ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2010
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77–39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 531.36

С. Г. Крыжевич

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ ХАОСА В КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ [1]

Введение. При исследовании различных задач механики, электроники, биологии, экономики и многих других приходится иметь дело с системами дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Один из наиболее известных примеров — так называемая "мягкая"(soft) модель удара [33]. В отличие от классических импульсных условий удара, предложенных Ньютоном и Гуком, эта модель предполагает, что ограничитель представляет собой упругий элемент большой, но конечной жесткости, а ударное взаимодействие является кратковременным, но не мгновенным. Строго говоря, ньютоновская и "мягкая"модели удара не являются эквивалентными, подробный анализ их сходств и различий приведен в работе [4], см. также [1], [2], [5] и [6]. Все системы с кусочно-непрерывной правой частью являются сильно нелинейными. Наличие разрывной правой части обуславливает большее разнообразие типов возможной динамики по сравнению с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Свойства решений различных систем с разрывной правой частью и бифуркации таких систем (как классические, так и специфические, например, C бифуркация или бифуркация скольжения) подробно изучались в статьях [3], [6], [9], [10], [11], [12], [18], [19], [20], [21], [22], [24], [25], [28], [27], [29], [30], [31], [32] и многих других. Очень часто в таких системах возникают хаотические режимы (см., например, [37],

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ - МК-4032.2009.1, РФФИ - 08-01-00346 и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры 2010-1.1-111.128-033.

[38], [41]). Однако, упомянутые работы в основном относятся либо к исследованию поведения решений систем, соответствующих околобифуркационным значениям параметров, либо . Условий коэффициентного типа, достаточных для существования хаоса для сколь-нибудь общего случая кусочно-линейных систем, до настоящего времени приведено не было.

В этой работе рассматривается система, заданная в зависимости от знака фазовой переменной x двумя линейными уравнениями с постоянными коэффициентами и гармоническими правыми частями. Изучаются периодические решения, имеющие ровно два простых корня на периоде. Приводятся достаточные условия существования таких решений. Рассматривалось так называемое стробоскопическое отображение F, ставящее в соответствие корню t_0 фазовой переменной x и соответствующему значению производной $\dot{x}(t_0)$ следующий по времени корень решения $x(t)$ (по модулю периода), для которого значение производной $\dot{x}(t)$ имеет тот же знак, то есть второй корень после t_0. Приводятся условия, достаточные для того, чтобы рассматриваемому периодическому решению соответствовала гиперболическая точка покоя стробоскопического отображения. В окрестности полученной точки покоя строятся локально инвариантные конусы, которые, в том числе, содержат локальные устойчивое и неустойчивое многообразия. Приводятся условия, достаточные для того, чтобы построенные конусы пересекались, чтобы это пересечение происходило раньше, чем один из этих конусов пересечет ось Oy на плоскости Oty и не раньше, чем соответствующее перроново многообразие пересечет границу этого конуса. Приводятся оценки наклона инвариантных многообразий, позволяющие утверждать, что пересечение конусов влечет наличие трансверсальной гомоклинической точки. Таким образом, приводятся коэффициентные условия наличия гиперболического хаотического инвариантного множества рассматриваемой системы.

Одной из наиболее интересных в прикладном отношении областей применения полученных результатов является задача описания колебаний зонда-кантилевера в сканирующем атомно-силовом микроскопе. Эта задача и связанные с ней математические модели (как правило, кусочно-линейные) изучались с разных точек зрения в работах [7], [8], [14], [15], [16], [17], [23], [26], [34], [35], [36], [39], [40], [42] и многих других.

Постановка задачи. Рассмотрим кусочно-линейную систему, описываемую уравнениями вида

$$\left[\begin{array}{ll} \ddot{x} + p_+\dot{x} + q_+x = f_+(t) = a_+\sin(\omega(t-\theta_+)) + b_+ & \text{при } x \geqslant 0; \\ \ddot{x} + p_-\dot{x} + q_-x = f_-(t) = a_-\sin(\omega(t-\theta_-)) + b_- & \text{при } x < 0; \end{array}\right. \tag{1}$$

Любое решение системы (1) существует и единственно на любом отрезке $[t_1, t_2]$, на котором оно не обращается в нуль вместе с производными. Мы будем предполагать, что

$$p_\pm < 0, \qquad p_\pm^2 < 4q_\pm. \tag{2}$$

Положим $T = 2\pi/\omega$. Общее решение первого из уравнений (1) имеет вид

$$\begin{gathered} x^+(t, C_1^+, C_2^+) = C_1^+ \exp(-p_+t/2)\cos(\nu_+t) + \\ + C_2^+ \exp(-p_+t/2)\sin(\nu_+t) + A_+\sin(\omega(t-\Theta_+) + B_+, \end{gathered} \tag{3}$$

