. Положим $z_k = (0, y_k)$. Пусть $\zeta = (\xi, \eta)$, положим

$$D_k = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial z(t_{k+1} - \Delta, t_k - \Delta, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta = z(t_k - \Delta, t_k, z_k)}.$$

Матрица D_k имеет вид (6.3), следовательно, ее можно записать в форме

$$\exp\left(\frac{-p_1(t_{k+1} - t_k)}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 + O((t_{k+1} - t_k)^2) & y_k + O((t_{k+1} - t_k)^2) \\ \frac{-2}{t_{k+1} - t_k}(1 + O(t_{k+1} - t_k)) & -1 + O((t_{k+1} - t_k)^2) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$\frac{1}{t_{k+1} - t_k} - \frac{1}{t_{k+2} - t_{k+1}} = \frac{t_k + t_{k+2} - 2t_{k+1}}{(t_{k+2} - t_{k+1})(t_{k+1} - t_k)} = \frac{-p_1}{3} + O(t_{k+2} - t_k).$$

С учетом этого, перемножая соседние матрицы D_k , получаем, что матрица $D'_k = D_{k+1}D_k$ имеет вид

$$\exp\left(\frac{-p_1(t_{k+2} - t_k)}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 + O((t_{k+2} - t_k)^2) & t_{k+2} - t_k + O((t_{k+2} - t_k)^2) \\ \frac{-2p_1}{3} + O(t_{k+2} - t_k) & -1 + O((t_{k+2} - t_k)^2) \end{pmatrix}$$

Матрица же $D''_k = D'_{k+2}D'_k$ имеет вид

$$\exp\left(\frac{-p_1(t_{k+4} - t_k)}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 + O((t_{k+4} - t_k)^2) & O((t_{k+4} - t_k)^2) \\ 4p_1(1 + o(t_{k+4} - t_k))/3 & 1 + O((t_{k+4} - t_k)^2) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8p_1f(t_k)/3 & 0 \end{pmatrix},$$

$\tilde{D}_k = \exp(p_1(t_{k+4} - t_k)/2)D''_k$, тогда $\tilde{D}_k = \exp(J_0)(E + o(t_{k+4} - t_k))$. Таким образом, \tilde{D}_k можно представить как значение при $t = t_4$ фундаментальной матрицы системы $\dot{z} = J_0 + Q(t)$, где $Q(t) = O(t_{k+4} - t_k)$.

Пусть N – число ударов решения $z(t)$ на промежутке I_3 . Отметим, что при таком выборе N утверждение леммы 5.3 остается справедливым. Пусть $N_1 = [N/4]$. Произведение $D''_{4N_1+1}D''_{4N_1-3} \dots D''_5D''_1$ в силу упомянутой выше теоремы Алексева-Лященко [1] имеет вид

$$\exp(-p_1T_2/2) \begin{pmatrix} \pm \exp(o(T)) & \pm \exp(-2\Sigma + o(T)) \\ \pm \exp(2\Sigma + o(T)) & \pm \exp(o(T)) \end{pmatrix} = \exp(-p_1T_2/2)A. \tag{6.4}$$

Такой же вид имеет произведение $D_N D_{N-1} \dots D_2 D_1$. Отметим также, что

$$\prod_{j=1}^N \det D_k = \exp(-p_1T_2 + o(T)). \tag{6.5}$$

7 Оценки показателей Ляпунова

Представим отображение \widehat{G} как композицию отображений G_I и G_{II} , определенных следующим образом: $G_I(z_0) = z(T_3, 0, z_0)$, $G_{II}(z_1) = z(T, T_3, z_1)$. В качестве T_3 выбираем наибольшее число, для которого утверждение леммы 4.2 остается справедливым. Тогда для любой точки $z_0 \in D_\beta^+$ матрица Якоби $DG(z_0)$ отображения \widehat{G} в точке z_0 представима в виде $DG(z_0) = DG_{II}(G_I(z_0))DG_I(z_0)$. Поскольку $|T_1 - T_3| \leq C$, матрица $DG_I(z_0)$ имеет вид

$$DG_I = \exp(-\Upsilon) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \exp(-\Upsilon)B,$$

где нормы матрицы B и матрицы B^{-1} ограничены сверху константой, не зависящей от T , а число Υ определяется формулой (3.12). С другой стороны, матрица DG_{II} и ее определитель имеют соответственно вид (6.4) и (6.5), что также следует из того факта, что $|T_1 - T_3| \leq C$. Обозначим коэффициенты матрицы A в правой части формулы (6.4) через a_{ij} . Тогда

$$DG = \exp(-\Upsilon - p_1 T_2/2) \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

