

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 4, 2016

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Моделирование динамических систем

Прикладные задачи

**Поверхностные и внутренние волны:  
двумерная задача о поступательном движении тела,  
пересекающего поверхность раздела двух жидкостей**

*Н.Г. Кузнецов, О.В. Мотыгин*

Лаборатория математического моделирования волновых процессов,  
Институт проблем машиноведения РАН,  
В.О., Большой пр-т, д. 61, 199178, Санкт-Петербург

**Аннотация**

Рассматривается плоская линейная краевая задача об установившихся поверхностных и внутренних волнах, образующихся при поступательном движении тела в жидкости, которая состоит из двух слоев различной плотности; тело полностью погружено в жидкости и пересекает поверхность раздела между ними. Предложены две корректные постановки этой задачи, в которых наряду с уравнением Лапласа, краевыми условиями, условиями на бесконечности и условиями сопряжения на поверхности раздела должна выполняться пара дополнительных условий в точках пересечения контура тела с этой поверхностью. Для одной из этих постановок (когда заданы разности горизонтальных компонент количества движения в точках пересечения) доказано существование единственного решения задачи для всех значений фигурирующих в ней параметров, кроме некоторого нигде не плотного (возможно пустого) множества исключительных значений.

**Ключевые слова:** поверхностные волны, внутренние волны, поверхность раздела, поступательное движение тела, краевая задача, условия сопряжения, корректная постановка.

## Abstract

The linear two-dimensional boundary value problem under consideration describes surface and internal waves due to the forward motion of a body in two superposed layers of fluid. The body is totally submerged and intersects the interface between layers having different densities. Two well-posed formulations of the problem are proposed; in these, along with the Laplace equation, boundary conditions, coupling conditions on the interface and conditions at infinity, a pair of supplementary conditions is imposed at the points, where the body's contour intersects the interface. For one of the well-posed formulations of the problem (when the difference between horizontal components of momentum is given at each of these points) the existence of a unique solution is proved for all values of the parameters involved with the exception for a set (possibly empty) which is nowhere dense.

**Key words:** surface waves, internal waves, interface, forward motion of a body, boundary value problem, coupling conditions, well-posed setting.

# 1 Введение

## 1.1 История вопроса

Вопрос о математическом описании корабельных волн уже около двухсот лет является предметом многочисленных исследований (см., например, работы [1]–[11], где приведена обширная библиография; особо отметим книгу [9] и учебное пособие [10], специально посвященные внутренним волнам). Основные положения сформулированной еще в 19-м веке математической модели заключаются в следующем. Рассматривается безвихревое движение идеальной, несжимаемой жидкости, находящейся под действием силы тяжести и ограниченной сверху свободной поверхностью, причем существенным моментом является линеаризация краевых условий на свободной поверхности. Краевую задачу о корабельных волнах можно формулировать как в трехмерной так и в двумерной постановках, причем в настоящей работе речь пойдет лишь о последней из них.

Отметим, что строгих результатов для нелинейной задачи, описывающей поступательное движение тела в жидкости с постоянной скоростью, совсем немного; в частности, рассматривалась лишь плоская задача. Так вопрос о разрешимости изучался в работах [12]–[15] для однородной жидкости при существенном дополнительном предположении о малой толщине тела. Кроме того, ряд нелинейных моделей для длинных внутренних волн, генерируемых телом, поступательно движущимся по свободной поверхности верхней жидкости, был предложен в статье [16], причем было показано, что полученные приближенные решения являются асимптотиками решения полной нелиней-

ной системы уравнений в двумерном случае. Мотивацией для моделей, рассмотренных в [16], послужили экспериментальные результаты работы [17].

Имеющаяся на настоящий момент литература, касающаяся различных трехмерных постановок задачи о поступательном движении тела, относится только к их линейным вариантам. Для них, в частности, получены явные выражения функций Грина. С использованием одной из таких функций математически строго исследован случай, когда тело полностью погружено в бесконечно-глубокую жидкость постоянной плотности (он изложен в книге [11]). Из обширного ряда работ о функциях Грина отметим статью [18], в которой получена функция для двуслойной жидкости (т.е. состоящей из двух слоев различной плотности) конечной глубины, а источник расположен в верхнем слое. Важным моментом является удобное для численных расчетов представление функции, что эффективно демонстрируют полученные результаты. Следует также упомянуть работу [19], в которой предложена эвристическая модель для описания равномерного поступательного движения тела, частично погруженного в двуслойную жидкость. Кроме того, в [19] приведены результаты численных расчетов, выполненных на основе этой модели.

В двумерном случае речь идет о поступательном движении цилиндра, длина которого бесконечна в направлении перпендикулярном направлению движения, тем самым, эта модель пригодна для описания поведения крыльев, используемых на быстроходных судах. Следует также отметить, что постановки задачи для полностью и частично погруженных цилиндров принципиально отличаются друг от друга даже в случае жидкости постоянной плотности. Для отыскания потенциала скоростей, описывающего так называемое безциркуляционное обтекание полностью погруженного цилиндра, достаточно дифференциального уравнения (обычно используется уравнение Лапласа) краевых условий на границах, отделяющих жидкость от погруженного в нее идеально твердого или деформируемого тела, а также от атмосферы (последняя граница называется свободной поверхностью), и условий на бесконечности. Если же цилиндр погружен в жидкость лишь частично, то перечисленные выше соотношения нужно дополнить условиями, которые ставятся в точках, где поперечное сечение цилиндра пересекает свободную поверхность жидкости. Такие дополнительные условия можно задавать несколькими различными способами (их подробное описание см. в книге [11], § 8), и в настоящее время отсутствуют критерии, позволяющие выбрать из имеющегося набора дополнительных условий наиболее адекватные, оставаясь в рамках модели однородной жидкости.

Что касается задачи о корабельных волнах в случае, когда жидкость является двуслойной, то интерес к ней обусловлен так называемым явлением «мертвой воды», при котором судно испытывает аномально большое сопротивление поступательному движению в отсутствие сколь-нибудь значительных волн на свободной поверхности. Впервые это явление было зафиксировано в научных результатах Норвежской полярной экспедиции на судне «Фрам» под руководством Ф. Нансена (см. работу [20]).

Первым теоретическим исследованием о «мертвой воде» была, по видимому, статья [21], появившаяся в 1934 году. Далее, ряд работ, посвященных описанию волн, вызванных движением тел в двуслойной жидкости, был опубликован около 55 лет назад (см., например, [22, 23]). В дальнейшем были получены частные результаты в этом направлении (см. обзоры [24] и [25]), но работы этого периода либо выполнены на эвристическом уровне, либо базируются на численных методах.

Строгие математические результаты, касающиеся двумерной задачи, были сначала получены для полностью погруженного цилиндра, не пересекающего поверхность раздела двух жидкостей; см. статью [26] и примыкающую к ней работу [27]. В последней методом граничных интегральных уравнений получено единственное решение краевой задачи для всех значений фигурирующих в ней параметров, кроме некоторого нигде не плотного множества исключительных значений. Основное внимание в [26] уделено асимптотике решений на бесконечности и выраженной в ее терминах формуле для волнового сопротивления. Рассмотренные численные примеры иллюстрируют явление «мертвой воды».

Наконец, в статье [28] было начато исследование задачи о цилиндре, пересекающем поверхность раздела двух жидкостей, завершением которого служит настоящая работа. В частности, один из двух видов дополнительных условий, необходимых для корректной постановки задачи, был найден в [28]; там же были получены и некоторые другие результаты, которые, тем не менее, приведены здесь, чтобы сделать наше изложение автономным. Однако, это не относится к вопросу о сопротивлении жидкости поступательному движению, который здесь не рассматривается.

## 1.2 Постановка задачи

В отсутствие тела верхняя жидкость плотности  $\rho_1$  заполняет слой конечной глубины  $h$ , а его поперечным сечением является  $L^{(1)} = \{x \in \mathbb{R}, 0 < y < h\}$ .

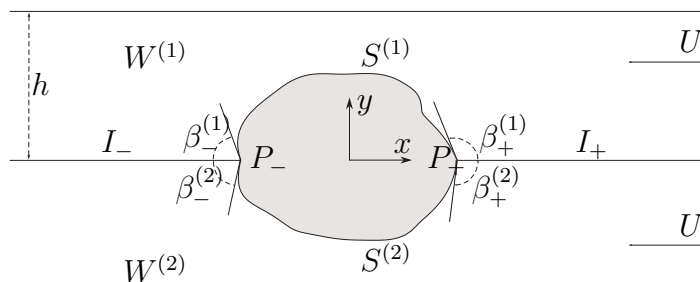


Рис. 1: Поперечные сечения: цилиндра (область между дугами  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$ ); областей  $W^{(1)}$  и  $W^{(2)}$ , заполненных жидкостями плотности  $\rho^{(1)}$  и  $\rho^{(2)}$  соответственно. Углы  $\beta_{\pm}^{(i)}$ , ( $i = 1, 2$ ), между дугами  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  и лучами  $I_{\pm}$ .

Поперечным сечением нижней жидкости, имеющей плотность  $\rho_2 > \rho_1$ , является полуплоскость  $L^{(2)} = \{x \in \mathbb{R}, y < 0\}$ . Говоря о верхней и нижней жидкости, мы имеем в виду, что сила тяжести с ускорением  $g$  действует в направлении противоположном оси ординат. Поверхность  $F = \{x \in \mathbb{R}, y = h\}$ , ограничивающая слой  $L^{(1)}$  сверху, является свободной, и при поступательном движении погруженного тела на ней возникают волны.

Пусть полностью погруженный (т.е. целиком находящийся ниже  $F$ ) цилиндр, поперечным сечением которого является ограниченная область  $B$ , пересекает интерфейс (поверхность, разделяющую жидкости различной плотности) так, что контур  $\partial B = \overline{S^{(1)} \cup S^{(2)}}$ , ( $S^{(i)} = \partial B \cap L^{(i)}$ ) не касается оси абсцисс (она является поперечным сечением интерфейса) в точках пересечения  $P_{\pm} = (\pm a, 0)$  (см. рис. 1). Отличный от 0 и  $\pi$  угол с вершиной в точке  $P_{\pm}$  между дугой  $S^{(i)}$  (замыкание которой принадлежит классу  $C^3$ ) и частью интерфейса  $I_{\pm} = \{\pm x > a, y = 0\}$  обозначим  $\beta_{\pm}^{(i)}$ . Ясно, что дуга  $S^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) разбивает область  $L^{(i)}$  на две части, одна из которых является бесконечной и будет обозначаться  $W^{(i)}$ .

Постоянную поступательную скорость, с которой цилиндр движется в направлении оси абсцисс обозначим  $U$  (она же — скорость горизонтального потока, набегающего из бесконечности в направлении, противоположном оси абсцисс). В рамках линейной теории поверхностных волн вызванное обтеканием цилиндра движение верхней (нижней) жидкости описывается потенциалом скоростей  $u^{(1)}$  ( $u^{(2)}$ ) в системе координат  $(x, y)$ , связанной с цилиндром. При этом краевая задача для функций  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$ , включающая условия сопря-

жения на интерфейсе, выглядит следующим образом (см., например, [6], § 10):

$$\nabla^2 u^{(i)} = 0 \quad \text{в} \quad W^{(i)}, \quad (1)$$

$$u_{xx}^{(1)} + \nu u_y^{(1)} = 0 \quad \text{на} \quad F, \quad (2)$$

$$u_y^{(1)} = u_y^{(2)} \quad \text{на} \quad I_+ \cup I_-, \quad (3)$$

$$\rho_1 [u_{xx}^{(1)} + \nu u_y^{(1)}] = \rho_2 [u_{xx}^{(2)} + \nu u_y^{(2)}] \quad \text{на} \quad I_+ \cup I_-, \quad (4)$$

$$\partial u^{(i)} / \partial n = f^{(i)} \quad \text{на} \quad S^{(i)}, \quad (5)$$

$$\sup_{W^{(i)} \setminus E} |\nabla u^{(i)}| < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |\nabla u^{(i)}| = 0, \quad (6)$$

$$\int_{W^{(i)} \cap E} |\nabla u^{(i)}|^2 dx dy < \infty, \quad (7)$$

Здесь  $\nu = gU^{-2}$ ,  $n$  — единичная нормаль к кривой  $S^{(1)} \cup S^{(2)}$ , направленная внутрь области  $W^{(1)} \cup W^{(2)}$ , а  $E$  — компактное множество, содержащее окрестности точек  $P_{\pm}$ . Мы рассматриваем классическое решение задачи  $u^{(i)} \in C^2(W^{(i)} \cup I_{\pm} \cup F) \cap C^1(W^{(i)} \cup S^{(i)})$ . Условие (7) означает, что кинетическая энергия конечна в окрестности точек  $P_{\pm}$ , хотя поле скоростей может иметь сингулярности в этих точках. Будем предполагать, что функция  $f^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) в правой части условия Неймана (5) принадлежит классу  $C^{0,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , на замыкании дуги  $S^{(i)}$ . В частности, в случае идеально твердого цилиндра  $f^{(i)} = Un_x$ , где  $n_x$  — горизонтальная компонента вектора нормали, т.е. вектор скорости на контуре  $S^{(i)}$  направлен по касательной к нему.

Критическим значением параметра  $\nu > 0$  называется величина

$$\nu_* = \frac{1 + \sigma}{h}, \quad \text{где} \quad \sigma = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \quad (8)$$

(иногда будем писать  $\nu_*(\sigma)$ , чтобы подчеркнуть зависимость от  $\sigma$ ). Далее предполагается, что  $\nu \neq \nu_*$ . Тогда уравнение  $Q(k) = 0$ , где

$$Q(k) = (1 + \sigma)k + (k\sigma - \nu) \operatorname{th} kh, \quad (9)$$

при  $\nu > \nu_*$  имеет единственный положительный корень  $\nu_0$ , а при  $\nu < \nu_*$  такой корень отсутствует. Имеющие размерность волнового числа параметры  $\nu$  и  $\nu_0$  характеризуют волны, которые образуются за цилиндром в различных режимах.