а общее решение второго:

$$\begin{gathered} x^-(t, C_1^-, C_2^-) = C_1^- \exp(-p_-t/2)\cos(\nu_-t) + \\ + C_2^- \exp(-p_-t/2)\sin(\nu_-t) + A_-\sin(\omega(t-\Theta_-)) + B_-. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\nu_\pm = \sqrt{q_\pm - p_\pm^2/4}$, $A_\pm = a_\pm/\sqrt{(q_\pm - \omega^2)^2 + p_\pm^2\omega^2}$,

$$\Theta_\pm = \theta_\pm - \operatorname{arctg}(p_\pm\omega/(q_\pm - \omega^2)), \qquad B_\pm = b_\pm/q_\pm.$$

Ясно, что, варьируя значения параметров $a_\pm$, $b_\pm$ и $\theta_\pm$, можно получить любые значения наборов $A_\pm$, $B_\pm$ и $\Theta_\pm$. Предполагаем, что

$$A_\pm > |B_\pm|, \tag{5}$$

что гарантирует тот факт, что периодические решения обоих уравнений (1) не лежат целиком в областях $x \geqslant 0$ или $x \leqslant 0$.

Нас будет интересовать T – периодическое решение $\psi(t)$ рассматриваемой системы, имеющее ровно два простых нуля на периоде. Это решение находится из краевых условий вида

$$\begin{gathered} \psi_+(T_0) = \psi_+(T_1) = \psi_-(T_1) = \psi_-(T_0 + T) = 0; \\ \dot{\psi}_+(T_0) = \dot{\psi}_-(T_0 + T); \qquad \dot{\psi}_+(T_1) = \dot{\psi}_-(T_1); \\ T_1 < t_2 < t_1 + T; \qquad \psi^+(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2], \\ \psi^-(t) \leqslant 0 \quad \forall t \in [t_2, t_1 + T]. \end{gathered} \tag{6}$$

С учетом вида (3) и (4) решений соответствующих уравнений, условия (6) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}
C_1^+\exp(-p_+T_0/2)\cos(\nu_+T_0)+C_2^+\exp(-p_+T_0/2)\sin(\nu_+T_0)+\\
+A_+\sin(\omega(T_0-\Theta_+))+B_+=0;\\
C_1^+\exp(-p_+T_1/2)\cos(\nu_+T_1)+C_2^+\exp(-p_+T_1/2)\sin(\nu_+T_1)+\\
+A_+\sin(\omega(T_1-\Theta_+))+B_+=0;\\
C_1^-\exp(-p_-(T_0+T)/2)\cos(\nu_-(T_0+T))+\\
+C_2^-\exp(-p_-(T_0+T)/2)\sin(\nu_-(T_0+T))+\\
+A_-\sin(\omega(T_0-\Theta_-))+B_-=0;\\
C_1^-\exp(-p_-T_1/2)\cos(\nu_-T_1)+C_2^-\exp(-p_-T_1/2)\sin(\nu_-T_1)+\\
+A_-\sin(\omega(T_1-\Theta_-))+B_-=0;\\
C_1^+\exp(-p_+T_0/2)(-\nu_+\sin(\nu_+T_0)-p_+\cos(\nu_+T_0))+\\
+C_2^+\exp(-p_+T_0/2)(\nu_+\cos(\nu_+T_0)-p_+\sin(\nu_+T_0))+\\
+A_+\omega\sin(\omega(T_0-\Theta_+))=\\
C_1^-\exp(-p_-(T_0+T)/2)(-\nu_-\sin(\nu_-(T_0+T))-p_-\cos(\nu_-(T_0+T)))+\\
+C_2^-\exp(-p_-(T_0+T)/2)(\nu_-\cos(\nu_-(T_0+T))-p_-\sin(\nu_-(T_0+T)))+\\
+A_-\omega\sin(\omega(T_0-\Theta_-));\\
C_1^+\exp(-p_+T_1/2)(-\nu_+\sin(\nu_+T_1)-p_+\cos(\nu_+T_1))+\\
+C_2^+\exp(-p_+T_1/2)(\nu_+\cos(\nu_+T_1)-p_+\sin(\nu_+T_1))+\\
+A_+\omega\sin(\omega(T_1-\Theta_+))=\\
C_1^-\exp(-p_-T_1/2)(-\nu_-\sin(\nu_-T_1)-p_-\cos(\nu_-T_1))+\\
+C_2^-\exp(-p_-T_1/2)(\nu_-\cos(\nu_-T_1)-p_-\sin(\nu_-T_1))+\\
+A_-\omega\sin(\omega(T_1-\Theta_-));\\
T_1<t_2<t_1+T;\qquad x^+(t)\geqslant 0\quad \forall t\in[t_1,t_2],\\
x^-(t)\leqslant 0\quad \forall t\in[t_2,t_1+T]
\end{gathered}\tag{7}$$