причем $\det DG = \pm \exp(-2\Upsilon - p_1 T_2) \det A \det B$. Так как $\det A$ и $\det B$ равны $\pm \exp(o(T))$, справедлива оценка $|\det DG| \leq \exp(-2\Upsilon - p_1 T_2 + \delta T)$, где параметр δ может быть выбран сколь угодно малым, если T достаточно велико. С другой стороны, след матрицы DG считается по формуле

$$\text{Tr } DG = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}).$$

Таким образом, если

$$|b_{12}| \geq \exp(-\alpha_0 T/3), \tag{7.1}$$

то $|\text{Tr } DG| \geq \exp(\alpha_0 - a)T$, где число $a > 0$ может быть взято сколь угодно малым, если T достаточно велико. А тогда, если λ_1 и λ_2 – собственные числа матрицы DG , то справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &\geq \exp((\alpha_0 - a)T) = \exp(2\Sigma - \Upsilon - p_1 T_2/2 - aT), \\ |\lambda_2| &\leq \exp(-\Upsilon - p_1 T_2/2). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Как следует из вида матрицы DG , направление, соответствующее собственному числу λ_1 в каждой фиксированной точке z , сколь угодно близко при больших T к направлению векторного поля системы (2.1) в точке z в момент времени $t = 0$. Пусть r и θ – полярные координаты в полуплоскости Λ . В силу формул (3.10) и (3.11) найдется такое $\bar{\theta} \in (-\pi/2, \pi/2)$, что если

$$\Lambda_1 = \{z \in \Lambda : |\theta - \bar{\theta}| < \exp(-\alpha_0 T/4)\},$$

то для любого $z_0 \notin \Lambda_1$ выполнена оценка (7.1), а также оценка (7.2) (рис. 6). Положим $\Lambda_2 = \Lambda \setminus \Lambda_1$ и в дальнейшем ограничимся поиском неблуждающих точек на множестве Λ_2 .

8 Локализация инвариантного множества

Поскольку все решения системы $(\widehat{*})$ (равно, как и все решения системы $(*)$) с течением времени попадают в область D и

$$\widehat{G}(D) \subset Q_0 = \{(x, y) \in \Lambda : \exp(-2\Sigma_+(T)) \leq v(z) \leq \exp(-2\Sigma_-(T))\},$$

все неблуждающие точки отображения Пуанкаре \widehat{G} принадлежат Q_0 . Справедлива оценка $\text{diam } Q_0 < \exp(aT_2 - \Sigma)$, где число $a > 0$ можно взять сколь угодно малым, если T достаточно велико. Так как $Q_0 \subset D$, получаем, что $\widehat{G}(Q_0) \subset Q_0$. Множества $Q_k = \overline{\widehat{G}^k(Q)}$ образуют последовательность вложенных компактов $\overline{Q_0} \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$. Положим

$$Q_\infty = Q_0 \cap Q_1 \cap Q_2 \dots$$

Тогда множество неблуждающих точек отображения \widehat{G} содержится в Q_∞ .

Фиксируем малое $a > 0$ и такое $T > 0$, чтобы выполнялась первая из оценок (7.2) и положим

$$\delta = \exp(aT - p_1 T_2 / 2 - \Upsilon - \Sigma).$$

Рассмотрим кривую $\eta_0 \subset \Lambda$, заданную соотношением $v(z) = \exp(-2\Sigma(T))$. Длина кривой η_0 , а также длина проекции этой кривой на ось Oy оцениваются сверху и снизу величинами вида $C \exp(-\Sigma(T))$. Множество $\widehat{G}(\eta_0)$ состоит, вообще говоря, из нескольких компонент связности, каждая из которых является гладкой кривой. Суммарная их длина l удовлетворяет оценке

$$\exp(\Sigma - \Upsilon - p_1 T_2 / 2 - aT) \leq l \leq \exp(\Sigma - \Upsilon - p_1 T_2 / 2 + aT).$$

Для каждой из точек $z \in G(\eta_0)$ проведем прямую $P(z)$ вдоль направления, соответствующего $\lambda_2(z)$ – меньшему по модулю собственному числу матрицы $DG(z)$. Длина компоненты связности множества $P(z) \cap \widehat{G}(Q)$, содержащей точку z (очевидно, что это будет кривая) не превосходит δ . Определим

$$\widetilde{Q} = \bigcup_{z \in \widehat{G}(\eta_0)} P(z) \cap \widehat{G}(Q).$$

Отметим, что вместо η_0 можно было выбрать произвольную кривую, лежащую в Q_0 и соединяющую положительную и отрицательную полуоси оси Oy .