## 2 Функции Грина

Функция Грина  $G^{(i,j)}(x, y, \xi, \eta)$  — это двухкомпонентный потенциал, значение которого вычисляется в точке  $(x, y) \in L^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) в зависимости от источни-

ка, который представлен мерой Дирака, сосредоточенной в точке  $(\xi, \eta) \in L^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ); при  $j = i$  источник находится в том же слое, что и точка наблюдения, а при  $j \neq i$  эти точки лежат в разных слоях. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{x,y}^2 G^{(i,j)}(x, y, \xi, \eta) = -\delta(x - \xi, y - \eta), \quad (x, y) \in L^{(i)}, \quad (\xi, \eta) \in L^{(j)}. \quad (10)$$

Кроме того, для нее должны выполняться краевое условие (2), условия сопряжения (3) и (4), в которых  $I_{\pm}$  заменено на  $\{y = 0\}$ , и условие (6), где  $E$  — окрестность точки  $(\xi, \eta)$ .

## 2.1 Представление функций Грина

Следующее представление функций Грина получено в работе [26], где также исследованы их асимптотические свойства (см. § 2.3 ниже). Используя для точек комплексные обозначения  $z = x + iy$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ , имеем для  $i, j = 1, 2$ :

$$G^{(i,j)}(z, \zeta) = G_0^{(i,j)}(z, \zeta) - \delta_{i,1}\delta_{j,1}\nu(2Q_0)^{-1}(x - \xi) + C^{(j)}e^{\nu(y+\eta)} \sin \nu(x - \xi) + \\ + H(\nu - \nu_*)C_0^{(j)} E^{(i)}(\nu_0 y) E^{(j)}(\nu_0 \eta) \sin \nu_0(x - \xi). \quad (11)$$

Здесь  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера,  $H$  — функция Хевисайда,

$$E^{(1)}(t) = \left(1 + \frac{1 - \nu\nu_0^{-1}}{\sigma}\right) \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t, \quad E^{(2)}(t) = e^t, \quad (12)$$

а функции  $G_0^{(i,j)}$  заданы следующим образом:

$$G_0^{(1,2)}(z, \zeta) = \frac{1 + \sigma}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ \frac{\nu + k}{\nu - k} e^{k(y+\eta-h)} + e^{k(\eta-y+h)} \right] \frac{\cos k(x - \xi)}{Q(k) \operatorname{ch} kh} \right\} dk, \\ G_0^{(2,2)}(z, \zeta) = -(2\pi)^{-1} \left\{ \log |z - \zeta| + \log |z - \bar{\zeta}| + \right. \\ \left. + 2(1 + \sigma) \int_0^{\infty} \frac{k - \nu \operatorname{th} kh}{(k - \nu) Q(k)} e^{k(y+\eta)} \cos k(x - \xi) dk \right\}. \quad (13)$$

$$G_0^{(1,1)}(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \log |z - \zeta| - \sum_{i=1}^4 \int_0^{+\infty} K^{(i)}(k) e^{kY_i} \frac{\cos k(x - \xi)}{Q(k) \operatorname{ch} kh} dk \right\}, \quad (14)$$

$$G_0^{(2,1)}(z, \zeta) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{\nu + k}{\nu - k} e^{k(y+\eta-h)} + e^{k(y-\eta+h)} \right] \frac{\cos k(x - \xi) dk}{Q(k) \operatorname{ch} kh}.$$

Здесь

$$K^{(1)} = (\nu + k)e^{kh} \left[ \frac{\sigma}{\nu - k} - \frac{1}{2k} \right], \quad K^{(2)} = K^{(3)} = -\frac{\nu + k}{2k}, \quad K^{(4)} = \frac{(k - \nu)e^{kh}}{2k},$$

$$Y_{2i+j+1} = (-1)^i (y - h/2) + (-1)^j (\eta - h/2) - h, \quad i, j = 0, 1,$$

а остальные константы имеют вид:

$$Q_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Q(k)}{k} = 1 + \sigma - \nu h, \quad (15)$$

$$C^{(1)} = -\frac{\sigma}{1 + \sigma e^{2\nu h}}, \quad C_0^{(1)} = \frac{\sigma(\nu_0 - \nu \operatorname{th} \nu_0 h)}{(\nu - \nu_0) Q'(\nu_0)}, \quad (16)$$

$$C^{(2)} = (1 + \sigma^{-1})C^{(1)}, \quad C_0^{(2)} = (1 + \sigma^{-1})C_0^{(1)},$$

где

$$Q'(\nu_0) = \left. \frac{d}{dk} Q(k) \right|_{k=\nu_0} = \frac{\nu(1 + \sigma) - h(\nu + \nu_0)^2 e^{-2\nu_0 h}}{\nu - \sigma \nu_0}. \quad (17)$$

Учитывая формулы (9), отметим, что подынтегральные выражения в (13) и (14) имеют следующие (с точностью до постоянного множителя) особенности:

$$(k - \nu)^{-1}, \quad k^{-1}, \quad k^{-2} \quad \text{и} \quad (k - \nu_0)^{-1},$$

причем последняя присутствует только при  $\nu > \nu_*$ . Поэтому нужно разъяснить в каком смысле понимаются интегралы  $\int$ , фигурирующие в (13) и (14). Если особенность под интегралом имеет вид  $(k - \nu)^{-1}$  или  $(k - \nu_0)^{-1}$ , то интеграл следует понимать в смысле главного значения, а при наличии особенностей  $k^{-1}$  и  $k^{-2}$  применяются соответственно следующие способы регуляризации:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(k)}{k} dk = \int_0^{+\infty} \frac{f(k) - f(0)e^{-k}}{k} dk \quad (18)$$

и

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(k)}{k^2} dk = \int_0^{+\infty} \frac{f(k) - f(0) - k e^{-k} f'(0)}{k^2} dk. \quad (19)$$

Непосредственно проверяется, что используемые при регуляризации интегралов (13) и (14) выражения, не зависят от  $x$  и  $y$ .

## 2.2 Формулы взаимности

Для задачи, в которой направление потока совпадает с направлением оси абсцисс, введем функцию Грина  $'G^{(i,j)}(z, \zeta)$ . По первому аргументу она удовлетворяет уравнению (10) и условиям (2)–(4), а также условию

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\nabla_z 'G^{(i,j)}(z, \zeta)| = 0.$$



Кроме того, ее градиент ограничен всюду в жидкости, исключая окрестность точки  $\zeta$ . Ясно, что

$$'G^{(i,j)}(x, y, \xi, \eta) = G^{(i,j)}(-x, y, -\xi, \eta). \quad (20)$$

Поэтому из соотношений (13) и (14) вытекают следующие формулы взаимности:

$$\begin{aligned} G^{(1,1)}(x, y, \xi, \eta) &= G^{(1,1)}(x, \eta, \xi, y) = 'G^{(1,1)}(\xi, \eta, x, y), \\ G^{(2,2)}(x, y, \xi, \eta) &= G^{(2,2)}(x, \eta, \xi, y) = 'G^{(2,2)}(\xi, \eta, x, y), \\ G^{(1,2)}(x, y, \xi, \eta) &= \frac{\rho_2}{\rho_1} G^{(2,1)}(x, \eta, \xi, y) = \frac{\rho_2}{\rho_1} 'G^{(2,1)}(\xi, \eta, x, y), \\ G^{(2,1)}(x, y, \xi, \eta) &= \frac{\rho_2}{\rho_1} G^{(1,2)}(x, \eta, \xi, y) = \frac{\rho_1}{\rho_2} 'G^{(1,2)}(\xi, \eta, x, y), \end{aligned} \quad (21)$$

По определению функций  $'G^{(i,j)}(\xi, \eta, x, y)$  они удовлетворяют условиям (3) и (4) по аргументам  $\xi, \eta$ , когда  $\eta = 0$ . Поэтому для  $i = 1, 2$  равенства

$$\rho_2 G_\eta^{(i,1)}(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\eta=0} = \rho_1 G_\eta^{(i,2)}(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\eta=0}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &\left[ G_{\xi\xi}^{(i,1)}(x, y, \xi, \eta) + \nu G_\eta^{(i,1)}(x, y, \xi, \eta) \right]_{\eta=0} = \\ &= \left[ G_{\xi\xi}^{(i,2)}(x, y, \xi, \eta) + \nu G_\eta^{(i,2)}(x, y, \xi, \eta) \right]_{\eta=0} \end{aligned} \quad (23)$$

получаются в результате подстановки соотношений (21) в указанные условия.

### 2.3 Асимптотика функций Грина на бесконечности

В статье [26] установлено, что функции Грина имеют следующие асимптотики при  $|\zeta| \leq c < \infty$  и  $|z| \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} G^{(i,j)}(z, \zeta) &= Q^{(i,j)} \log |z| + \delta_{1,i} \delta_{1,j} \nu h(\pi Q_0)^{-1} + \\ &+ 2 H(-x) \left\{ \delta_{1,i} \delta_{1,j} \nu (2Q_0)^{-1} (\xi - x) + C^{(j)} e^{\nu(y+\eta)} \sin \nu(x - \xi) + \right. \\ &\left. + H(\nu - \nu_*) C_0^{(j)} E^{(i)}(\nu_0 y) E^{(j)}(\nu_0 \eta) \sin \nu_0(x - \xi) \right\} + \psi^{(i,j)}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$Q^{(i,j)} = -\pi^{-1} (1 + \sigma)^{2-i} \sigma^{2-j} Q_0^{i+j-4}, \quad i, j = 1, 2, \quad (25)$$

а константы  $Q_0$  и  $C^{(i)}, C_0^{(i)}$  заданы формулами (15) и (16) соответственно. Для остаточных членов имеют место оценки:

$$\psi^{(i,j)} = O(|z|^{-1}), \quad |\nabla \psi^{(i,j)}| = O(|z|^{-2}), \quad i, j = 1, 2.$$

## 2.4 Два режима волнообразования

Из асимптотической формулы (24) следует, что существуют два режима обтекания источника, находящегося в любом из двух слоев жидкости, а в работе [26] было установлено, что те же режимы имеют место и при обтекании полностью погруженных цилиндров, не пересекающих поверхность раздела жидкостей. А именно, при  $\nu > \nu_*$  (область  $D_2$  на рис. 2) на бесконечности позади источника (тела) существует суперпозиция волн с волновыми числами  $\nu$  и  $\nu_0$  (в формуле (24) они представлены вторым и третьим членами в фигурных скобках). При  $\nu < \nu_*$  (область  $D_1$  на рис. 2) из-за наличия множителя  $H(\nu - \nu_*)$  в третьем члене на бесконечности позади тела существуют только волны с волновым числом  $\nu$ . В § 4 аналогичный факт будет установлен и для полностью погруженного цилиндра, пересекающих поверхность раздела.

## 2.5 О производных функции $G^{(i,1)}(x, y, \xi, 0) - G^{(i,2)}(x, y, \xi, 0)$

Наряду с функциями  $G^{(i,j)}$  нам потребуются следующая их комбинация:

$$\Xi^{(i)}(x, y; \xi) = G^{(i,1)}(x, y, \xi, 0) - G^{(i,2)}(x, y, \xi, 0), \quad i = 1, 2, \quad (26)$$

заданная в  $L^{(i)}$ . Она определена парой источников, расположенных на верхней и нижней сторонах интерфейса. Исследуем асимптотическое поведение  $\partial_y \Xi^{(i)}(x, y; \xi)$  при  $(x - \xi)^2 + y^2 \rightarrow 0$ .

Согласно формуле (11) имеем для  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \partial_y [G_0^{(i,1)}(x, y, \xi, 0) - G_0^{(i,2)}(x, y, \xi, 0)] + (C^{(1)} - C^{(2)})\nu e^{\nu y} \sin \nu(x - \xi) + \\ + H(\nu - \nu_*)(C_0^{(1)} E^{(1)}(0) - C_0^{(2)} E^{(2)}(0)) \partial_y E^{(i)}(\nu_0 y) \sin \nu_0(x - \xi). \end{aligned} \quad (27)$$

Используя соотношения (13), (14) и равенство

$$\log |z| = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{ky} \cos kx - e^{-k}}{k} dk, \quad (28)$$

при  $\sigma \neq -1/2$  получаем

$$\begin{aligned} \partial_y [G_0^{(i,2)}(x, y, \xi, 0) - G_0^{(i,1)}(x, y, \xi, 0)] = \\ = \frac{\nu}{\pi} \left[ \frac{-\log |z - \xi|}{1 + 2\sigma} + \int_0^{\infty} D^{(i)}(k, y) \cos k(x - \xi) dk \right], \end{aligned} \quad (29)$$

где  $D^{(1)}(k, y) = D_1(k)e^{k(y-h)} + D_2(k)e^{-ky}$ ,  $D^{(2)}(k, y) = D_3(k)e^{ky}$ , а

$$D_1(k) = \frac{k + \nu}{2(k - \nu) Q(k) \operatorname{ch} kh}, \quad D_2(k) = \frac{e^{kh}}{2 Q(k) \operatorname{ch} kh} - \frac{1}{(1 + 2\sigma)k},$$

$$D_3(k) = \frac{k - \nu \operatorname{th} kh}{(k - \nu) Q(k)} - \frac{1}{(1 + 2\sigma)k}.$$

Поскольку  $D_i(k) = O(k^{-2})$  при  $k \rightarrow +\infty$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то нетрудно показать, что интеграл в (29) непрерывен, когда  $(x, y) = (\xi, 0)$ . Таким образом,

$$\partial_y \Xi^{(i)}(x, y; \xi) = \frac{-\nu}{\pi(1 + 2\sigma)} \log |z - \xi| + \varphi_y(x - \xi, y), \quad (30)$$

где  $\varphi_y(x, y)$  непрерывна при  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(-1)^i y \leq 0$ . Аналогично доказывается, что

$$\partial_x \Xi^{(i)}(x, y; \xi) = -\partial_\xi \Xi^{(i)}(x, y; \xi) = \frac{-\nu}{\pi(1 + 2\sigma)} \operatorname{arctg} \frac{x - \xi}{y} + \varphi_x(x - \xi, y), \quad (31)$$

где  $\varphi_x(x, y)$  непрерывна при  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(-1)^i y \leq 0$ . Отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \xi + 0} \partial_x \Xi^{(i)}(x, 0; \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi - 0} \partial_x \Xi^{(i)}(x, 0; \xi) = \frac{\nu}{1 + 2\sigma}. \quad (32)$$

Поскольку  $D^{(1)}(k, 0) - D^{(2)}(k, 0) = 0$ , то справедливо равенство

$$\partial_y [G_0^{(1,1)}(x, 0, \xi, 0) - G_0^{(1,2)}(x, 0, \xi, 0)] = \partial_y [G_0^{(2,1)}(x, 0, \xi, 0) - G_0^{(2,2)}(x, 0, \xi, 0)].$$

Так как из (12) следует, что  $\partial_y E^{(1)}(\nu_0 y)|_{y=0} = \partial_y E^{(2)}(\nu_0 y)|_{y=0} = \nu_0$ , то, используя соотношение (27), получаем, что

$$\partial_y \Xi^{(1)}(x, y; \xi) = \partial_y \Xi^{(2)}(x, y; \xi) \quad \text{при } y = 0, x, \xi \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Аналогично рассуждая, находим, что равенство

$$\rho_1 [\partial_x^2 \Xi^{(1)}(x, y; \xi) + \nu \partial_y \Xi^{(1)}(x, y; \xi)] = \rho_2 [\partial_x^2 \Xi^{(2)}(x, y; \xi) + \nu \partial_y \Xi^{(2)}(x, y; \xi)] \quad (34)$$

имеет место при  $y = 0$  и  $x, \xi \in \mathbb{R}$ .