В дальнейшем будем предполагать, что параметры рассматриваемой системы позволяют найти решение, удовлетворяющее условиям (7).

Не умаляя общности, можем считать $T_0=0$ (в противном случае, достаточно сделать замену переменных $\tau=t-t_0$). Будем обозначать значения произвольных постоянных, определяемых уравнениями (7), символами $C_{i*}^{\pm}$, то есть

$$\begin{gathered}
\psi_\pm(t)=C_{1*}^{\pm}\exp(-p_\pm t/2)\cos(\nu_\pm t)+\\
+C_{2*}^{\pm}\exp(-p_\pm t/2)\sin(\nu_\pm t)+A_+\sin(\omega(t-\Theta_\pm))+B_\pm.
\end{gathered}$$

Положим $F_\pm(t) = f_\pm(t)/\omega_\pm$. Уравнения (1) сводятся к системам

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -p_+ x/2 + \nu_+ y; \\ \dot{y} &= -\nu_+ x - p_+ y/2 + F_+(t), \end{aligned} \tag{8}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -p_- x + \nu_- y; \\ \dot{y} &= -\nu_- x - p_- y + F_-(t), \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим символом $(*)$ систему, определяемую уравнением (8) при $x \geqslant 0$ и уравнением (9) при $x \leqslant 0$. Рассмотрим $z(t, t_0, z_0)$ – решение системы $(*)$ с начальными данными (t_0, z_0).

Пусть $\Psi(x) = \mathrm{col}(\psi_x(t), \psi_y(t))$, где $\psi_x(t) = \psi(t)$,

$$\psi_y(t) = C_{2*}^{\pm} \exp(-p_\pm t/2) \cos(\nu_\pm t) - C_{1*}^{\pm} \exp(-p_\pm t/2) \sin(\nu_\pm t) + \\ + A_+ \left(\frac{\omega}{\nu_\pm} \cos(\omega(t - \Theta_\pm)) - \frac{p_\pm}{2\nu_\pm} \sin(\omega(t - \Theta_\pm)) \right) + \frac{pB_\pm}{2\nu_\pm}$$

при $x \geqslant 0$ и $x < 0$ соответственно. Отметим, что функция $\psi_y(t)$ непрерывна вместе со своей производной, так как это верно для функций $\psi(t)$ и $\dot{\psi}(t)$.

Условимся отождествлять множество $\mathbb{R}/T\mathbb{N}$ с окружностью S^1. Положим $\psi_y(0) = Y_0 > 0$, $\psi_y(T_1) = Y_1 < 0$. В окрестности U_0 значения

$$(0, Y_0) \in X = S^1 \times \mathbb{R}^+$$

определена C^1 – гладкая функция $F_0 : U_0 \to X$, ставящая в соответствие моменту времени t_0 перехода из отрицательной области значений x в положительную и скорости y_0 фазу следующего по времени перехода $t_1 \mod T$ (из положительной области значений в отрицательную) и скорость y_1 соответствующих решению $x(t)$ с начальными данными $(t_0, 0, y_0)$. При этом $F_0(0, Y_0) = (T_1, Y_1)$. Аналогично, найдется окрестность U_1 точки (T_1, Y_1) и отображение $F_1 : U_1 \to X$, ставящее в соответствие данным (t_1, y_1) данные, соответствующие следующему по времени переходу (на этот раз, из отрицательной области в положительную), причем $F_1(T_1, Y_1) = (0, Y_0)$. Положим $F = F_1 \circ F_0$. Тогда точка $(0, Y_0)$ является неподвижной по отношению к отображению F.

Вычислим матрицу Якоби отображения F в окрестности некоторой точки (t_0^0, y_0^0), для чего установим вид матриц DF_0 и DF_1.