При больших значениях T кривая Γ представляет собой график функции $x = \gamma(y)$, определенной при $y \leq 0$, принимающей положительные значения и имеющей в окрестности нуля положительную вторую производную. Вторая производная функции $x = \xi(y) > 0$, неявно заданной соотношением $w(z) = W_0$, отрицательна. Сама функция ξ задана в малой окрестности начала координат. Стало быть, уравнение $\xi(y) = \gamma(y)$ имеет единственное решение $y_0^- < 0$. Положим $x_0^- = \gamma(y_0^-)$. Уравнение $\xi(y) = 0$ имеет два

корня: положительный и отрицательный. Обозначим положительный через y_0^+ . Рассмотрим область H , заданную соотношениями:

$$H = \{(x, y) \in \Lambda : v(z) \in \tilde{Q}, y \in [y^-, y^+]\}.$$

Считаем, что величины y^\pm удовлетворяют следующим условиям:

$$y_0^- \leq y^- < y^+ \leq y_0^+, \quad y^+ - y^- \geq \text{diam}(\text{pr}_y Q_0)/10$$

и при этом $H \subset \Lambda_2 \cap D_{W_1}^+ \cap \tilde{Q}$ (рис. 7). В силу того, что сектор Λ_1 можно выбрать сколь угодно узким при достаточно большом T , такое множество H существует.

Ясно, что $H \subset Q_0$, причем отображение $\hat{G}|_H$ является C^1 -гладким в окрестности каждой точки непрерывности. С учетом формул (7.2) для собственных чисел матриц $DG(p)$ получаем, что в окрестностях этих точек \hat{G} является локальным диффеоморфизмом. Обозначим отрезки границы множества H , заданные условиями $y = y^\pm$, через ∂^\pm .

Лемма 8.1. $\hat{G}(H) \cap H \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\eta \subset H$ – произвольная гладкая кривая, соединяющая точки множеств ∂^- и ∂^+ и являющаяся графиком некоторой гладкой функции $x = \xi(y)$, такой, что $\max |\xi'(y)| \leq 1$. Рассмотрим натуральную параметризацию на кривой η , определяемую отображением $h_0 : [0, l_0] \rightarrow H$, где $h_0(0) \in \partial^-$, $h_0(l_0) \in \partial^+$. Рассмотрим оператор pr_y , соответствующий ортогональной проекции на ось Oy . Из (1.6) получаем

$$2\Sigma - p_1 T_2/2 - \Upsilon > \alpha_0 T. \tag{8.1}$$

Из формул (7.2) и выбора области H следует, что

$$\int_0^{l_0} \text{pr}_y \frac{d}{dt} \hat{G}(h_0(t)) dt \geq \exp\left(2\Sigma - \Upsilon - \frac{p_1 T_2}{2} - aT\right) l_0,$$

где число $a > 0$ можно взять сколь угодно малым, если T велико. Отсюда и из формулы (8.1) следует, что сумма длин проекций компонент связности множества $\hat{G}(\eta)$ на ось y более, чем вдвое превосходит диаметр множества Q_0 , следовательно $\hat{G}(\eta)$ не может целиком содержаться в $Q_0 \setminus H$, что и доказывает лемму.

Фиксируем некоторое число $M_0 > 0$. Если

$$T > \bar{T} = \frac{2 \ln M_0}{\alpha_0}, \tag{8.2}$$

суммарную длину проекций $S(\widehat{G}(D_\beta^+))$ множества $\widehat{G}(H)$ на ось Oy можно оценить по формуле

$$S(\widehat{G}(H)) > M_0 \text{diam } Q_0. \quad (8.3)$$

Тогда число компонент связности множества $\widehat{G}(H)$ не меньше числа $[M_0]$ – целой части M_0 . Отметим, что чем большее значение T выбрано, тем меньшей можно взять величину α_0 , чтобы оценка (8.3) оставалась справедливой.

9 Подкова Смейла

Если η – кривая, соединяющая ∂^+ и ∂^- и являющаяся графиком функции $x = \xi(y)$, такой, что $|\xi'(y)| \leq 1$, то множество $\widehat{G}(H) \cap H$ содержит кривую $\tilde{\eta}$, обладающую теми же свойствами.

Пусть $z_0 \in \widehat{G}(H) \cap H$. Обозначим через $z(t)$ соответствующее решение системы $(\widehat{*})$. Поставим в соответствие точке z_0 число $N(z_0)$ ударов соответствующих решению $z(t)$ на отрезке $[-T, 0]$. Пусть N_1 – минимальное значение $N(z)$ на множестве $\widehat{G}(H) \cap H$, N_2 – максимальное, $M = N_2 - N_1 + 1$. Для любого $j = 1, \dots, n$ рассмотрим множества

$$H_j = \{z \in \widehat{G}(H) \cap H : N(z) = j + N_1 - 1\}.$$

Все множества H_j компактны и $\widehat{G}(H) \cap H = H_1 \cup \dots \cup H_M$ (рис. 8). В каждом из множеств H_j выберем (если возможно) компоненту связности K_j , содержащую кривую η с указанными выше свойствами. Если такой компоненты не существует, положим $K_j = \emptyset$. Определим $\tilde{K} = K_1 \cup \dots \cup K_M$. Как следует из сказанного выше, $\tilde{K} \neq \emptyset$.