## 2.6 Об аналитической зависимости от параметров функций Грина и их комбинаций

Из формул, приведенных в §§ 2.1 и 2.5, следует, что функции  $G^{(i,j)}$ , их производные по  $x$  и  $y$ , а также их комбинация  $\Xi^{(i)}(x, y; \xi)$  являются вещественными

аналитическими функциями параметров  $\nu$  и  $\sigma$  в двух областях, к описанию которых мы переходим.

Аналитичность внеинтегральных слагаемых в первой строке формулы (11) нарушается тогда же, когда это имеет место для интегралов в формулах (13) и (14). Аналитичность последних нарушается в случае их расходимости для какой-либо пары  $(\nu, \sigma)$ , а также вследствие изменения структуры сингулярностей подынтегрального выражения, что связано с изменением способа регуляризации интеграла. Это происходит, когда  $\nu_0$  — корень дисперсионного соотношения (9) — совпадает с нижней границей интервала интегрирования или с  $\nu$ . При  $\nu_0 = 0$  аналитичность нарушается, так как вместо формулы (18) для регуляризации интегралов нужно использовать (19), а во втором случае в подынтегральных выражениях появляется полюс второго порядка во внутренней точке интервала интегрирования.

Аналитичность члена во второй строке формулы (11) нарушается, когда  $\nu_0$  является корнем кратности два для дисперсионного соотношения, т.е. выражение (17) обращается в ноль. Соответствующая линия  $\ell_1$ , ограничивающая снизу область аналитичности  $D_1^*$ , касается линий  $\ell_2$  и  $\ell_3$  (см. рис. 2). Последние отвечают указанным выше равенствам  $\nu_0 = \nu$  и  $\nu_0 = 0$  и задаются уравнениями  $\sigma = -e^{-2\nu h}$  и  $\nu h = 1 + \sigma$  соответственно, что вытекает из уравнения (9). Между  $\ell_2$  и  $\ell_3$  заключена область аналитичности  $D_2^*$ , которую от  $D_1^*$  отделяет бесконечная часть прямой линии  $\ell_3$ . Таким образом, каждая из областей  $D_1^*$ ,  $D_2^*$ , где  $G^{(i,j)}$  ( $i, j = 1, 2$ ) являются вещественными аналитическими функциями  $(\nu, \sigma)$ , содержит подобласть, в которой  $\sigma$  принимает отрицательные значения. Это свойство упрощает некоторые доказательства, несмотря на нефизичность таких значений  $\sigma$ .

Используя комплексные  $\nu$  и  $\sigma$  в степенных разложениях рассматриваемых вещественных аналитических функций, получаем голоморфные продолжения этих функций, которые в  $\mathbb{C}^2$  принадлежат некоторым окрестностям множеств  $D_1^*$  и  $D_2^*$ . Эти окрестности, которые мы обозначим  $D_1$  и  $D_2$  соответственно, будут использованы при исследовании разрешимости.

### 3 Асимптотики функций $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ около точек $P_+$ и $P_-$

Известно, что решения эллиптических краевых задач в плоских областях могут иметь особенности в угловых точках границы (см., например, [29]). Как показано на рис. 1, точки  $P_+$  и  $P_-$  являются угловыми для областей  $W^{(1)}$  и  $W^{(2)}$  даже в случае, когда граница погруженного тела вблизи этих точек

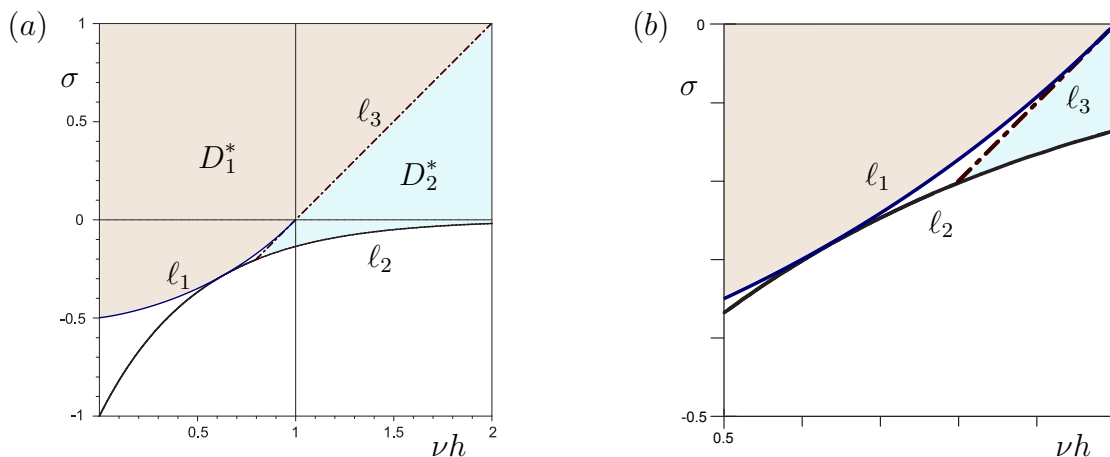


Рис. 2: (а) Части бесконечных областей  $D_1^*$ ,  $D_2^*$ , в которых  $G^{(i,j)}$  ( $i, j = 1, 2$ ) и связанные с ними выражения являются вещественными аналитическими функциями безразмерных параметров  $\nu h$  и  $\sigma$ . В области  $D_1^* \cap \{\sigma > 0\}$  режим волнообразования является закритическим, а в  $D_2^* \cap \{\sigma > 0\}$  докритическим. (б) Часть рисунка (а) в увеличенном масштабе.

гладкая. Изучим поведение потенциалов  $u^{(i)}$  вблизи этих точек. Для этого рассмотрим модельную задачу в областях, изображенных на рис. 3. Здесь  $P$  — точка пресечения тела с поверхностью раздела сред  $I_0$ ,  $W_0^{(1)}$  и  $W_0^{(2)}$  — неограниченные сектора,  $S_0^{(1)}$  и  $S_0^{(2)}$  — лучи, исходящие из точки  $P$  по касательным к контуру тела в этой точке. Пусть  $(r, \theta)$  — полярные координаты с полюсом в точке  $P$ , причем  $W_0^{(1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, -\beta^{(1)} < \theta < 0\}$ ,  $W_0^{(2)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < \theta < \beta^{(2)}\}$  и  $I_0 = \{(r, \theta) : r > 0, \theta = 0\}$ . Сохраняя обозначения для неизвестных функций, рассмотрим следующую задачу:

$$\nabla^2 u^{(i)} = 0 \quad \text{в} \quad W_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \tag{35}$$

$$u_y^{(1)} = u_y^{(2)} \quad \text{на} \quad I_0, \tag{36}$$

$$\rho_1 [u_{xx}^{(1)} + \nu u_y^{(1)}] = \rho_2 [u_{xx}^{(2)} + \nu u_y^{(2)}] \quad \text{на} \quad I_0, \tag{37}$$

$$\partial_n u^{(i)} = f^{(i)} \quad \text{на} \quad S_0^{(i)}, \tag{38}$$

$$\int_{W_0^{(i)} \cap E} |\nabla u^{(i)}|^2 dx dy < \infty, \tag{39}$$

где  $E$  — произвольное компактное множество, содержащее точку  $P$ .

Чтобы воспользоваться известными результатами об асимптотическом поведении решений эллиптических краевых задач в угловых точках, удобно перейти к функциям  $v^{(i)}$ , гармонически сопряженным к  $u^{(i)}$  в  $W_0^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ), для которых условие (39) сохраняется. Выпишем остальные условия для  $v^{(i)}$ , применяя уравнения Коши–Римана. Так, например, из (36) следует, что раз-

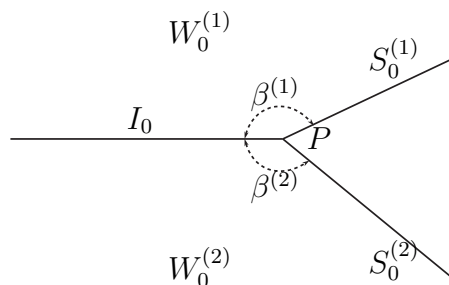


Рис. 3: Геометрия модельной задачи

ность  $v^{(1)} - v^{(2)}$  равна константе на  $I_0$ . Таким образом приходим к задаче:

$$\nabla^2 v^{(i)} = 0 \quad \text{в } W_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (40)$$

$$v^{(1)} - v^{(2)} = c_1 \quad \text{на } I_0, \quad (41)$$

$$\rho_1 [v_y^{(1)} - \nu v^{(1)}] - \rho_2 [v_y^{(2)} - \nu v^{(2)}] = c_2 \quad \text{на } I_0, \quad (42)$$

$$v^{(i)} = F^{(i)} + c_3^{(i)} \quad \text{на } S_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (43)$$

$$\int_{W_0^{(i)} \cap E} |\nabla v^{(i)}|^2 dx dy < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (44)$$

в которой операторы граничных условий имеют порядок один (а не два, как в исходной). Здесь  $F^{(i)}(r) = (-1)^i \int_0^r f^{(i)}(\rho) d\rho$ , а  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3^{(i)}$  — вещественные константы. Поскольку функция  $v^{(i)}$  определена с точностью до аддитивной постоянной, положим  $c_3^{(i)} = 0$ ,  $i = 1, 2$ , откуда при помощи несложных выкладок следует, что  $c_1 = 0$ . Таким образом, соотношения (35)–(39) принимают вид:

$$\nabla^2 v^{(i)} = 0 \quad \text{в } W_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (45)$$

$$v^{(1)} - v^{(2)} = 0 \quad \text{на } I_0, \quad (46)$$

$$\rho_1 [v_y^{(1)} - \nu v^{(1)}] - \rho_2 [v_y^{(2)} - \nu v^{(2)}] = d \quad \text{на } I_0, \quad (47)$$

$$v^{(i)} = F^{(i)} \quad \text{на } S_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (48)$$

$$\int_{W_0^{(i)} \cap E} |\nabla v^{(i)}|^2 dx dy < \infty, \quad i = 1, 2. \quad (49)$$

Для получения асимптотики решения этой задачи при  $r \rightarrow 0$  адаптируем метод, изложенный в §§ 5.4 и 5.6 книги [29]. Его применимость при наличии поверхности раздела, на которой ставятся условия сопряжения, вытекает из результатов работы [30]. В ней показано, что переход к задачам с интерфейсом не требует каких-либо дополнительных соображений.

Пусть оператор  $\mathcal{L}(\lambda)$  возникает в результате применения преобразования Меллина

$$\tilde{w}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty r^{\lambda-1} w(r) dr$$

к оператору краевой задачи, включающему соотношения (45), (46) и (48), а также граничный оператор (см. условие (47))

$$(v^{(1)}, v^{(2)}) \mapsto [\rho_1 v_y^{(1)} - \rho_2 v_y^{(2)}]_{I_0}.$$

Известно, что главная часть асимптотики решения однородной задачи (45)–(49) имеет вид

$$r^\lambda \sum_{\ell=0}^p \frac{1}{\ell!} (\log r)^\ell \varphi_{p-\ell}^{(i)}(\theta), \quad p \leq \kappa. \quad (50)$$

Здесь  $\lambda$  — наименьшее положительное собственное значение оператора  $\mathcal{L}$ ,  $\kappa \leq 2$  для рассматриваемой задачи, а  $\{\varphi_0^{(i)}, \dots, \varphi_{\kappa-1}^{(i)}\}$  — собственные и присоединенные векторы оператора  $\mathcal{L}$ , соответствующие  $\lambda$ . Для их отыскания служат уравнения

$$\sum_{q=0}^m \frac{1}{q!} \partial_\lambda^q \mathcal{L}(\lambda) \varphi_{m-q}^{(i)} = 0, \quad m = 0, \dots, \kappa. \quad (51)$$

Так как  $f^{(i)} \in C^{0,\alpha}(\overline{S_0^{(i)}})$ , то

$$F^{(i)}(r) = (-1)^i f^{(i)}(0) r + O(r^{1+\alpha}) \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому при  $\lambda \neq 1$  собственное решение (50) и частное решение неоднородной задачи (оно вносит вклад в линейный член асимптотики) имеют разный порядок. Тогда, главная часть асимптотики  $v^{(i)}$  либо линейна (при  $\lambda > 1$ ), либо имеет вид (50) (при  $\lambda < 1$ ). Случай  $\lambda = 1$  требует специального рассмотрения, которое приведено ниже.