Пусть $x^0(t)$ – решение, соответствующее начальным данным $x^0(t_0^0) = 0$, $\dot{x}^0(t_0^0) = y_0^0 > 0$. Будем считать для определенности, что $x^0(t) > 0$ на некотором промежутке (t_0^0, t_1^0), причем $\dot{x}^0(t_1^0) = y_1^0 < 0$. Пусть

$$\Phi_+(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11}^+ & \phi_{12}^+ \\ \phi_{21}^+ & \phi_{22}^+ \end{pmatrix};$$

$$\begin{gathered} \phi_{11}^+ = \exp(p_+(t - t_0^0)/2)\cos(\nu_+(t - t_0^0)) \\ \phi_{12}^+ = \exp(p_+(t - t_0^0)/2)\sin(\nu_+(t - t_0^0)) \\ \phi_{21}^+ = -\exp(p_+(t - t_0^0)/2)\sin(\nu_+(t - t_0^0)) \\ \phi_{22}^+ = \exp(p_+(t - t_0^0)/2)\cos(\nu_+(t - t_0^0)). \end{gathered}$$

Тогда

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t_0,y_0)}(t_1 - 0)\Big|_{(t_0,x_0,y_0)=(t_0^0,0,y_0^0)} =$$

$$= \Phi_+(t)\begin{pmatrix} -y_0^0 & 0 \\ p_+y_0^0 - a_+\sin(\omega(t_0^0 - \theta_+)) - b_+ & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial(t_1,y_1)}{\partial(x,\dot{x})}(t_1 - 0)\Big|_{(t_1,x_1,y_1)=(t_1^0,0,y_1^0)} = \begin{pmatrix} -1/y_1^0 & 0 \\ -p_+ + a_+\sin(\omega(t_1^0 - \theta_+)) + b_+/y_1^0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итого получаем

$$DF_0(t_0^0) = \frac{\partial(t_1,y_1)}{\partial(t_0,y_0)}\Big|_{(t_0,x_0,y_0)=(t_0^0,0,y_0^0)} = \begin{pmatrix} d_{011} & d_{012} \\ d_{021} & d_{022} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} &d_{011} = (\exp(p_+(t - t_0^0)/2)\cos(\nu_+(t - t_0^0))y_0^0 + \\ &+b_+ - a_+\sin(\omega\theta_+) - p_+)/y_1^0; \\ &d_{012} = -\exp(p_+(t - t_0^0)/2)\sin(\nu_+(t - t_0^0))/y_1^0; \\ &d_{021} = (\exp(p_+(t - t_0^0)/2)\sin(\nu_+(t - t_0^0))(p_+y_0^0) - \\ &-\exp(p_+(t - t_0^0)/2)\cos(\nu_+(t - t_0^0))y_0^0)\left(\frac{b_+ + a_+\sin(\omega(T_1 - \theta_-))}{y_1^0} - p_+\right) + \\ &+\exp(p_+(t - t_0^0)/2)\sin(\nu_+(t - t_0^0))y_0^0 + \\ &+\exp(p_+(t - t_0^0)/2)\cos(\nu_+(t - t_0^0))(p_+y_0^0 - b_+ - a_+\sin(\omega\theta_+)); \\ &d_{022} = \left(\frac{b_- + a_-\sin(\omega(T_1 - \theta_-))}{y_1^0} - p_+\right)\exp(p_+(t - t_0^0)/2)\sin(\nu_+(t - t_0^0)) + \\ &+\exp(p_+(t - t_0^0)/2)\cos(\nu_+(t - t_0^0)). \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется матрица