Лемма 9.1. Пусть $\eta \subset \tilde{K}$ – кривая, представляющая собой образ непрерывного отображения $h : [0, l] \rightarrow H$, такого, что

$$h_0(0) \in \partial^+, \quad h_0(l) \in \partial^-.$$

Предположим также, что эта кривая является графиком некоторой гладкой функции $x = \xi(y)$, такой, что $\max |\xi'(y)| \leq 1$. Тогда найдется такое $n > 1$, что если T достаточно велико, то множество $\widehat{G}^n(\eta)$ пересекает K_j для любого $2 \leq j \leq M - 1$, причем для любого $j \in \{3, \dots, M - 2\}$ пересечение множеств $\widehat{G}^n(\eta)$ и K_j содержит кривую η_j , обладающую теми же свойствами, что и η .

Замечание. В частности, $K_j \neq \emptyset$ для любого $3 \leq j \leq M - 2$. Поскольку, чем больше T , тем больше M , множество \tilde{K} при больших T содержит как минимум 2 компоненты связности.

Доказательство. Для любой точки $z \in \tilde{K}$ найдется такая точка $\zeta \in \eta$, что $\text{dist}(z, \zeta) \leq C(W_1 - W_0) \leq \exp(2aT - p_1T_2/2 - \Upsilon - 2\Sigma)$. Возьмем произвольную кривую ρ , соединяющую точки z и ζ и лежащую в H . Тогда длина $\widehat{G}(\rho)$ (или сумма длин компонент этой кривой) не превосходит величины $\exp(3aT - p_1T_2 - 2\Upsilon) = s$. Если

$$s \leq \sqrt{W_0}/2, \quad (9.1)$$

то любая точка множества $\widehat{G}(\tilde{K})$ соединяется с некоторой точкой из $\widehat{G}(\eta)$ кривой, лежащей в $\widehat{G}(H)$, длина которой не превосходит половину длины проекции множества Q_0 на ось y , что и доказывает лемму. Если (9.1) неверно, то, выбирая по аналогии с результатами раздела 8 число n таким, что $\widehat{G}^n(Q)$ содержится в δ -окрестности множества $\widehat{G}^n(\eta)$ и переходя от отображения \widehat{G} к его соответствующей степени, получаем требуемый результат. Лемма доказана.

Далее, не умаляя общности, будем считать, что $n = 1$. Все приводимые ниже рассуждения сохраняют силу и при $n > 1$.

Лемма 9.2. Если значение T достаточно велико, то для любого $m \in \mathbb{N}$ и любого набора чисел $a = (a_0, \dots, a_m)$, такого, что $3 \leq a_j \leq M - 2$ для любого $j = 0, \dots, m$, множество

$$K_a = K_{a_0} \cap \widehat{G}^{-1}(K_{a_1}) \cap \dots \cap \widehat{G}^{-m}(K_{a_m})$$

непусто.

Доказательство. Фиксируем индекс a . Из леммы 9.1 следует, что образ рассмотренной выше кривой η (выбранной произвольным образом) содержит кривую $\eta_{a_0} \subset K_{a_0}$, соединяющую ∂^+ и ∂^- . Применяя лемму 9.1 к кривой η_{a_0} , получим, что найдется кривая $\eta_{a_0 a_1} \subset \widehat{G}(\eta_{a_0}) \cap K_{a_1}$. Продолжая эту процедуру, получим кривую $\eta_{a_0 \dots a_m} \subset K_{a_m} \cap \dots \cap \widehat{G}^m(K_{a_0})$. Тогда утверждение леммы следует из того, что $\widehat{G}^{-m}\eta_{a_0 \dots a_m} \subset K_a$.

Положим

$$K = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{G}^n(\tilde{K}).$$

Очевидно, что множество K инвариантно под действием отображения \widehat{G} , компактно и непусто, как пересечение вложенных компактов (пересечений конечного числа итераций компакта \tilde{K}). Кроме того, $K \subset \widehat{G}^{-1}(\tilde{K})$, следовательно, множество K не пересекается с прообразом оси Oy . Кроме того, K не пересекается с кривой Γ , поэтому найдется такая окрестность Ω множества K , что $\widehat{G}|_{\Omega}$ — диффеоморфизм.