Рассмотрим систему (51) для  $\kappa = 0, 1, 2$ . При  $\kappa = 0$  приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 \varphi_0^{(i)}}{d\theta^2} + \lambda^2 \varphi_0^{(i)} = 0 \quad \text{при } 0 < (-1)^i \theta < \beta^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (52)$$

$$\varphi_0^{(1)}(0) - \varphi_0^{(2)}(0) = 0, \quad \rho_1 \frac{d\varphi_0^{(1)}}{d\theta} \Big|_{\theta=0} - \rho_2 \frac{d\varphi_0^{(2)}}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad (53)$$

$$\varphi_0^{(i)}((-1)^i \beta^{(i)}) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (54)$$

Решение уравнения (52) имеет вид

$$\varphi_0^{(i)}(\theta) = C_1^{(i)} \sin \lambda \theta + C_2^{(i)} \cos \lambda \theta, \quad i = 1, 2,$$

а вещественные коэффициенты  $C_j^{(i)}$  ( $i, j = 1, 2$ ) должны быть найдены из условий (53) и (54), которые приводят к линейной системе  $A\mathbf{X}_0 = 0$  для

$$\mathbf{X}_0 = (C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, C_1^{(2)}, C_2^{(2)})^T$$

(здесь и далее  $^T$  обозначает операцию транспонирования), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \rho_1 & 0 & -\rho_2 & 0 \\ -\sin \lambda \beta^{(1)} & \cos \lambda \beta^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \lambda \beta^{(2)} & \cos \lambda \beta^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Определитель матрицы  $A$  равен

$$\alpha(\lambda) = \rho_1 \cos \lambda \beta^{(1)} \sin \lambda \beta^{(2)} + \rho_2 \sin \lambda \beta^{(1)} \cos \lambda \beta^{(2)}. \quad (56)$$

Приравнивая его нулю, приходим к уравнению для отыскания  $\lambda$ :

$$\rho_2 \operatorname{ctg} \lambda \beta^{(2)} = -\rho_1 \operatorname{ctg} \lambda \beta^{(1)}. \quad (57)$$

Нас интересует наименьший положительный корень, находящийся между

$$\min\{\pi/2\beta^{(1)}, \pi/2\beta^{(2)}\} \quad \text{и} \quad \max\{\pi/2\beta^{(1)}, \pi/2\beta^{(2)}\}.$$

Отсюда вытекает, что  $\lambda > 1/2$ , а другие положительные корни уравнения (57) больше  $\min\{\pi/\beta^{(1)}, \pi/\beta^{(2)}\} > 1$ .

Из уравнения (57) следует, что при фиксированном  $\beta^{(1)}$  ( $\beta^{(2)}$ ) показатель  $\lambda$  является убывающей функцией  $\beta^{(2)}$  ( $\beta^{(1)}$  соответственно). Тем самым, приходим к следующему утверждению.

*Пусть пара  $(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$  такова, что выполняется неравенство*

$$\rho_2 \operatorname{ctg} \beta^{(2)} \leq -\rho_1 \operatorname{ctg} \beta^{(1)}.$$

*Тогда  $\lambda \in (1/2, 1)$  в главном члене (50) асимптотического представления для  $v^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ .*

Рассмотрим кривую  $\lambda(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}) = 1$ , определенную равенством (57) (см. рис. 4). Для точек  $(\beta^{(1)}, \beta^{(2)})$ , расположенных над кривой, выполняется неравенство  $\lambda < 1$ . Штриховая линия на рис. 4 соответствует случаю контура,



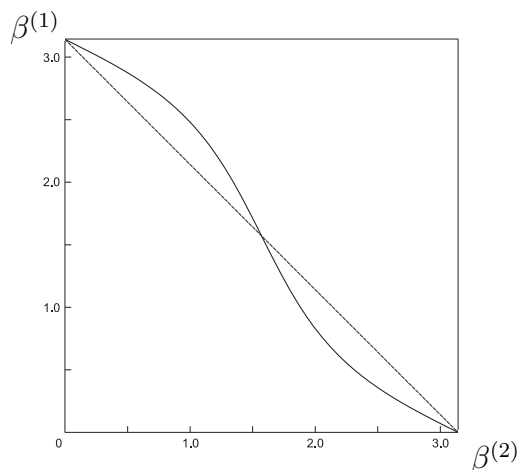


Рис. 4: Зависимость  $\lambda(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}) = 1$  при  $\sigma = 1.0$ .

гладкого в точке  $P$ , т.е.  $\beta^{(1)} + \beta^{(2)} = \pi$ . Для такого контура поле скоростей может быть сингулярным в  $P$  только когда  $\beta^{(2)} > \pi/2$ . В частном случае, когда  $\beta^{(1)} = \beta^{(2)} = \beta$ , значение  $\lambda = \pi/(2\beta)$  совпадает с показателем степени в главном члене асимптотики для тела, частично погруженного в однородную жидкость (см. [31]).

При  $\kappa = 1$  функция  $\varphi_1^{(i)}$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 \varphi_1^{(i)}}{d\theta^2} + \lambda^2 \varphi_1^{(i)} + 2\lambda \varphi_0^{(i)} = 0 \quad \text{при } 0 < (-1)^i \theta < \beta^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (58)$$

и условиям (53) и (54). При этом

$$\varphi_0^{(i)}(\theta) = C \frac{\sin \lambda(\beta^{(i)} + (-1)^{i+1}\theta)}{\sin \lambda\beta^{(i)}}, \quad C = \text{const}, \quad i = 1, 2,$$

поскольку

$$\mathbf{X}_0 = \left( \frac{\cos \lambda\beta^{(1)}}{\sin \lambda\beta^{(1)}}, 1, -\frac{\cos \lambda\beta^{(2)}}{\sin \lambda\beta^{(2)}}, 1 \right)^T, \quad (59)$$

является решением однородной системы  $A\mathbf{X}_0 = 0$ . Тем самым,

$$\varphi_1^{(i)}(\theta) = B_1^{(i)} \sin \lambda\theta + B_2^{(i)} \cos \lambda\theta + (-1)^{i+1} C \theta \frac{\cos \lambda(\beta^{(i)} + (-1)^{i+1}\theta)}{\sin \lambda\beta^{(i)}}, \quad (60)$$

где  $B_j^{(i)}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — вещественные коэффициенты, которые определяются из условий (53) и (54). Таким образом, приходим к линейной системе

$$A\mathbf{X}_1 = C\mathbf{R}, \quad (61)$$

где

$$\mathbf{X}_1 = (B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, B_1^{(2)}, B_2^{(2)})^\top \quad \text{и} \quad \mathbf{R} = \left(0, 0, \frac{\beta^{(1)}}{\sin \lambda \beta^{(1)}}, \frac{\beta^{(2)}}{\sin \lambda \beta^{(2)}}\right)^\top.$$

Эта система разрешима только тогда, когда вектор  $\mathbf{R}$  ортогонален ядру матричного оператора  $A^\top$ , которое имеет вид  $\text{const} \cdot \mathbf{N}$ , где

$$\mathbf{N} = (-\rho_1 \cos \lambda \beta^{(1)} \sin \lambda \beta^{(2)}, \sin \lambda \beta^{(1)} \sin \lambda \beta^{(2)}, \rho_1 \sin \lambda \beta^{(2)}, \rho_2 \sin \lambda \beta^{(1)})^\top.$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие разрешимости:

$$\rho_1 \beta^{(1)} \frac{\sin \lambda \beta^{(2)}}{\sin \lambda \beta^{(1)}} + \rho_2 \beta^{(2)} \frac{\sin \lambda \beta^{(1)}}{\sin \lambda \beta^{(2)}} = 0.$$

При этом левая часть строго положительна, когда  $\lambda \leq 1$  и  $\beta^{(i)} \in (0, \pi)$ , а значит у системы (61) нетривиальное решение есть только при  $C = 0$ . При этом  $\kappa = 0$ , и, тем самым, доказано следующее утверждение.

*Если наименьший положительный корень  $\lambda$  уравнения (57) меньше единицы, то главный член асимптотики  $v^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) имеет вид (50) с  $p = 0$ .*

Второй член асимптотики функции  $v^{(i)}$  имеет вид

$$r(a_1^{(i)} \sin \theta + a_2^{(i)} \cos \theta),$$

и является частным решением неоднородной задачи (45)–(49). Для отыскания коэффициентов  $a_1^{(i)}$  и  $a_2^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) подставим это выражение в условия (46)–(48) и получим линейную систему

$$A_1 \mathbf{Y} = (0, -d, -f^{(1)}(0), f^{(2)}(0))^\top \quad \text{для} \quad \mathbf{Y} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)})^\top.$$

У матрицы  $A_1$  вида (55) с  $\lambda = 1$  определитель отличен от нуля. Поэтому эта система имеет единственное решение

$$\begin{aligned} a_1^{(i)} &= [\alpha(1)]^{-1} \left[ \rho_{3-i} (f^{(2)}(0) \cos \beta^{(1)} + f^{(1)}(0) \cos \beta^{(2)}) + (-1)^i d \cos \beta^{(i)} \sin \beta^{(3-i)} \right], \\ a_2^{(i)} &= [\alpha(1)]^{-1} \left[ \rho_2 f^{(2)}(0) \sin \beta^{(1)} - \rho_1 f^{(1)}(0) \sin \beta^{(2)} - d \sin \beta^{(1)} \sin \beta^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (62)$$

где  $\alpha(1)$  выражается формулой (56) с  $\lambda = 1$ .

Когда  $\lambda > 1$ , линейный член является главным в разложении  $v^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ . Таким образом, остается рассмотреть случай, когда наименьший положительный корень уравнения (57) равен 1. Как и выше для отыскания  $\varphi_0$  служат

соотношения (52)–(54). Однако задача, определяющая  $\varphi_1$ , включает уравнение (58), первое условие (53) и соотношения

$$\rho_1 \frac{d\varphi_1^{(1)}}{d\theta} \Big|_{\theta=0} - \rho_2 \frac{d\varphi_1^{(2)}}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = -d, \quad \varphi_1^{(i)}((-1)^i \beta^{(i)}) = (-1)^i f^{(i)}(0), \quad i = 1, 2.$$

При этом решение уравнения (58) выражается формулой (60) с  $\lambda = 1$ , и как и выше возникает система  $A\mathbf{X}_1 = \mathbf{R}'$ , в которой

$$\mathbf{R}' = C\mathbf{R} + (0, -d, -f^{(1)}(0), f^{(2)}(0))^T.$$

Она разрешима, когда  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{R}' = 0$ , откуда следует, что

$$C = p^{-1}(\sin \beta^{(1)})^2 (\sin \beta^{(2)})^2 [\rho_1 f^{(1)}(0)/\sin \beta^{(1)} - \rho_2 f^{(2)}(0)/\sin \beta^{(2)} + d], \quad (63)$$

где  $p = \rho_1 \beta^{(1)} (\sin \beta^{(2)})^2 + \rho_2 \beta^{(2)} (\sin \beta^{(1)})^2$ . Поэтому система  $A\mathbf{X}_1 = \mathbf{R}'$  имеет решение  $\mathbf{X}_1 = (d^{(1)}, 0, d^{(2)}, 0)^T$ , где

$$d^{(i)} = p^{-1} \left\{ \rho_{3-i} [f^{(2)}(0)\beta^{(1)} \sin \beta^{(2)} + f^{(1)}(0)\beta^{(2)} \sin \beta^{(1)}] + (-1)^i d \beta^{(i)} [\sin \beta^{(3-i)}]^2 \right\}, \quad (64)$$

а общее решение системы  $A\mathbf{X} = \mathbf{R}'$  имеет вид  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + c\mathbf{X}_0$ , где  $\mathbf{X}_0$  выражается формулой (59) с  $\lambda = 1$ , а  $c$  — произвольная постоянная.

Остается заметить, что уравнение (51) не имеет решения, когда  $m = 2$ , поскольку при этом функция  $\varphi_1$  должна удовлетворять однородному условию (54). Действительно, в этом случае слагаемые порядка  $r \log r$  отсутствуют в асимптотике правой части (43), а выше было показано, что система (61) не имеет нетривиальных решений, если  $\lambda \leq 1$ . Таким образом, приходим к следующему утверждению.

*Если наименьший положительный корень  $\lambda$  уравнения (57) равен единице, то главный член асимптотики функции  $v^{(i)}$  при  $r \rightarrow 0$  имеет вид  $r \varphi_1^{(i)}(\theta) + r \log r \varphi_0^{(i)}(\theta)$ .*

В модельной задаче, для которой сформулированы приведенные результаты, в качестве точки  $P$  была выбрана точка  $P_-$ . Ясно, что такие же асимптотики для  $v^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , имеют место и около точки  $P_+$ . Более того, асимптотические представления, полученные для функций тока  $v^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ), нетрудно переформулировать в терминах потенциалов скоростей  $u^{(i)}$ . Таким образом, приходим к следующим результатам, в которых всюду подразумеваются индексы “+” и “–”, причем  $r$  измеряется от  $P = P_-$  или  $P_+$ , а угол  $\theta$  отсчитывается от  $I_-$  против часовой стрелки около  $P_-$ , а около  $P_+$  он отсчитывается от  $I_+$  по часовой стрелке.

Если наименьший положительный корень  $\lambda$  уравнения (57) меньше единицы, то для функции  $u^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , имеет место следующее асимптотическое представление вблизи точки  $P$ :

$$u^{(i)}(x, y) = u^{(i)}(P) + (-1)^i c r^\lambda \frac{\cos \lambda(\theta + (-1)^{i+1} \beta^{(i)})}{\sin \lambda \beta^{(i)}} + r(a_1^{(i)} \cos \theta - a_2^{(i)} \sin \theta) + \psi^{(i)}(x, y). \quad (65)$$

Здесь  $c$  — некоторая постоянная, а коэффициенты  $a_1^{(i)}$  и  $a_2^{(i)}$  задаются формулой (62). Кроме того, при некотором  $\delta > 0$  оценки  $\psi^{(i)} = O(r^{1+\delta})$ ,  $|\nabla \psi^{(i)}| = O(r^\delta)$  справедливы, когда  $r \rightarrow 0$ .