$$DF_1(t_1, y_1) = \frac{\partial(t_2, y_2)}{\partial(t_1, y_1)}\Bigg|_{\substack{t_1 = t_1^0, \\ y_1 = y_1^0}} = \begin{pmatrix} d_{111} & d_{112} \\ d_{121} & d_{122} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
&d_{111} = \exp(p_-(t - t_1^0)/2)\cos(\nu_-(t - t_0^0))y_0^0 + \\
&+(b_- + a_- \sin(\omega(T_1 - \theta_-)) - p_-)/y_1^0; \\
&d_{112} = \frac{-\exp(p_-(t - t_0^0)/2)\sin(\nu_-(t - t_0^0))}{y_1^0}; \\
&d_{121} = (\exp(p_-(t - t_0^0)/2)\sin(\nu_-(t - t_0^0))(p_- y_0^0) - \\
&-\exp(p_-(t - t_0^0)/2)\cos(\nu_-(t - t_0^0))y_0^0)\left(\frac{b_- + a_- \sin(\omega(T_1 - \theta_-))}{y_1^0} - p_-\right) + \\
&+\exp(p_-(t - t_0^0)/2)\sin(\nu_-(t - t_0^0))y_0^0 + \\
&+\exp(p_-(t - t_0^0)/2)\cos(\nu_-(t - t_0^0))(p_- y_0^0 - b_- - a_- \sin(\omega\theta_-)); \\
&d_{122} = \left(\frac{b_- + a_- \sin(\omega(T_1 - \theta_-))}{y_1^0} - p_-\right)\exp(p_-(t - t_0^0)/2)\sin(\nu_-(t - t_0^0)) + \\
&+\exp(p_-(t - t_0^0)/2)\cos(\nu_-(t - t_0^0)).
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$DF(t_0^0, y_0^0) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{011}d_{111} + d_{012}d_{121} & d_{011}d_{112} + d_{012}d_{122} \\ d_{021}d_{111} + d_{022}d_{121} & d_{021}d_{112} + d_{022}d_{122} \end{pmatrix}.$$

По формуле Остроградского – Лиувилля,

$$\det DF(t_0^0, y_0^0) = \frac{y_2^0}{y_0^0}\exp(p_+(t_0^0 - t_1^0) + p_-(t_1^0 - t_2^0)),$$

в частности, в точке покоя $(0, Y_0)$ он равен

$$\Delta_0 = \det DF(0, Y_0) = \exp(-p_+ T_1 - p_-(T - T_1)).$$

В силу сделанных выше предположений, $\Delta_0 \in (0, 1)$.

След матрицы $DF(t_0^0, y_0^0)$ в общем случае равен

$$\operatorname{Tr} DF(t_0^0, y_0^0) = d_{011}d_{111} + d_{012}d_{121} + d_{021}d_{112} + d_{022}d_{122}.$$

Везде далее будем предполагать, что

$$\operatorname{Tr} DF(0, Y_0) > 1 + \Delta_0, \tag{10}$$

что гарантирует тот факт, что точка покоя $O_1 = (0, Y_0)$ отображения F является седлом.

Замечание. Аналогично, хотя и чуть сложнее, может быть рассмотрен случай обратного седла, гарантируемый условием $\operatorname{Tr} DF(0, Y_0) < -1 - \Delta_0$.

Перроновы многообразия и гомоклиническая точка. Обозначим символами W^s_{loc} и W^u_{loc} локальные устойчивое и неустойчивое многообразия точки O_1, а символами W^s и W^u – их инвариантные замыкания (мы можем, фиксировав шаровую окрестность U точки O_1, определить множества W^σ_{loc}, $\sigma \in \{s, u\}$, как компоненты связности пересечения множеств W^σ с окрестностью U, содержащие точку O_1).

Далее будут приведены условия, достаточные для того, чтобы отображение F имело трансверсальную гомоклиническую точку, то есть чтобы устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия точки O_1 пересекались бы в некоторой точке p, отличной от O_1.

Пусть ϕ – полярный угол на плоскости Oty. Мы введем в рассмотрение непересекающиеся дуги окружностей (α^s_-, α^s_+) и $[\alpha^u_-, \alpha^u_+]$, а также конусы

$$K_s = \{(t, y) : \phi \mod \pi \in (\alpha^s_-, \alpha^s_+)\};$$
$$K_u = \{(t, y) : \phi \mod \pi \in (\alpha^u_-, \alpha^u_+)\}.$$

Обозначим граничные прямые этих конусов символами L^s и L^u. Предполагаем, что выполнены следующие условия.

Условие правильного пересечения конусов.

1. $K_s \bigcap K_u = \emptyset$.

2. Пусть M^s и M^u – касательные к многообразиям W^s и W^u в точке $(0, Y_0)$. Тогда $M^s \subset K_s$, $M^u \subset K_u$.

3. Пусть P – стандартное накрытие плоскостью $\mathbb{R}^2_{t,y}$ цилиндра $\mathcal{C} = S^1_t \times \mathbb{R}$. Тогда множество $P^{-1}(P(K_s) \bigcap P(K_u))$ содержит четырехугольник Q, ограниченный прямыми из множеств $P^{-1}(P(L^{s,u}_\pm))$ и целиком лежащий в множестве, заданном условием $y > 0$.