Каждой точке $z \in K$ соответствует единственная последовательность

$$a(z) = \{\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots\}, \quad a_n \in \{3, \dots, M-2\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

такая, что $\widehat{G}^n(z) \in K_{a_n}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Из леммы 9.2 следует, что для любой последовательности a можно подобрать соответствующую точку z . Заметим, что в силу гиперболичности диффеоморфизма \widehat{G} в окрестности множества K точка $z \in K$ однозначно определяется последовательностью $a(z)$. Если $M \geq 6$, множество возможных значений величин a_j не меньше 2 и множество K имеет мощность континуум. Отображению \widehat{G} соответствует сдвиг последовательности $a(z)$ на единицу влево. Таким образом, отображение $\widehat{G}|_K$ (равно, как и отображение G) обладает теми же свойствами, что и знаменитая "подкова Смейла а именно:

- I) отображение $G|_K$ имеет бесконечно много периодических точек;
- II) периодические точки G всюду плотны в K ;
- III) существует точка $z_0 \in K$, орбита которой $\{G^n(z_0) : n \in \mathbb{Z}\}$ всюду плотна в K .

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям (1.2) и (1.6) для некоторого $\alpha_0 > 0$, причем это уравнение конвергентно при достаточно больших T . Тогда существует такое $\bar{T} > 0$, что если $T > \bar{T}$, то отображение G имеет гиперболическое инвариантное множество K со свойствами I)–III).

Таким образом, показано, что система (*) имеет компактное гиперболическое инвариантное множество, содержащее бесконечно много периодических решений и всюду плотную траекторию. Такие множества часто называют хаотическими. Видно, что введенное выше множество Q_∞ представляет собой аттрактор. Хаотическое множество содержится, разумеется, в этом аттракторе. Такие аттракторы часто называют странными. Итак, показано, что виброударная система (*) имеет странный аттрактор.

Отметим также, что результаты, аналогичные приведенным выше, могут быть получены для функции f с произвольным конечным числом простых корней на периоде.

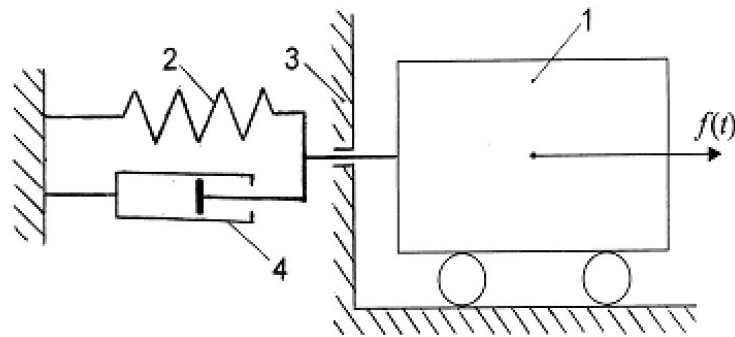


Рис. 1. Рассматриваемая механическая система.

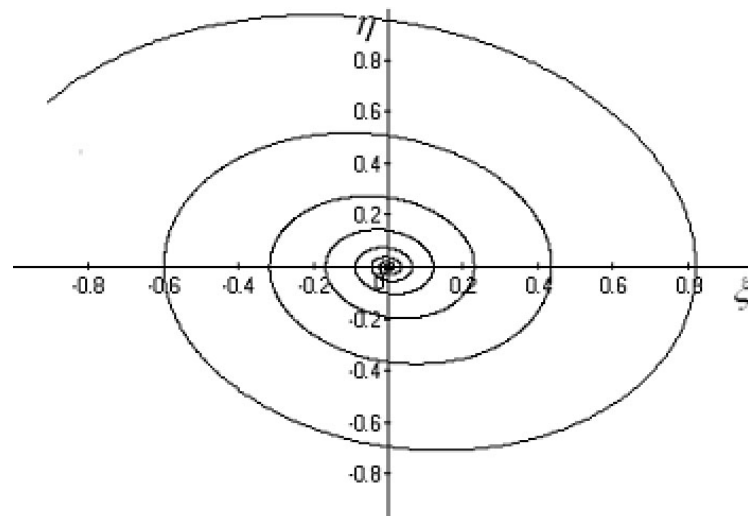


Рис.2. Вид решений уравнения (3.5) в окрестности начала координат.