Если наименьший положительный корень  $\lambda$  уравнения (57) больше единицы, то для функции  $u^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , имеет место следующее асимптотическое представление вблизи точки  $P$ :

$$u^{(i)}(x, y) = u^{(i)}(P) + r(a_1^{(i)} \cos \theta - a_2^{(i)} \sin \theta) + \psi^{(i)}(x, y). \quad (66)$$

Здесь коэффициенты  $a_1^{(i)}$  и  $a_2^{(i)}$  определяются формулами (62), а для  $\psi^{(i)}$  имеют место оценки такие же как выше.

Если наименьший положительный корень  $\lambda$  уравнения (57) равен единице, то для функции  $u^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , имеет место следующее асимптотическое представление вблизи точки  $P$ :

$$u^{(i)}(x, y) = u^{(i)}(P) + (-1)^{i+1} \frac{Cr}{\sin \beta^{(i)}} \left[ \log r \cos(\theta + (-1)^{i+1} \beta^{(i)}) - \theta \sin(\theta + (-1)^{i+1} \beta^{(i)}) \right] + (-1)^i c r \frac{\cos(\theta + (-1)^{i+1} \beta^{(i)})}{\sin \beta^{(i)}} + r d^{(i)} \cos \theta + \psi^{(i)}(x, y). \quad (67)$$

Здесь коэффициенты  $C$  и  $d^{(i)}$  определяются формулами (63) и (64) соответственно,  $c$  — некоторая постоянная, а для  $\psi^{(i)}$  имеют место оценки такие же как выше.

Из приведенных асимптотик следует, что для функции

$$\Delta(x) = \rho_1 u^{(1)}(x, 0) - \rho_2 u^{(2)}(x, 0)$$

определены следующие величины:

$$\Delta_x(a) := \lim_{x \rightarrow a+0} \Delta_x(x), \quad \Delta_x(-a) := \lim_{x \rightarrow -a-0} \Delta_x(x). \quad (68)$$

Нетрудно видеть, что эти значения фигурируют в коэффициентах асимптотик (62)–(64) наряду с  $f^{(1)}(P_{\pm})$  и  $f^{(2)}(P_{\pm})$ . Кроме того,  $\Delta_x(\pm a)$  совпадает с константой в правой части условия (47) на  $I_{\pm}$ . Ниже будет показано, что они же возникают в интегро-алгебраическом представлении потенциалов и в коэффициентах асимптотик потенциалов на бесконечности.

#### 4 Интегро-алгебраическое представление потенциалов; их асимптотики на бесконечности

Общая идея рассуждений в этом параграфе аналогична использованной в § 2 статьи [33], но реализация технически сложнее из-за наличия интерфейса, где нужно удовлетворить двум условиям сопряжения.

Для  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  введем бесконечно-дифференцируемую срезку

$$\chi_{t_1, t_2}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_1 - \varepsilon \leq t \leq t_2 + \varepsilon, \\ 0 & \text{при } t < t_1 - 2\varepsilon \text{ и } t > t_2 + 2\varepsilon, \end{cases} \quad (69)$$

где  $\varepsilon > 0$ . Обозначив

$$\pm x_{\pm} = \max\{\pm x : (x, y) \in \partial B\} \quad \text{и} \quad \pm y_{\pm} = \max\{\pm y : (x, y) \in \partial B\},$$

рассмотрим функции

$$U_0^{(i)}(x, y) = [1 - \chi_{x_-, x_+}(x) \chi_{y_-, y_+}(y)] u^{(i)}(x, y), \quad i = 1, 2, \quad (70)$$

определенные всюду в  $\overline{L^{(i)}}$  и совпадающие с  $u^{(i)}$  в  $W^{(i)} \setminus \Pi$ , где

$$\Pi = \{(x, y) : \pm x < \pm x_{\pm} + 2\varepsilon, \pm y < \pm y_{\pm} + 2\varepsilon\}.$$

Поскольку при  $\pm y < \pm y_{\pm} + \varepsilon$  множитель перед  $u$  в правой части (70) не зависит от  $y$ , а  $U_0^{(1)}$  и  $U_0^{(2)}$  обращаются в ноль, когда  $\pm x < \pm x_{\pm} + \varepsilon$  и  $\pm y < \pm y_{\pm} + \varepsilon$ , то

$$\partial_y U_0^{(1)} = \partial_y U_0^{(2)} \quad \text{при } y = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (71)$$

Кроме того, эти функции удовлетворяют условию (4) при  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\Gamma_- \cup \Gamma_+\}$  и  $y = 0$ , где  $\Gamma_{\pm} = (p_{\pm}, q_{\pm})$ , а  $p_+ = x_+ + \varepsilon$ ,  $q_+ = x_+ + 2\varepsilon$ ,  $p_- = x_- - 2\varepsilon$ ,  $q_- = x_- - \varepsilon$ . Модифицируем  $U_0^{(1)}$  и  $U_0^{(2)}$ , чтобы наряду с (71) удовлетворить и второму условию на интерфейсе.

Для определенности рассмотрим  $\Gamma_+ = (p_+, q_+)$ . Выберем  $\gamma_i = (p_i, q_i) \subset \Gamma$ ,  $i = 1, 2$ , таким образом, что для некоторого малого  $\delta > 0$  имеем  $p_i > p + \delta$ ,

$q_i < q - \delta$  (здесь и далее будем опускать индекс ‘+’ в обозначениях  $p_+$ ,  $q_+$  и  $\Gamma_+$ ), и  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ . Пусть

$$g_i^+(x, y) = y \chi_{y_-, y_+}(y) \theta_{p_i, q_i}(x), \quad \theta_{t_1, t_2}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_1 + \delta \leq t \leq t_2 - \delta, \\ 0 & \text{при } t \leq t_1 \text{ и } t \geq t_2, \end{cases}$$

при этом  $g_1^+(x, y) = g_2^+(x, y) = 0$  при  $y = 0$  и  $x \in \mathbb{R}$ . Кроме того,

$$\text{supp } g_i^+ \subset \gamma_i \times (y_- - 2\varepsilon, y_+ + 2\varepsilon) \quad \text{и} \quad \partial_y g_i^+(x, y)|_{y=0} = \theta_{p_i, q_i}(x) \geq 0.$$

Тогда определим

$$U_+^{(i)}(x, y) = U_0^{(i)}(x, y) + c_1 g_1^+(x, y) + c_2 g_2^+(x, y), \quad i = 1, 2,$$

и выберем константы  $c_1$  и  $c_2$  так, что

$$\int_{\Gamma} f(x) dx = \int_{\Gamma} x f(x) dx = 0, \tag{72}$$

где  $f(x) = \chi_{p, q}(x) \left\{ \rho_1 [\partial_x^2 U_+^{(1)} + \nu \partial_y U_+^{(1)}]_{y=0} - \rho_2 [\partial_x^2 U_+^{(2)} + \nu \partial_y U_+^{(2)}]_{y=0} \right\}$ . Из условий (72) получим систему

$$\begin{aligned} c_1 \int_{\gamma_1} \theta_{p_1, q_1}(x) dx + c_2 \int_{\gamma_2} \theta_{p_2, q_2}(x) dx &= \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \int_{\Gamma} f_0(x) dx, \\ c_1 \int_{\gamma_1} x \theta_{p_1, q_1}(x) dx + c_2 \int_{\gamma_2} x \theta_{p_2, q_2}(x) dx &= \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \int_{\Gamma} x f_0(x) dx, \end{aligned}$$

где

$$f_0(x) = \rho_1 [\partial_x^2 U_0^{(1)} + \nu \partial_y U_0^{(1)}]_{y=0} - \rho_2 [\partial_x^2 U_0^{(2)} + \nu \partial_y U_0^{(2)}]_{y=0}.$$

Система однозначно разрешима при некотором выборе  $p_i$ ,  $q_i$  и  $\delta$ , в чем легко убедиться, рассмотрев предел  $\delta \rightarrow 0$ . Предельная матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} q_1 - p_1 & q_2 - p_2 \\ 2^{-1}(q_1^2 - p_1^2) & 2^{-1}(q_2^2 - p_2^2) \end{pmatrix}$$

и ее определитель  $2^{-1}(q_1 - p_1)(q_2 - p_2)(q_2 - q_1 + p_2 - p_1)$  не обращается в нуль. Это свойство, очевидно, сохраняется при малых  $\delta > 0$ . Теперь определим

$$U_1^{(i)}(x, y) = U_+^{(i)}(x, y) + \Lambda^+(x, y), \quad i = 1, 2,$$

где

$$\Lambda^+(x, y) = -g_0(x) \chi_{y_-, y_+}(y) / (\rho_1 - \rho_2), \quad g_0(x) = - \int_p^x t f(t) dt + x \int_p^x f(t) dt$$

(так что ввиду (72)  $g_0''(x) = f(x)$  при  $x \in \mathbb{R}$  и  $\text{supp } g_0 \subset \Gamma$ ). Тогда нетрудно проверить, что условие (71) по-прежнему имеет место для  $U_2^{(1)}$  и  $U_2^{(2)}$ . При этом

$$\rho_1 [\partial_x^2 U_1^{(1)} + \nu \partial_y U_1^{(1)}] - \rho_2 [\partial_x^2 U_1^{(2)} + \nu \partial_y U_1^{(2)}] = 0 \quad \text{при } y = 0, x \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_-.$$

Проделав эти выкладки для обоих интервалов  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ , определим функции

$$u_0^{(i)}(x, y) = U_0^{(i)}(x, y) + \sum_{\pm} [c_1^{\pm} g_1^{\pm}(x, y) + c_2^{\pm} g_2^{\pm}(x, y) + \Lambda^{\pm}(x, y)],$$

где  $\sum_{\pm}$  означает суммирование двух членов с индексами ‘+’ и ‘-’. Заметим, что выражение в квадратных скобках имеет носитель в  $\Gamma_{\pm} \times (y_- - 2\varepsilon, y_+ + 2\varepsilon)$ , и, тем самым, принимая во внимание определение  $U_0^{(i)}$ , получим  $u_0^{(i)} = u^{(i)}$  для  $z \in W^{(i)} \setminus \Pi$ .

Приведенные выше рассуждения показывают, что функции  $u_0^{(i)}$  удовлетворяют условиям:

$$-\nabla^2 u_0^{(i)} = \mu^{(i)} \quad \text{в } L^{(i)}, \quad i = 1, 2, \tag{73}$$

$$\partial_x^2 u_0^{(1)} + \nu \partial_y u_0^{(1)} = 0 \quad \text{при } y = h, x \in \mathbb{R}, \tag{74}$$

$$\partial_y u_0^{(1)} = \partial_y u_0^{(2)} \quad \text{при } y = 0, x \in \mathbb{R}, \tag{75}$$

$$\rho_1 [\partial_x^2 u_0^{(1)} + \nu \partial_y u_0^{(1)}] = \rho_2 [\partial_x^2 u_0^{(2)} + \nu \partial_y u_0^{(2)}] \quad \text{при } y = 0, x \in \mathbb{R}, \tag{76}$$

где  $\mu^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) — бесконечно дифференцируемые функции и  $\mu^{(i)} = 0$  в  $W^{(i)} \setminus \Pi$ .

Из определения функции Грина непосредственно следует, что функции

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Pi^{(j)}} \mu^{(j)}(\xi, \eta) G^{(i,j)}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \Pi^{(j)} = \Pi \cap \{(-1)^j y < 0\}, \quad i = 1, 2, \tag{77}$$

удовлетворяют условиям (73)–(76) и (6). Используя общую форму решения в пустых слоях (см. [26], § 3), замечаем, что разность  $u_1^{(i)} - u_0^{(i)}$  равна константе  $c^{(i)}$ . Поэтому

$$u_0^{(i)}(z) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Pi^{(j)}} \mu^{(j)}(\xi, \eta) G^{(i,j)}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + c^{(i)} \quad \text{для } z \in L^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

где  $c^{(1)}$  и  $c^{(2)}$  — вещественные постоянные.

Применим формулу Грина к правой части последнего равенства. Принимая во внимание (10), (73) и тот факт, что  $u_0^{(i)} = u^{(i)}$  в  $W^{(i)} \setminus \Pi$ , получим

$$u^{(i)}(z) = \sum_{j=1}^2 \int_{\partial\Pi^{(j)}} \left[ u_0^{(j)}(\zeta) \partial_{n(\zeta)} G^{(i,j)}(z, \zeta) - G^{(i,j)}(z, \zeta) \partial_n u_0^{(j)}(\zeta) \right] ds_\zeta + c^{(i)}, \quad (78)$$

( $i = 1, 2$ ) для  $z \in W^{(i)} \setminus \Pi$ ; здесь нормаль на  $\partial\Pi$  направлена во внешность области  $\Pi$ .