4. Возьмем тот из прообразов Q_s множества $P(Q)$, который целиком лежит в конусе K_s, а также прообраз Q_u, целиком лежащий в множестве K^u. Предполагаем, что их можно выбрать целиком лежащими в области $y > 0$. Обозначим символами C_s и C_u треугольники, являющиеся замыканиями выпуклых оболочек множеств $Q_s \bigcup \{(0, Y_0)\}$ и $Q_u \bigcup \{(0, Y_0)\}$ (рис. 1).

5. Пусть $z^u \in C_u \setminus \{(0, Y_0)\}$, $z^s \in C_s \setminus \{(0, Y_0)\}$. Тогда для любого $v^s \in K^s$, $v^u \in K^u$ выполнены условия

$$F(z^u) \neq 0, \quad F(z^s) \neq 0, \qquad \det DF(z^u) \neq 0, \quad \det DF(z^s) \neq 0,$$
$$DF(z^u)v^u \in K_u, \quad DF^{-1}(z^s)v^s \in K_s.$$

Рис. 1.

Последнее из приведенных условий означает следующее: какова бы ни была гладкая кривая, лежащая внутри конуса K_u, такая, что угол наклона касательной к ней в любой ее точке лежит в пределах от α_u^- до α_u^+, пересечения ее положительных итераций с множеством C_s будут снова кривыми того же вида. Аналогичное утверждение справедливо для отрицательных итераций кривых, лежащих во множестве K_s.

Фиксируем $t^* \in [-2\pi, 2\pi]$ и рассмотрим значения $C_{1,0}^+(t^*)$ и $C_{2,0}^+(t^*)$, задаваемые условиями

$$x^+(t^*, C_{1,0}^+(t^*), C_{2,0}^+(t^*)) = \dot{x}^+(t^*, C_{1,0}^+(t^*), C_{2,0}^+(t^*)) = 0.$$

Аналогично определяем величины $C_{1,0}^-(t^*)$ и $C_{2,0}^-(t^*)$.

Условие отсутствия скользящих режимов. Для любых $\sigma \in \{s, u\}$, $t_+^* \in (0, 2\pi)$, $t_-^* \in (-2\pi, 0)$ системы

$$x^+(t_0, C_{1,0}^+(t_+^*), C_{2,0}^+(t_+^*)) = 0;$$
$$\dot{x}^+(t_0, C_{1,0}^+(t_+^*), C_{2,0}^+(t_+^*)) = y_0$$

и

$$x^+(t_0, C_{1,0}^-(t_-^*), C_{2,0}^-(t_-^*)) = 0;$$
$$\dot{x}^+(t_0, C_{1,0}^-(t_-^*), C_{2,0}^-(t_-^*)) = y_0$$

не имеют решений $(t_0, y_0) \in C_\sigma$.

Это условие гарантирует то, что все решения, соответствующие точкам перроновых многообразий, лежащих внутри соответствующих треугольников, определены корректно. Выполнение приведенных выше условий, как будет показано ниже, влечет наличие у рассматриваемой системы гомоклинической точки.

В самом деле, локальные устойчивые многообразия точки $(0, Y_0)$ можно выбрать столь малыми, что по одной из компонент связности множеств $W^{s,u}_{loc} \setminus \{0, Y_0\}$ содержится в треугольниках C_s и C_u. Обозначим эти компоненты символами l^s и l^u соответственно. Множество l^s положительно инвариантно, а множество l^u – отрицательно инвариантно.

Найдутся такие натуральные величины n^s и n^u, что выполнены следующие условия.

1. $F^{-n^s}(l^s) \subset C_s$, $L^s = F^{-n^s-1}(l^s) \not\subset C_s$,
$$F^{n^u}(l^u) \subset C_u, \qquad L^u = F^{n^u+1}(l^u) \not\subset C_u.$$
Здесь мы заметим, длины всех кривых $\zeta^s_k = F^{-k-1}(l^s) \setminus F^{-k}(l^s)$ и длины кривых $\zeta^u_k = F^{k+1}(l^u) \setminus F^k(l^u)$ ограничены снизу при всех $k > 0$ таких, что $\zeta^s_k \subset C_s$ и $\zeta^u_k \subset C_u$.

2. $L^s \subset K_s$, $L^u \subset K_u$.