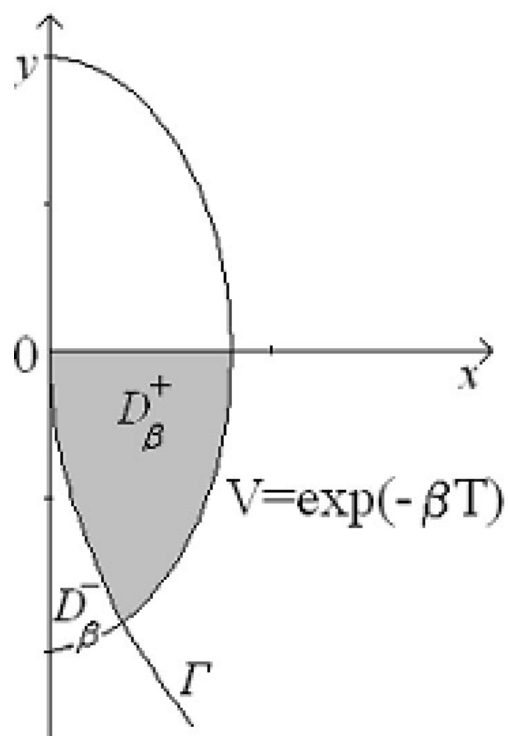


Рис. 3. Кривая Γ и ограниченные ею области.

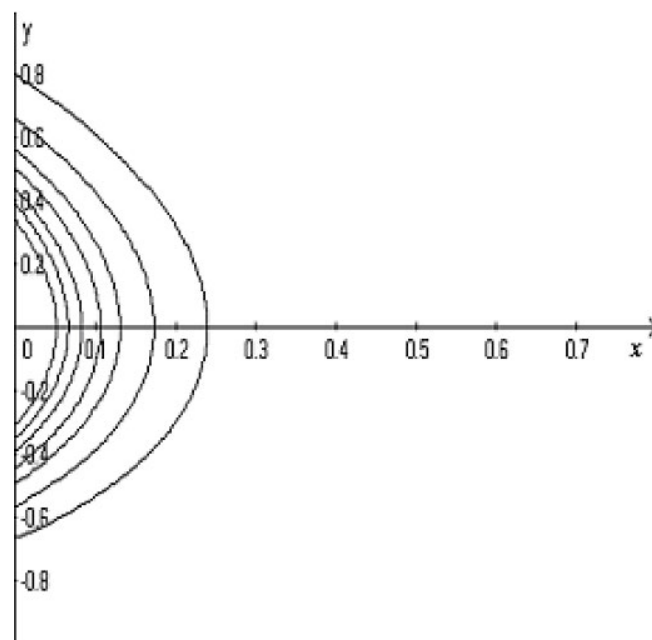


Рис. 4. Поведение решений виброударной системы когда правая часть отрицательна.

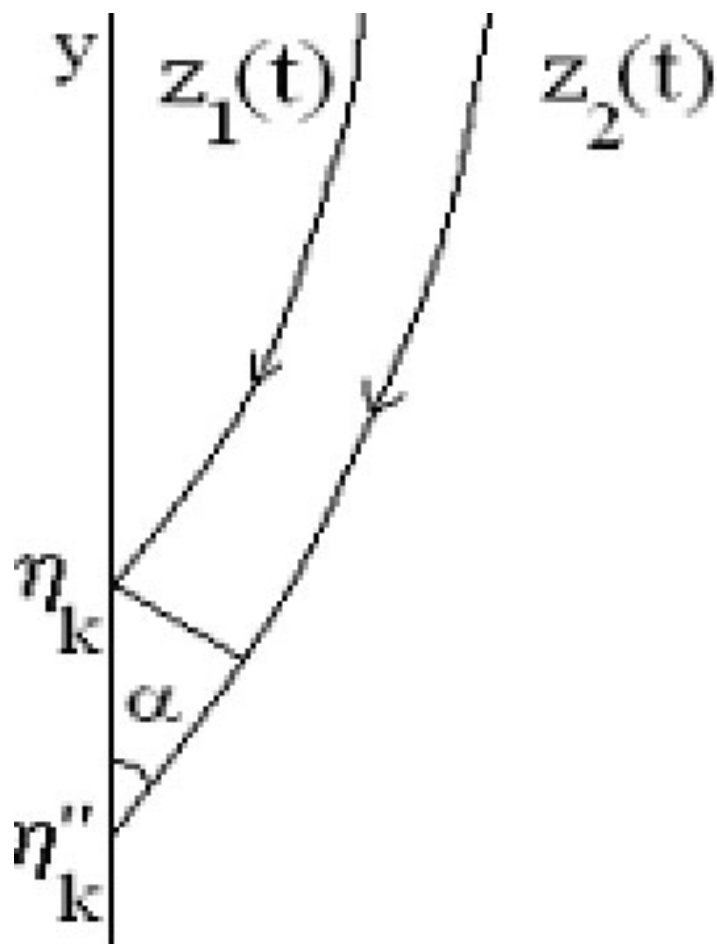


Рис. 5. Явление обгона.