Последняя формула содержит два интеграла по отрезку  $\{(x, y) : x_- - 2\varepsilon < x < x_+ + 2\varepsilon, y = 0\}$ , где  $\partial_n = -\partial\eta$  ( $\partial_n = \partial\eta$ ) на верхней (нижней — соответственно) стороне. Вклад этих интегралов в (78) равен  $I_1 + I_2$ , где

$$I_j = (-1)^j \int_{x_- - 2\varepsilon}^{x_+ + 2\varepsilon} \left[ u_0^{(j)}(\xi) \partial_\eta G^{(i,j)}(z, \xi) - G^{(i,j)}(z, \xi) \partial_\eta u_0^{(j)}(\xi) \right]_{\eta=0} d\xi.$$

Используя формулы (22) и (23), находим

$$\begin{aligned} \nu^{-1} \left[ G_{\xi\xi}^{(i;1)}(x, y, \xi, \eta) - G_{\xi\xi}^{(i;2)}(x, y, \xi, \eta) \right]_{\eta=0} &= \\ &= \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) G_\eta^{(i;2)}(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\eta=0} = \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) G_\eta^{(i;1)}(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\eta=0}. \end{aligned}$$

Кроме того, из соотношений (75) и (76) вытекает, что для  $\eta = 0$  и  $\xi \in \mathbb{R}$

$$\partial_\eta u_0^{(1)}(\xi, \eta) = \partial_\eta u_0^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \left[ \rho_1 \partial_\xi^2 u_0^{(1)}(\xi, \eta) - \rho_2 \partial_\xi^2 u_0^{(2)}(\xi, \eta) \right].$$

Используя последние равенства, находим

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{(-1)^j}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \int_{x_- - 2\varepsilon}^{x_+ + 2\varepsilon} \left[ \rho_j u_0^{(j)} \left( G_{\xi\xi}^{(i,1)} - G_{\xi\xi}^{(i,2)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \rho_1 \partial_\xi^2 u_0^{(1)} - \rho_2 \partial_\xi^2 u_0^{(2)} \right) G^{(i,j)} \right]_{\eta=0} d\xi. \end{aligned}$$

Проинтегрировав по частям в  $I_1 + I_2$ , воспользуемся определениями (26) и (68) и, учитывая, что  $u_0^{(i)}$  — гладкое продолжение функции  $u^{(i)}$ , получим

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \left[ \partial_\xi \Delta(\zeta) \Xi^{(i)}(z, \zeta) - \Delta(\zeta) \partial_\xi \Xi^{(i)}(z, \zeta) \right]_{\zeta=x_- - 2\varepsilon}^{\zeta=x_+ + 2\varepsilon}. \quad (79)$$

В силу уравнения Лапласа при  $z \in W^{(i)} \setminus \Pi$  имеет место равенство

$$0 = \sum_{j=1}^2 \int_{\Pi^{(j)} \setminus B^{(j)}} \left[ u^{(j)}(\zeta) \nabla_\zeta^2 G^{(i,j)}(z; \zeta) - G^{(i,j)}(z; \zeta) \nabla^2 u^{(j)}(\zeta) \right] d\xi d\eta,$$



где  $B^{(j)} = B \cap L^{(j)}$ . Применяя первую формулу Грина и использованный выше прием для интегрирования по частям на отрезках  $\{x_- - 2\varepsilon < x < -a, y = 0\}$  и  $\{a < x < x_+ + 2\varepsilon, y = 0\}$ , получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \int_{S^{(j)}} \left[ u^{(j)}(\zeta) \partial_{n(\zeta)} G^{(i,j)}(z, \zeta) - G^{(i,j)}(z, \zeta) \partial_n u^{(j)}(\zeta) \right] ds_\zeta + \\ & \quad + \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \left[ \Xi^{(i)}(z, \zeta) \partial_\xi \Delta(\zeta) - \Delta(\zeta) \partial_\xi \Xi^{(i)}(z, \zeta) \right]_{\zeta=-a}^{\zeta=a} = \\ & = \sum_{j=1}^2 \int_{\partial \Pi \cap L^{(j)}} \left[ u^{(j)}(\zeta) \partial_{n(\zeta)} G^{(i,j)}(z, \zeta) - G^{(i,j)}(z, \zeta) \partial_n u^{(j)}(\zeta) \right] ds_\zeta + \\ & \quad + \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \left[ \Xi^{(i)}(z, \zeta) \partial_\xi \Delta(\zeta) - \Delta(\zeta) \partial_\xi \Xi^{(i)}(z, \zeta) \right]_{\zeta=x_- - 2\varepsilon}^{\zeta=x_+ + 2\varepsilon}. \quad (80) \end{aligned}$$

Объединяя последнюю формулу с (78) и (79), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} u^{(i)}(z) = & \sum_{j=1}^2 \int_{S^{(j)}} \left[ u^{(j)}(\zeta) \partial_{n(\zeta)} G^{(i,j)}(z, \zeta) - G^{(i,j)}(z, \zeta) \partial_n u^{(j)}(\zeta) \right] ds_\zeta + \\ & + \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \left[ \Xi^{(i)}(z, \xi) \partial_\xi \Delta(\xi) - \Delta(\xi) \partial_\xi \Xi^{(i)}(z, \xi) \right]_{\xi=-a}^{\xi=a} + c^{(i)}, \quad (81) \end{aligned}$$

которое справедливо в области  $W^{(i)} \setminus \Pi$ . Очевидно, что правая часть определяет функцию, гармоническую в области  $W^{(i)}$ , которая совпадает с  $u^{(i)}$  в  $W^{(i)} \setminus \Pi$ . Таким образом, представление (81) справедливо всюду в  $W^{(i)}$ .

Из (81) и асимптотик функций Грина (24) вытекает следующая формула

$$\begin{aligned} u^{(i)}(z) = & \mathcal{Q}^{(i)} \log |z| + H(-x) \left\{ \delta_{1,i} \mathcal{K}x + e^{\nu y} (\mathcal{A} \sin \nu x + \mathcal{B} \cos \nu x) + \right. \\ & \left. + H(\nu - \nu_*) E^{(i)}(\nu_0 y) (\mathcal{A}_0 \sin \nu_0 x + \mathcal{B}_0 \cos \nu_0 x) \right\} + C_\pm^{(i)} + \psi^{(i)}(z), \quad (82) \end{aligned}$$

описывающая поведение при  $|z| \rightarrow \infty$ , при этом справедливы оценки

$$\psi^{(i)} = O(|z|^{-1}) \quad \text{и} \quad |\nabla \psi^{(i)}| = O(|z|^{-2}).$$

Здесь  $H$  — функция Хевисайда,  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера,  $C_\pm^{(i)}$  — некоторые постоянные, причем  $C_\pm^{(1)}$  соответствует значениям  $\pm x > 0$ , а  $C_+^{(2)} = C_-^{(2)}$ ; наконец, функция  $E^{(i)}$  определена формулой (12).

Исходя из представления (81) и пользуясь (24), найдем коэффициенты в асимптотике (82) (выкладки аналогичны использованным в работе [26]);

заметим, что  $C_+^{(1)}$  и  $C_-^{(2)} = C_+^{(2)}$  произвольны, а  $C_+^{(1)}$  и  $C_-^{(1)}$  связаны соотношением

$$C_+^{(1)} - C_-^{(1)} = \varkappa \int_{S^{(1)}} [u^{(1)} \partial_n \xi - \xi \partial_n u^{(1)}] ds_\zeta + \frac{\varkappa}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} [\xi \Delta_\xi(\zeta) - \Delta(\zeta)]_{\zeta=-a}^{\zeta=a},$$

где  $\varkappa = -\nu/Q_0$ , а  $Q_0 = 1 + \sigma - \nu h$ . Остальные коэффициенты в асимптотиках имеют следующий вид:

$$Q^{(i)} = - \sum_{j=1}^2 \rho_j Q^{(i,j)} \int_{S^{(j)}} \partial_n u^{(j)} ds + \frac{Q^{(i,1)} - Q^{(i,2)}}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \Delta_\xi(\zeta) \Big|_{\zeta=-a}^{\zeta=a},$$

$$K = -\varkappa \int_{S^{(1)}} \partial_n u^{(1)} ds + \frac{\varkappa}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \Delta_\xi(\zeta) \Big|_{\zeta=-a}^{\zeta=a},$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} = & \sum_{j=1}^2 C^{(j)} \int_{S^{(j)}} \left[ u^{(j)}(\zeta) \partial_n (e^{\nu\eta} \cos \nu\xi) - \partial_n u^{(j)}(\zeta) e^{\nu\eta} \cos \nu\xi \right] ds - \\ & - \frac{2C^{(1)}}{\sigma\nu(\rho_2 - \rho_1)} [\Delta_\xi(\zeta) \cos \nu\xi + \nu \Delta(\zeta) \sin \nu\xi]_{\zeta=-a}^{\zeta=a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{2} = & \sum_{j=1}^2 C_0^{(j)} \int_{S^{(j)}} \left[ u^{(j)}(\zeta) \partial_n (E^{(j)}(\nu_0\eta) \cos \nu_0\xi) - \partial_n u^{(j)}(\zeta) E^{(j)}(\nu_0\eta) \cos \nu_0\xi \right] ds \\ & - \frac{2C_0^{(1)}}{\sigma\nu_0(\rho_2 - \rho_1)} [\Delta_\xi(\zeta) \cos \nu_0\xi + \nu_0 \Delta(\zeta) \sin \nu_0\xi]_{\zeta=-a}^{\zeta=a}. \end{aligned}$$

Здесь константы определены формулами (16) и (25). Коэффициенты  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}_0$  в правой части (82) получаются заменой  $\cos$  на  $-\sin$  и  $\sin$  на  $\cos$  в выражениях для  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}_0$  соответственно.

## 5 Корректная постановка задачи

В § 1.1 было упомянуто, что уравнения Лапласа, краевых условий и условий на бесконечности недостаточно для однозначного определения решения задачи о теле, пересекающем свободную поверхность однородной жидкости. Впервые это было строго доказано Ф. Урселлом [34], хотя свидетельства неединственности, полученные численными методами, были известны задолго до этого (см., например, [35]). Для получения корректных постановок в работах [34] и [31] были предложены различные варианты дополнительных условий (их детальное описание изложено в книге [11]).

Такая же ситуация имеет место и в случае двухслойной жидкости, когда тело пересекает поверхность раздела сред, и в данном параграфе предлагаются два вида дополнительных условий, аналогичных рассмотренным в [34] и [31]. Для одного из них корректность постановки установлена далее (см. §§ 5.2 и 7).

### 5.1 Дополнительные условия

Первый вид дополнительных условий накладывает ограничения на контур тела в точках пересечения со свободной поверхностью.

**Определение 1.** Пусть углы  $\beta_{\pm}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , в точке  $P_{\pm}$  таковы, что показатели  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  в локальной асимптотике (см. уравнение (57), которое их определяет) удовлетворяют условию  $\lambda_{\pm} \leq 1$ . (Тем самым, поле скоростей имеет сингулярности в точках  $P_+$  и  $P_-$ .) Если  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$  удовлетворяют соотношениям (1)–(7), и значения их коэффициентов в локальной асимптотике заданы, т.е.

$$C_+ = d_+ \quad \text{и} \quad C_- = d_-, \quad (83)$$

то  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$  — решение с предписанными сингулярностями поля скоростей. Здесь  $C_{\pm}$  — коэффициент в формуле (65), когда  $\lambda_{\pm} < 1$ , а при  $\lambda_{\pm} = 1$  используется асимптотика (67).

Когда  $d_{\pm} = 0$ , такое решение называется *наименее сингулярным* (термин введенный в работе [34]).

Перейдем ко второму виду дополнительных условий, в которых участвуют величины  $\Delta_x(a)$  и  $\Delta_x(-a)$ ; см. формулу (68). Напомним их физический смысл. Это разности горизонтальных компонент количества движения, которые тело сообщает жидкостям верхнего и нижнего слоев в точках  $P_+$  и  $P_-$  соответственно.

**Определение 2.** Если  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$  удовлетворяют соотношениям (1)–(7), и равенства

$$\Delta_x(a) = d_+ \quad \text{и} \quad \Delta_x(-a) = d_- \quad (84)$$

выполняются с заданными значениями  $d_+$  и  $d_-$ , то  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$  — решение с предписанными разностями горизонтальных компонент количества движения в точках  $P_+$  и  $P_-$ .

Вследствие формул (63) и (67) оба вида решений совпадают, когда

$$\lambda_+ = \lambda_- = 1.$$

Далее будет исследоваться только решение с предписанными разностями горизонтальных компонент количества движения в точках  $P_+$  и  $P_-$ . Дело в том, что, умея находить такие решения для различных пар значений  $d_+$  и  $d_-$ , можно получать и решения с предписанными сингулярностями. Для этой цели нужно воспользоваться процедурой, которая аналогична изложенной в § 8.3.1 книги [11], а последняя применена в случае полупогруженного тела в однородной жидкости.

## 5.2 Единственность решения с конечной энергией для задачи с заданными разностями компонент количества движения

Пусть через  $u^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  обозначена разность двух решений задачи с заданными разностями горизонтальных компонент количества движения в точках  $P_{\pm}$ , т.е. для этих функций  $f^{(i)} = 0$  в условии (5), а также выполняются равенства

$$\Delta_x(a) = \Delta_x(-a) = 0. \quad (85)$$

Тогда, в частности,  $\mathcal{K} = 0$  и  $\mathcal{Q}^{(i)} = 0$  в асимптотиках (82) для  $u^{(i)}$ .

В работе [28] доказано, что  $u^{(i)} = \text{const}$  в  $W^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , если

$$\int_{W^{(i)}} |\nabla u^{(i)}|^2 dx dy < \infty, \quad i = 1, 2,$$

и неравенство  $x \cos(n, x) \geq 0$  выполняется на  $S^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ . Таким образом, эти условия гарантируют, что однородная задача (1)–(7), дополненная условиями (85), имеет только тривиальное решение, что означает корректность постановки задачи с заданными разностями компонент количества движения, по крайней мере, при достаточно естественном геометрическом предположении.

Следует отметить, что корректность постановки задачи может быть доказана и для более общих дополнительных условий, а именно:

$$\begin{aligned} A \Delta_x(-a) + B[\Delta(a) - \Delta(-a)] &= C, \\ \Delta_x(a) - \Delta_x(-a) &= K, \end{aligned}$$

где  $A, B, C, K$  — некоторые вещественные числа и  $A^2 + B^2 \neq 0$ . Эти условия обобщают рассмотренные в [11, § 8.1.1] условия для тела, частично погруженного в однородную жидкость.

Для исследования однозначной разрешимости задачи с заданными разностями компонент количества движения используются методы теории потенциала, аналогичные разработанным в статье [31] для случая движения тела, частично погруженного в однородную жидкость. Однако дополнительные

технические трудности связаны, в частности, с необходимостью рассмотрения вспомогательной краевой задачи (отметим, что она представляет и самостоятельный интерес для приложений). Вопросу о ее разрешимости была посвящена работа [36], результаты которой изложены в следующем параграфе.

## 6 Вспомогательная краевая задача и ее разрешимость

При исследовании однозначной разрешимости задачи (1)–(7) с заданными разностями компонент количества движения мы будем использовать вспомогательную задачу о движении тела по дну слоя постоянной конечной глубины, которая возникает из исходной задачи при  $\sigma \rightarrow 0$ .