Таким образом, множества L^s и L^u являются гладкими кривыми, углы наклона которых лежат в интервалах $[\alpha^s_-, \alpha^s_+]$ и $[\alpha^u_-, \alpha^u_+]$ соответственно. Дуги этих кривых соединяют различные пары противолежащих сторон четырехугольника Q. Это означает, что внутри четырехугольника Q найдется точка трансверсального пересечения многообразий W^s и W^u. И, хотя условия теоремы Смейла-Биркгофа о существовании хаотического инвариантного множества при наличии трансверсальной гомоклинической точки, доказательство этой теоремы проходит для отображения F дословно. Итак, нами установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема. *При сделанных предположениях, а именно при выполнении неравенств* (2), (5), (10), *разрешимости системы* (7), *условия правильного пересечения конусов и условия отсутствия скользящих режимов дискретная динамическая система, заданная отображением F, имеет гиперболическое хаотическое инвариантное множество, поведение решений на котором описывается символической динамикой.*

Пример. Непосредственные вычисления показывают справедливость условий теоремы для системы

$$\left[\begin{array}{ll} \ddot{x} + 0.2\dot{x} + x = \sin t & \text{при } x \geqslant 0; \\ \ddot{x} + p_-\dot{x} + 100x = \sin t & \text{при } x < 0 \end{array}\right.$$

при выборе значений $\alpha_u^{\pm} = \pm\pi/12$, $\alpha_s^{+} = \pi/3$, $\alpha_s^{-} = \pi/6$. Численное моделирование подтверждает наличие у рассматриваемой системы хаотического инвариантного множества.

Список литературы

[1] *Бабицкий В. И. Теория виброударных систем. М., Наука, 1978, 352 с.*

[2] *Бабицкий В. И., Кобриниский А. Е.* Периодические движения двухмассовой колебательной системы в полости / В кн.: Теория машин и механизмов, вып. 103–104. М., Наука, 1964, с. 56–70.

[3] *Горелышев И. В., Нейштадт А. И.* Об адиабатической теории возмущений для систем с упругими отражениями
Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70, №1. С.6–19.

[4] *Евстигнеев В.* Применение метода полных бифуркационных групп для анализа сильных нелинейных осцилляторов и виброударных систем. Дисс. на соискание уч. степени. докт. физ-мат. наук, Рижский технический университет, Рига, Латвия. 2008. 146 с.

[5] *Фейгин М. И.* Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994. 288 с.

[6] *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 216 с.

[7] *Aime J. P., Boisgard R., Nony L., Couturier G.* Nonlinear dynamic behavior of an oscillating tip-microlever system and contrast at the atomic scale // Phys. Rev. Lett. V. 82, 1999, P. 3388–3391.

[8] *Ashhab M., Salapaka M. V., Dahleh M., Mezic I.* Melnikov-based dynamical analysis of microcantilevers in scanning probe microscopy // Nonlin. Dyn. V. 20, 1999. P. 197˘220.

[9] *B*anerjee S., Grebogi C. Border collision bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps // Phys. Rev. E. Vol. 59, 1999. P. 4052–4061.

[10] *di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A. R.* Normal form maps for grazing bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems // Physica D. V. 160, no. 3–4, 2001. P. 222-–254.

[11] *di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A. R., Kowalczyk P., Nordmark A. B., Olivar G., Piirionen P. T.* Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems // SIAM Review. V. 50, no. 4, 2008. P. 629–701.

[12] *di Bernardo M., Feigin M. I., Hogan S. J., Homer M. E.* Local analysis of C-bifurcations in N-dimensional piecewise-smooth dynamical systems // Chaos, Solitons and Fractals. V. 10, 1999. P. 1881–1908.

[13] *Dankowicz H., Nordmark A. B.* On the origin and bifurcations of stick-slip oscillations // Physica D. V. 136, 2000. P. 280–302.

[14] *Dankowicz H., Zhao X.* Characterization of intermittent contact in tapping mode atomic force microscopy. // J. Comput. Nonlin. Dyn. V. 1, 2006. P. 1–7.

[15] *Dankowicz H., Zhao X.* Unfolding degenerate grazing dynamics in impact actuators // Nonlinearity V. 19. 2006. P. 399–418.

[16] *Garcia R., Perez R.* Dynamic atomic force microscopy methods // Surf. Sci. Rep. V. 47, 2002, P. 197–301.

[17] *Giessibl F.J.* Advances in atomic force microscopy // Rev. Mod. Phys. V. 75, 2003, P. 949-–983.

[18] *Halse C., Homer T. M., di Bernardo M.* *C*-bifurcations and period-adding in one-dimensional piecewise smooth maps // Chaos, Solitons and Fractals. V. 18, 2003. no. 5. P. 953–976.

[19] *Hu S.* Differential equations with discontinuous right-hand sides // J. Math. Anal. Appl. V. 154, 1991, P. 377–390.