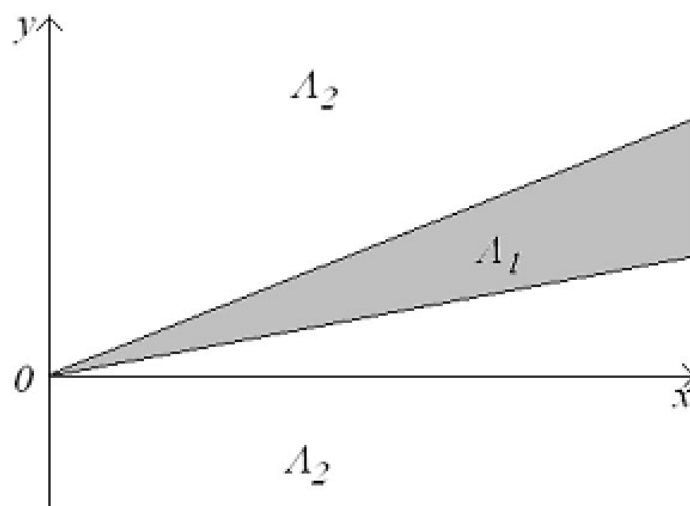


Рис. 6. Сектора Λ_1 и Λ_2 .

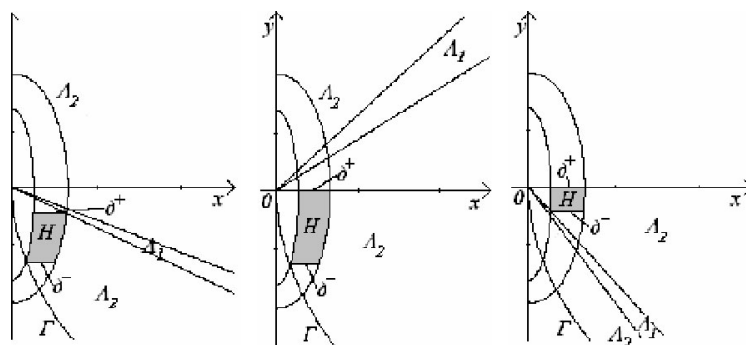


Рис. 7. Возможные виды области H.

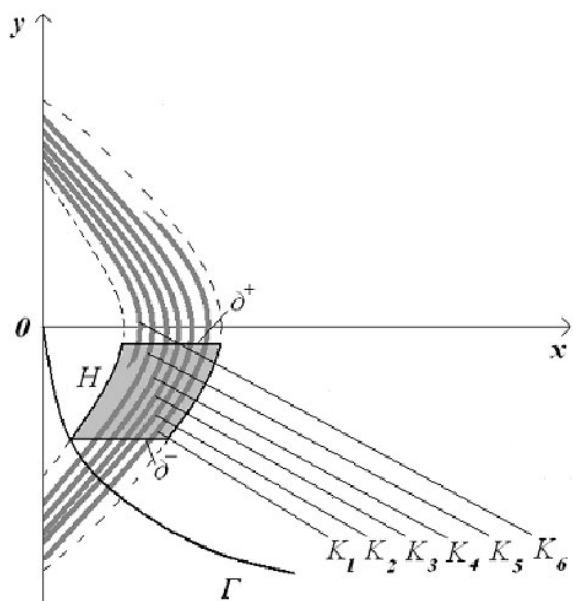


Рис.8. “Подкова Смейла” для рассматриваемой виброударной системы.

Список литературы

- [1] *Алексеев В. М.* Об асимптотическом поведении решений слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений // Докл. Акад. Наук СССР, 1960, Т. 134, №2, С. 247–250.
- [2] *Бибиков Ю. Н.* Критерии абсолютной устойчивости двумерных систем с нестационарными нелинейностями // Метод теории Ляпунова в анализе динамики систем. Сб. статей. Новосибирск. "Наука 1987, С. 189–193.
- [3] *Горбиков С. П. Меньшенина А. В.* Бифуркация, приводящая к хаотическим движениям в динамических системах с ударными взаимодействиями // Дифференц. уравнения, 2005, Т. 41, №8, С. 1046–1052.
- [4] *Козлов В. В., Трещев Д. В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991, 168 с.
- [5] *Крыжжевич С. Г., Плисс В. А.* Хаотические режимы колебаний виброударной системы // Прикладная математика и механика, 2005, Т. 69, Вып. 1, С. 15–29.
- [6] *Крыжжевич С. Г., Плисс В. А.* Пример хаоса в системе с ударами / Международная конференция "Четвертые Окуневские чтения 22-25 июня 2004 г., Санкт-Петербург, Россия. Материалы докладов. Том III. Симпозиум "Пуанкаре и проблемы нелинейной механики СПб, 2005, С. 65–75.
- [7] *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.–Л.: Наука, 1964, 367с.
- [8] *Плисс В. А.* Существование гиперболического интегрального множества специальной периодической системы.// Дифференц. уравнения, 1990, Т. 26, №5, С. 800–806.
- [9] *Плисс В. А.* Неблуждающее множество специальной гиперболической системы.// Дифференц. уравнения, 1990, Т. 26, №6, С. 966–975.
- [10] *Фейгин М. И.* Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994, 288с.
- [11] *Banerjee S., Yorke J. A., Grebogi C.* Robust chaos // Physical Review Letters, 1998, V. 80, № 14. P. 3049–3052.