Будем полагать, что тело с поперечным сечением  $D$  движется с постоянной скоростью  $U$  по дну слоя жидкости глубины  $h$  (см. рис. 5). Пусть начало координат расположено на дне и принадлежит  $\partial D$ . Занятую жидкостью область обозначим  $W = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < h\} \setminus \bar{D}$ , а  $F = \{y = h\}$ , как и ранее, — свободная поверхность жидкости. Пусть  $P_+$  и  $P_-$  — правый и левый концы отрезка  $B = \partial D \cap \{y = 0\}$ , а  $S = \partial D \setminus B$  и  $B_0 = \{y = 0\} \setminus B$  — смоченный контур тела и свободная от него часть дна соответственно. Угол между  $B_0$  и односторонней касательной к  $S$  в точке  $P_{\pm}$  обозначим через  $\beta_{\pm}$ , и будем считать, что  $\beta_{\pm} \neq 0, \pi$ .

Вспомогательная задача для потенциала скоростей  $u$  имеет вид:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{в } W, \tag{86}$$

$$u_{xx} + \nu u_y = 0 \quad \text{на } F, \tag{87}$$

$$u_y = 0 \quad \text{на } B_0, \tag{88}$$

$$\partial_n u = f \in C^{0,\alpha}(\bar{S}) \quad \text{на } S, \tag{89}$$

$$\sup_{W \setminus E} |\nabla u| < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |\nabla u| = 0, \tag{90}$$

$$\int_{W \cap E} |\nabla u|^2 dx dy < \infty, \tag{91}$$

где  $E$  — произвольный компакт, содержащий точки  $P_{\pm}$ . Решение этой задачи определено с точностью до аддитивной постоянной.

Для упрощения выкладок в этом параграфе используются безразмерные переменные, в результате чего  $h$  и  $g$  равны единице. Основным результатом является

**Теорема 1.** Пусть функция  $f \in C^{0,\alpha}(\bar{S})$  для какого-либо  $\alpha \in (0, 1)$ . Тогда задача (86)–(91) имеет единственное (с точностью до аддитивной постоян-

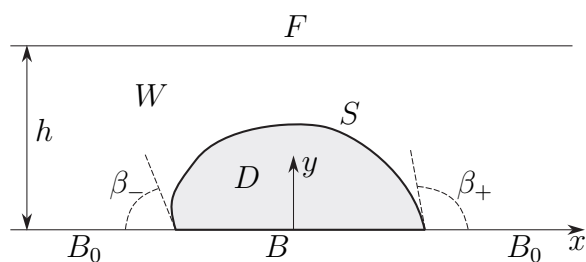


Рис. 5: Тело, движущееся по дну жидкости постоянной глубины.

ной) решение при всяком  $\nu \neq 1$ , исключая некоторую (возможно пустую) последовательность. Если последняя существует, то она стремится к единице сверху.

Это утверждение следует из рассмотрений §§ 6.1 и 6.2, причем доказательство существования решения задачи базируется на методах теории потенциала. Для этого используется функции Грина  $G(z, \zeta)$ , которая по первому аргументу удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 G = -\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$  в слое  $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}$  и условию (87), а также соответствующим аналогам условий (88) и (90); кроме того,  $|\nabla G|$  ограничен вне окрестности источника. Имеет место представление (см., например, [37]):

$$G(z, \zeta) = -(2\pi)^{-1} \left\{ \log |z - \zeta| + w(z, \zeta) + \int_0^{+\infty} [\nu \operatorname{ch} k(y + \eta - 1) + k \operatorname{sh} k(y + \eta - 1) + (\nu + k)e^{-k} \operatorname{ch} k(y - \eta)] \frac{\cos k(x - \xi)}{k(k - \nu \operatorname{th} k) \operatorname{ch} k} dk \right\}, \quad (92)$$

где

$$w(z, \zeta) = \frac{\pi\nu}{1 - \nu}(x - \xi) + H(\nu - 1) \frac{2\pi\nu \operatorname{ch} \lambda_0 y \operatorname{ch} \lambda_0 \eta}{\lambda_0(\operatorname{ch}^2 \lambda_0 - \nu)} \sin \lambda_0(x - \xi),$$

а  $\lambda_0$  — единственный положительный корень уравнения  $k - \nu \operatorname{th} k = 0$ , который существует при  $\nu > 1$ . Регуляризация интеграла в (92) осуществляется также как в § 2.1. Поведение при  $|x| \rightarrow \infty$  описывается формулой

$$G(z, \zeta) = -\pi^{-1} H(-x) w(z, \zeta) + \psi_{\pm}(x, y), \quad \text{где } \pm x > 0, \quad (93)$$

а  $\psi_{\pm} = O(|x|^{-1})$ ,  $|\nabla \psi_{\pm}| = O(|x|^{-2})$ .

Тем же способом, что и в § 4, получается интегральное представление Грина для решения задачи (86)–(91), которое при некоторой фиксации аддитивной постоянной имеет вид:

$$u(z) = \int_S [u(\zeta) \partial_{n(\zeta)} G(z, \zeta) - \partial_{n(\zeta)} u(\zeta) G(z, \zeta)] ds_{\zeta}, \quad z \in W. \quad (94)$$

Используя формулу (93), получаем отсюда асимптотику решения задачи (86)–(91) при  $|x| \rightarrow \infty$ :

$$u(x, y) = H(-x) \{ \mathcal{Q}x + H(\nu - 1) \operatorname{ch} \lambda_0 y (\mathcal{A} \sin \lambda_0 x + \mathcal{B} \cos \lambda_0 x) \} + C_{\pm} + \varphi_{\pm}(x, y), \quad \text{где } \pm x > 0, \quad (95)$$

а  $\varphi_{\pm} = O(|x|^{-1})$  и  $|\nabla \varphi_{\pm}| = O(|x|^{-2})$ , причем коэффициенты выражаются следующим образом:

$$\mathcal{Q} = \frac{\nu}{1 - \nu} \int_S \partial_n u \, ds, \quad C_+ - C_- = \frac{\nu}{1 - \nu} \int_S (x \partial_n u - u \partial_n x) \, ds, \quad (96)$$

$$\mathcal{A} = \frac{2\nu}{\lambda_0(\nu - \operatorname{ch}^2 \lambda_0)} \int_S \left[ u \partial_n \{ \operatorname{ch} \lambda_0 (y + 1) \cos \lambda_0 x \} - \partial_n u \operatorname{ch} \lambda_0 (y + 1) \cos \lambda_0 x \right] ds,$$

а  $\mathcal{B}$  получается заменой  $\cos \lambda_0 x$  в последней формуле на  $-\sin \lambda_0 x$ .

Согласно асимптотике (95) имеется два режима движения. В закритическом режиме ( $\nu < 1$ ) волны на бесконечности позади тела отсутствуют, а в докритическом ( $\nu > 1$ ) они имеются.

## 6.1 Однозначная разрешимость задачи в закритическом режиме

Сначала рассмотрим вопрос о единственности решения, а именно, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Если  $\nu < 1$ , то однородная задача (86)–(91) имеет только тривиальное решение  $u = \operatorname{const}$ .*

Доказательство основано на приеме, предложенном в работе [38]; его детали приведены в § 2.2 статьи [36] и поэтому опущены здесь. Перейдем к более деликатному вопросу о разрешимости, ответ на который дает

**Лемма 2.** *Пусть  $\nu < 1$ , тогда задача (86)–(91) имеет решение для любой функции  $f \in C^{0,\alpha}(\bar{S})$ ,  $0 < \alpha < 1$ .*

*Доказательство.* Будем искать решение в виде потенциала простого слоя

$$u(z) = (\mathcal{U}\mu)(z) = \int_S \mu(\zeta) G(z, \zeta) \, ds_{\zeta}, \quad z \in L = (-\infty, +\infty) \times (0, 1), \quad (97)$$

где  $G(z; \zeta)$  определена формулой (92), а плотность  $\mu$  принадлежит классу  $C^{0,\alpha}(S)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , и банахову пространству  $C_{\kappa}(S)$ . Последнее состоит из непрерывных на  $S$  функций, имеющих конечную норму

$$\|\mu\|_{\kappa} = \sup \{ |y|^{1-\kappa} |\mu(z)| : z \in S \}, \quad 0 < \kappa < 1. \quad (98)$$

Такой потенциал  $\mathcal{U}\mu$  ограничен и удовлетворяет условию

$$\int_{R_{db}} |\nabla \mathcal{U}\mu|^2 dx dy < \infty \quad \text{при конечных } b, d > 0,$$

где  $R_{db} = \{|x| < d, 0 < y < b < 1\}$  — прямоугольник, что устанавливается при помощи неравенства Буняковского и предположения, что  $\mu \in C_\kappa(S)$ . Пользуясь результатами работы [39], нетрудно показать, что из последнего неравенства вытекает, что  $\mathcal{U}\mu \in C^2(W \cup B) \cap C^2(D \cup B_0)$ . Кроме того, известные результаты о гладкости потенциалов простого слоя (см., например, [40]) гарантируют, что  $\mathcal{U}\mu \in C^{1,\alpha}(W \cup S) \cap C^{1,\alpha}(D \cup S)$ .

Из определения функции Грина вытекает, что для потенциала (97) выполнены все соотношения задачи (86)–(91) кроме условия (88) (условие Неймана на  $S$ ). Чтобы удовлетворить ему, согласно свойствам нормальной производной потенциала простого слоя плотность должна быть найдена из интегрального уравнения

$$\begin{aligned} -\mu(z) + (T\mu)(z) &= 2f(z), \quad \text{где } z \in S, \\ \text{а } (T\mu)(z) &= 2 \int_S \mu(\zeta) \partial_{n_z} G(z, \zeta) ds_\zeta. \end{aligned} \quad (99)$$

(Заметим, что это уравнение имеет место и при  $\nu > 1$ .)

Несмотря на то, что оператор  $T$  не является компактным в пространстве  $C_\kappa(S)$ ,  $\kappa \in (0, 1)$ , существует такое  $\kappa$ , что теоремы Фредгольма справедливы для уравнения (99) в этом пространстве. Это имеет место, когда существенная норма оператора  $T$  строго меньше 1 в пространстве  $C_\kappa(S)$ . (Напомним, что существенной нормой  $|T|$  называется  $\inf \|T - M\|$ , когда  $M$  пробегает множество компактных операторов; см., например, [40].) Из результатов § 2, гл. 1 работы [41] (их изложение имеется в книге [11, § 2.1.3] и обзоре [40]) вытекает, что справедливо неравенство

$$|T| < \max_{\pm} \frac{\sin \kappa |\pi - 2\beta_{\pm}|}{\sin \kappa \pi}.$$

Таким образом, оценка  $|T| < 1$  имеет место в пространстве  $C_\kappa(S)$  при

$$\kappa < \min_{\pm} \{1 + |1 - 2\beta_{\pm}/\pi|\}^{-1}. \quad (100)$$

Согласно альтернативе Фредгольма, чтобы установить однозначную разрешимость уравнения (99) в этом пространстве, достаточно доказать, что однородное уравнение

$$-\mu_0(z) + T\mu_0(z) = 0, \quad z \in S, \quad (101)$$



имеет только тривиальное решение. Предположив, что существует нетривиальное решение  $\mu_0$ , покажем, что это ведет к противоречию.

Рассмотрим потенциал

$$V_0(z) = \int_S \mu_0(\zeta) G(z, \zeta) ds_\zeta,$$

для которого согласно уравнению (101) производная по внешней нормали  $\partial_{n_e} V_0$  обращается в ноль на  $S$ . Тем самым, потенциал  $V_0$  удовлетворяет всем соотношениям однородной задачи (86)–(91), и  $V_0 = c$  в  $W$  в силу Леммы 1, где  $c$  константа. Так как  $V_0$  непрерывен вплоть до  $S$ , то  $\bar{V}_0 = V_0 - c = 0$  на  $S$ . Применяв формулу Грина к  $\bar{V}_0$  в области  $D$ , получим

$$0 = \int_D \bar{V}_0 \nabla^2 \bar{V}_0 dx dy = \int_D |\nabla \bar{V}_0|^2 dx dy - \int_{\partial D} \bar{V}_0 \partial_{n_i} \bar{V}_0 ds, \quad (102)$$

где  $\partial_{n_i}$  — производная по внутренней нормали. Поскольку  $\bar{V}_0 = 0$  на  $S$  и  $\partial_n \bar{V}_0 = \partial_y \bar{V}_0 = 0$  на  $B$  (по определению функции Грина), то из (102) следует, что  $\bar{V}_0 = \text{const}$  в  $D$  и, следовательно,  $\partial_{n_i} V_0 = 0$  на  $S$ . Тогда  $\mu_0 = 0$  по формуле скачка нормальной производной потенциала простого слоя.

Полученное противоречие доказывает лемму. □

## 6.2 О разрешимости задачи в докритическом режиме

Сначала рассмотрим задачу Неймана, которая в описывает движение тела по дну слоя единичной глубины, ограниченного сверху горизонтальной твердой крышкой. Она возникает, когда  $\nu \rightarrow \infty$  в задаче (86)–(91). Решение  $u_0$  предельной задачи должно удовлетворять соотношениям (86), (88)–(91) и условию

$$\partial_y u_0 = 0 \quad \text{при} \quad y = 1. \quad (103)$$

Для этой задачи получены следующие представления функции Грина:

$$G_0(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \log \left| \left( 1 - e^{-\pi|x-\xi|+i\pi(y+\eta-2)} \right) \left( 1 - e^{-\pi|x-\xi|+i\pi(y-\eta)} \right) \right| + \\ + \frac{1}{2}|x-\xi| + \frac{1}{2}(\xi-x), \\ G_0(z, \zeta) = -(2\pi)^{-1} \left\{ \log |z-\zeta| - \right. \\ \left. - \int_0^{+\infty} \frac{[\text{ch } k(y+\eta-1) + e^{-k} \text{ch } k(y-\eta)] \cos k(x-\xi) dk}{k \text{sh } k} \right\},$$

(см. работы [42] и [37] соответственно). Здесь интеграл регуляризуется так же как в § 2.1. Из первого из них вытекает асимптотика:

$$G_0(z, \zeta) = (x - \xi) H(-x) + O(e^{-\pi|x|}),$$

которая справедлива при  $|\zeta| \leq c < \infty$  и  $|x| \rightarrow \infty$ .