[20] *I*ng J. Near grazing dynamics of piecewise linear oscillators, Ph.D. Thesis, University of Aberdeen, 2008.

[21] *I*ng J., Pavlovskaia E., Wiercigroch M., Dynamics of a nearly symmetrical piecewise linear oscillator close to grazing incidence: Modelling and experimental verification // Nonlinear Dyn. Vol. 46, 2006. P. 225–238.

[22] *Ivanov A. P.* Bifurcations in impact systems // Chaos, Solitons and Fractals V.7, no. 10, 1996. P. 1615–1634.

[23] *Jalili N., Laxminarayana K.* A review of atomic force microscopy imaging systems: application to molecular metrology and biological sciences // Mechatronics. V. 14, P. 907–945.

[24] *Jin D. P., Hu H. Y.* Periodic vibro-impacts and stability of a dual component system // Acta Mechanism Sinica, V. 13, 1997. no. 4. P. 366–376.

[25] *Kunze M., Küpper T., You J.* On the application of KAM theory to discontinuous dynamical systems // J. Differential Equations, V. 139, 1997, P. 1–21.

[26] *Lee S. I., Howell S. W., Raman A., Reifenberger R.* Nonlinear dynamics of microcantilevers in tapping mode atomic force microscopy: a comparison between theory and experiment // Phys. Rev. B. V. 66, 2002. P. 115–409.

[27] *Leine R. I., Van Campen D. H., Van de Vrande B. L.* Bifurcations in nonlinear discontinuous systems // Nonlinear Dynamics. 2000. V. 23. P. 105–164.

[28] *Luo A. C. J.* Grazing and chaos in a periodically forced, piecewise linear system // J. Vibration and Acoustics. V. 128, 2006. P. 28–34.

[29] *Luo G. W., Yu J. N., Yao H. M., Xie J. H.* Periodic-impact motions and bifurcations of the vibratory system with a clearance // Chinese Journal of Mechanical Engineering. V. 42, 2006. P. 88–94.

[30] *Ma Y., Agrawal M., Banerjee S.* Border collision bifurcations in a soft impact system // Phys. Let. A. V. 354, no. 4, 2006, P. 281–287.

[31] *M*a Y, Ing J., Banerjee S., Pavlovskaia E., Wiercigroch M. The nature of the normal form map for soft impacting systems // Internat. J. Nonlinear Mech. Vol. 43, no. 6, 2008. P. 504–513.

[32] *Pavlovskaia E., M. Wiercigroch M.* Low-dimensional maps for piecewise smooth oscillators // Journal of Sound and Vibration 2007, V. 305 P. 750–771.

[33] *Peterka F., Vacik J.* Transition to chaotic motion in mechanical systems with impacts // J. Sound Vib. V. 154, 1992. P. 95–115.

[34] *Rutzel S., Lee S.-I., Raman A.* Nonlinear dynamics of atomic-force-microscope probes driven in Lennard-Jones potentials // Proc. R. Soc. A. V. 459, 2003. P. 1925–1948.

[35] *Sarid D., Ruskell T.G., Workman R.K., Chen D.* Driven nonlinear atomic force microscopy cantilevers: from noncontact to tapping modes of operation // J. Vac. Sci. Technol. B. V. 14, 1996. P. 864˘867.

[36] *Sebastian A., Salapaka M. V., Chen D. J., Cleveland J. P.* Harmonic and power balance tools for tapping-mode atomic force microscope // J. Appl. Phys. V. 89. 2001. P. 6473—6480.

[37] *Shaw S. W., Holmes P. J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // J. Sound Vib. 1983. V. 90. no. 1. P. 129−155.

[38] *Shaw S. W., Rand R. H.* The transition to chaos in a simple mechanical system // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1989. V. 24. no. 1. P. 41−56.

[39] *W*agg D. J., Karpodinis G., Bishop S. R. An Experimental study of the impulse response of a vibro-impacting cantilever beam // J. Sound Vib. Vol. 228, 1999. P. 243−264.

[40] *v*an de Water W., Molenaar J. Dynamics of vibrating force microscopy // Nanotechnology. Vol. 11, 2000. P. 192−199.

[41] *Wiercigroch M. Sin V. T. W.* Experimental study of base excited symmetrically piecewise linear oscillator // ASME J. Appl. Mech. V. 65, 1998. no. 3. P. 657.

[42] *Yagasaki K.* Nonlinear dynamics of vibrating microcantilevers in tapping-mode atomic force microscopy // Phys. Rev. B. V. 70, 2004, P. 245−255.