- [12] *Budd C.* Grazing in impact oscillators / *Branner B. and Hjorth P.* Real and Complex Dynamical Systems. Kluwer Academic Publishers, 1995, P.47–64.
- [13] *Budd C., Dux F.* Chattering and related behavior in impacting oscillators // *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1994, V. 347, P. 365–389.
- [14] *Chin W., Ott E., Nusse H. E., Grebogi C.* Universal behavior of impact oscillators near grazing incidence // *Physics Letters A.* 1995. V. 201. P. 197–204.
- [15] *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. London-New York: Springer. 1986. = *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 560с.
- [16] *Hindmarsh D., Jefferies D.J.* On the motions of the offset impact oscillator // *J.Phys A: Math. Gen.*, V. 17, P. 1791–1803.
- [17] *Holmes P. J.* The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table // *J. Sound. Vib.*, V. 84, P. 173–189.
- [18] *Leine R. I., Van Campen D. H., Van de Vrande B. L.* Bifurcations in nonlinear discontinuous systems // *Nonlinear Dynamics*, 2000, V. 23, P. 105–164.
- [19] *Nguyen D. T., Noah S. T., Kettleborough C. F.* Impact behavior of an oscillator with limiting stops. Part I: A Parametric Study // *J. Sound Vib.*, 1986, V. 109, № 2, P. 293–307.
- [20] *Nordmark A. B.* Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator // *J. Sound Vib.* 1991, V. 145, № 2, P. 279–297.
- [21] *Nusse H. E., Ott E., Yorke J. A.* Border-collision bifurcations: An explanation for observed bifurcation phenomena // *Physical Review E*, 1994, V. 49, P. 1073–1076.
- [22] *Paoli L., Schatzman M.* Resonance in impact problems // *Math. Comput. Modelling*, 1998, V. 28, № 4–8, P. 385–406.
- [23] *Schatzman M.* Uniqueness and continuous dependence on data for one-dimensional impact problem // *Math. Comput. Modelling*, 1998, V. 28, № 4–8, P.1–18.
- [24] *Shaw S. W., Holmes P. J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // *J. Sound Vib.*, 1983, V. 90. № 1, P. 129–155.

- [25] *Sharma A., Ananthkrishnan N.* Large-amplitude limit cycles via a homoclinic bifurcation mechanism // J. Sound Vib., 2000, V. 236, № 4, P. 725–729.
- [26] *Shaw S. W.* The Dynamics of a Harmonically Excited System Having Rigid Amplitude Constrains. Part 2: Chaotic Motions and Global Bifurcations // Journal of Applied Mechanics, June 1985, V. 52, P. 459–464.
- [27] *Shaw S. W., Rand R. H.* The transition to chaos in a simple mechanical system // Int. J. Non-Linear Mechanics, 1989, V. 24, № 1, P. 41–56.
- [28] *Smale S.* Diffeomorfisms with many periodic points // Different. and Combinator. Topol. Princeton: Univ. Press, 1965, P.63–81 = *Смейл С.* Диффеоморфизмы со многими периодическими точками // Математика, 1967. Период. сб. перев. иностр. статей. № 4, С. 69–78.
- [29] *Thomson J. M. T., Ghaffari R.* Chaos after period-doubling bifurcations in the resonance of an impact oscillator // Physics Letters, 1982, V. 91A, № 1, P. 5–8.
- [30] *Thomson J. M. T., Ghaffari R.* Chaotic dynamics of an impact oscillator // Phys. Rev., 1983, V. 27A, №3., P. 1741–1743.
- [31] *Whiston G. S.* The vibro-impact response of a harmonically excited and preloaded one-dimensional linear oscillator // J. Sound Vib., 1987, V. 115, P. 303–319.
- [32] *Whiston G. S.* Global dynamics of a vibro-impacting linear oscillator // J. Sound Vib., 1987, V. 118, P. 395–429.
- [33] *Xu L., Lu M. W., Cao Q.* Bifurcation and chaos of a harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental harmonic balance method // J. Sound Vib., 2003, V. 264, P. 873–882.