Тем же способом, что и в § 4, получается асимптотическое представление решения задачи:

$$u_0(z) = c_{\pm} - x H(-x) \int_S \partial_n u_0 ds + O(e^{-\pi|x|}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \pm x > 0,$$

где постоянные  $c_{\pm}$  связаны соотношением

$$c_+ - c_- = \int_S [u_0 \partial_n x - x \partial_n u_0] ds.$$

Простым следствием этой асимптотики является

**Лемма 3.** *Если потенциал  $u_0$  является решением однородной задачи (86), (88)–(90), (103), то  $u_0 = \text{const}$ .*

Теперь перейдем к разрешимости задачи. Используя последнюю лемму, аналогично Лемме 2 доказывается

**Лемма 4.** *Для любой функции  $f \in C^{0,\alpha}(\bar{S})$  ( $0 < \alpha < 1$ ) задача (86), (88)–(91), (103) имеет решение вида*

$$u_0(z) = \int_S \mu(\zeta) G_0(z, \zeta) ds_{\zeta}, \tag{104}$$

причем  $\mu \in C_{\kappa}(S)$  является решением уравнения (99), в котором вместо оператора  $T$  используется

$$(T_0\mu)(z) = 2 \int_S \mu(\zeta) \partial_{n_z} G_0(z, \zeta) ds_{\zeta},$$

а к удовлетворяет неравенству (100).

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (86)–(91) в докритическом режиме, что эквивалентно доказательству разрешимости интегрального уравнения (99). Поскольку оператор  $T$ , фигурирующий в этом уравнении, аналитически зависит от параметра  $\nu > 1$ , то естественно воспользоваться

методом, который применялся в работе [31] и основан на теореме об обратимости оператор-функции, аналитически зависящей от параметра (см., например, [43]). Согласно этой теореме оператор  $(I - T)^{-1}$ , обращающий интегральное уравнение (99), представляет собой мероморфную функцию  $\nu$ , если он ограничен хотя бы для одного значения этого параметра.

В силу Леммы 4 оператор  $(I - T_0)^{-1}$  существует и ограничен в пространстве  $C_\kappa(S)$ , когда  $\kappa$  удовлетворяет неравенству (100). Если показать, что  $\|T - T_0\|_{C_\kappa(S)} \rightarrow 0$  при таком  $\kappa$  и  $\nu \rightarrow \infty$ , то оператор  $(I - T)^{-1}$  ограничен в  $C_\kappa(S)$  при всех достаточно больших значениях  $\nu$ , и теорема об обратимости оператор-функции, аналитически зависящей от параметра применима к уравнению (99).

Громоздкие выкладки, свидетельствующие что  $\|T - T_0\|_{C_\kappa(S)} \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$  и  $\kappa$ , удовлетворяющем неравенству (100), проделаны в § 3.1 статьи [36], и мы опускаем их здесь. Тем самым, Теорема 1 доказана, если принять во внимание Леммы 1 и 2.

## 7 Метод интегро-алгебраических уравнений для задачи с заданными разностями компонент количества движения

Для доказательства разрешимости задачи с заданными разностями компонент количества движения будет использован тот же метод, что и в § 6. Он базируется на аналитической зависимости оператора уравнения, к которому сводится задача, но уже от двух параметров  $\sigma$  и  $\nu$ , с чем связаны дополнительные трудности.

### 7.1 Сведение задачи к интегро-алгебраической системе

Рассмотрим потенциалы простого слоя

$$(\mathcal{U}^{(i)}\mu)(z) = \sum_{j=1}^2 \int_{S^{(j)}} \mu^{(j)}(\zeta) G^{(i,j)}(z, \zeta) ds_\zeta, \quad z \in L^{(i)}, \quad (105)$$

где  $\mu = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)})$ , причем плотность  $\mu^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) принадлежит банахову пространству  $C_\kappa(S^{(i)})$ . Как и в § 6, оно состоит из вещественных непрерывных на  $S^{(i)}$  функций, для которых конечна норма, аналогичная (98). Таким образом, свойства потенциалов (105) такие же как рассмотренные в § 6.

Будем искать  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$ , удовлетворяющие задаче (1)–(7) и (84), в виде

$$u^{(i)}(z) = (\mathcal{U}^{(i)}\mu)(z) + \sum_{\pm} \mu_{\pm} \Xi^{(i)}(z, \pm a), \quad i = 1, 2, \quad (106)$$

с неизвестными  $\mu$  и  $\mu_{\pm} \in \mathbb{R}$ . Напомним, что символом  $\sum_{\pm}$  обозначена сумма двух членов с индексами  $+$  и  $-$ , а функции  $\Xi^{(i)}$  определены формулой (26). Алгебраическая часть в представлении (106) выбрана с учетом условий (84) и формулы (32).

Стандартные свойства потенциала простого слоя сводят условие Неймана (5) на контуре  $S^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) к интегральному уравнению:

$$-\mu^{(i)}(z) + \sum_{j=1}^2 (T^{(i,j)}\mu^{(j)})(z) + 2 \sum_{\pm} \mu_{\pm} \partial_{n_z} \Xi^{(i)}(z, \pm a) = 2f^{(i)}(z), \quad (107)$$

$$(T^{(i,j)}\mu^{(j)})(z) = 2 \int_{S^{(j)}} \mu^{(j)}(\zeta) \partial_{n_z} G^{(i,j)}(z, \zeta) ds_{\zeta}, \quad z \in S^{(i)}. \quad (108)$$

В отличие от обычных уравнений теории потенциала в каждом из уравнений (107) наряду с интегральными операторами (108) содержатся алгебраические члены. Воспользуемся условиями (84) и дополним интегральное уравнение алгебраическими

$$\rho_1 \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_{S^{(j)}} \mu^{(j)}(\zeta) \partial_x G^{(1,j)}(a, \zeta) ds + \sum_{\pm} \mu_{\pm} \partial_x \Xi^{(1)}(a, \pm a) \right\} - \quad (109)$$

$$- \rho_2 \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_{S^{(j)}} \mu^{(j)}(\zeta) \partial_x G^{(2,j)}(a, \zeta) ds + \sum_{\pm} \mu_{\pm} \partial_x \Xi^{(2)}(a, \pm a) \right\} = d_+,$$

$$\rho_1 \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_{S^{(j)}} \mu^{(j)}(\zeta) \partial_x G^{(1,j)}(-a, \zeta) ds + \sum_{\pm} \mu_{\pm} \partial_x \Xi^{(1)}(-a, \pm a) \right\} - \quad (110)$$

$$- \rho_2 \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_{S^{(j)}} \mu^{(j)}(\zeta) \partial_x G^{(2,j)}(-a, \zeta) ds + \sum_{\pm} \mu_{\pm} \partial_x \Xi^{(2)}(-a, \pm a) \right\} = d_-,$$

Полученную интегро-алгебраическую систему удобно записать в матричной форме

$$(-\mathbf{I} + \mathbf{T})M = F. \quad (111)$$

Здесь  $M = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu_+, \mu_-)^T$ ,  $F = (2f^{(1)}, 2f^{(2)}, d_+/\rho_2, d_-/\rho_2)^T$ ,  $\mathbf{I}$  — единичный оператор в пространстве  $\mathcal{C}_{\kappa} = C_{\kappa}(S^{(1)}) \oplus C_{\kappa}(S^{(2)}) \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ , а  $\mathbf{T}$  действует

в этом пространстве следующим образом:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T^{(1,1)} & T^{(1,2)} & N_+^{(1)} & N_-^{(1)} \\ T^{(2,1)} & T^{(2,2)} & N_+^{(2)} & N_-^{(2)} \\ T_+^{(1)} & T_+^{(2)} & c_{11} & c_{12} \\ T_-^{(1)} & T_-^{(2)} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad (112)$$

где  $N_{\pm}^{(i)}$  — оператор умножения на функцию  $2 \partial_{n_z} \Xi^{(i)}(z, \pm a)$ ,

$$T_{\pm}^{(i)} \mu^{(i)} = \int_{S^{(i)}} \mu^{(i)}(\zeta) \partial_x G^{(2;i)}(\pm a, \zeta) ds - \tau \int_{S^{(i)}} \mu^{(i)}(\zeta) \partial_x G^{(1;i)}(\pm a, \zeta) ds, \quad (113)$$

причем  $\tau = \sigma/(\sigma + 1)$ , а элементы  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) имеют вид:

$$c_{ij} = \partial_x \Xi^{(2)}((-1)^{i+1}a, (-1)^{j+1}a) - \tau \partial_x \Xi^{(1)}((-1)^{i+1}a, (-1)^{j+1}a) + \delta_{ij}. \quad (114)$$

Напомним, что  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

## 7.2 О фредгольмовости оператора $-I + T$

Найдем условия, обеспечивающие фредгольмовость оператора  $-I + T$  в пространстве  $\mathcal{C}_{\kappa} = C_{\kappa}(S^{(1)}) \oplus C_{\kappa}(S^{(2)}) \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ , нормой в котором является

$$\|\mu^{(1)}\|_{\kappa} + \|\mu^{(2)}\|_{\kappa} + |\mu_+| + |\mu_-|,$$

а нормы в  $C_{\kappa}(S^{(i)})$  ( $i = 1, 2$ ) задаются аналогично формуле (98). Как и в § 6 требуемое свойство вытекает из следующей оценки существенной нормы  $\|\mathbf{T}\| < 1$  в этом пространстве.

Представим оператор  $\mathbf{T}$  в виде суммы

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & N_+^{(1)} & N_-^{(1)} \\ 0 & 0 & N_+^{(2)} & N_-^{(2)} \\ T_+^{(1)} & T_+^{(2)} & c_{11} & c_{12} \\ T_-^{(1)} & T_-^{(2)} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \quad (115)$$

Таким образом, матрица оператора  $\hat{\mathbf{T}}$  имеет следующий вид: в ее левом верхнем углу стоит

$$\begin{pmatrix} T^{(1,1)} & T^{(1,2)} \\ T^{(2,1)} & T^{(2,2)} \end{pmatrix},$$

а все остальные элементы нулевые.

Оператор  $\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}}$ , матрица которого выписана явно в формуле (115), является конечномерным в пространстве  $\mathcal{C}_\kappa$ , так как вследствие соотношений (30) и (31) функция  $\partial_{n_z} \Xi^{(i)}(z, \pm a)$  принадлежит пространству  $C_\kappa(S^{(i)})$  при обоих индексах и знаках. Поэтому неравенство  $|\mathbf{T}| < 1$  для существенной нормы в  $\mathcal{C}_\kappa$  вытекает из оценки  $|\hat{\mathbf{T}}| < 1$  в этом же пространстве. Ясно, что последняя оценка эквивалентна аналогичному неравенству для оператора, заданного выписанной выше  $2 \times 2$  матрицей в пространстве  $C_\kappa(S^{(1)}) \oplus C_\kappa(S^{(2)})$  с нормой  $\|\mu^{(1)}\|_\kappa + \|\mu^{(2)}\|_\kappa$ . Согласно сказанному на стр. 110 книги [45], достаточно найти условия, при которых выполняется неравенство

$$\max_{j=1,2} \sum_{i=1}^2 |T^{(i,j)}| < 1, \quad (116)$$

где в левой части стоят существенные нормы в пространстве  $C_\kappa(S^{(j)})$ ,  $j = 1, 2$ .

Для оценки существенных норм операторов  $T^{(i,j)}$  воспользуемся представлениями  $G^{(i,j)}(z, \zeta) = G_s^{(i,j)}(z, \zeta) + g^{(i,j)}(z, \zeta)$ , где

$$G_s^{(1,1)}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_a^\infty \left\{ \frac{e^{-|y-\eta|k}}{k} + \frac{(k-\nu)e^{-(y+\eta)k}}{k[(2\sigma+1)k-\nu]} \right\} \cos k(x-\xi) dk,$$

$$G_s^{(2,1)}(z, \zeta) = \frac{\sigma}{\pi} \int_a^\infty \frac{e^{(y-\eta)k} \cos k(x-\xi) dk}{(2\sigma+1)k-\nu},$$

$$G_s^{(1,2)}(z, \zeta) = \frac{1+\sigma}{\pi} \int_a^\infty \frac{e^{(\eta-y)k} \cos k(x-\xi) dk}{(2\sigma+1)k-\nu},$$

$$G_s^{(2,2)}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_a^\infty \left\{ \frac{e^{-|y-\eta|k}}{k} - \frac{(k+\nu)e^{(y+\eta)k}}{k[(2\sigma+1)k-\nu]} \right\} \cos k(x-\xi) dk$$

(зафиксировано некоторое  $a > \nu/(2\sigma+1) > \nu_0$ ), а  $g^{(i,j)}(z, \zeta)$  непрерывны вместе со всеми производными при  $(z, \zeta) \in \overline{L^{(i)}} \times \overline{L^{(j)}}$ . Для анализа сингулярных слагаемых запишем их следующим образом:

$$2\pi G_s^{(1,1)}(z, \zeta) = J_0(x-\xi, |y-\eta|) + J_0(x-\xi, y+\eta) - \frac{2\sigma}{2\sigma+1} J(b, x-\xi, y+\eta),$$

$$\pi G_s^{(2,1)}(z, \zeta) = \frac{\sigma}{2\sigma+1} J(b, x-\xi, \eta-y),$$

$$\pi G_s^{(1,2)}(z, \zeta) = \frac{1+\sigma}{2\sigma+1} J(b, x-\xi, y-\eta),$$

$$2\pi G_s^{(2,2)}(z, \zeta) = J_0(x-\xi, |y-\eta|) + J_0(x-\xi, -y-\eta) - \frac{2(1+\sigma)}{2\sigma+1} J(b, x-\xi, -y-\eta).$$

Здесь  $b = \nu/(2\sigma + 1)$ , через  $J(c, X, Y)$  обозначена функция

$$\int_a^\infty \frac{e^{-kY} \cos kX}{k - c} dk = \operatorname{Re}\{e^{-cZ} E_1((a - c)Z)\}, \quad \text{где } Z = i(X + iY),$$

а  $E_1(z) = \int_z^\infty t^{-1} e^{-t} dt$  — интегральная экспонента (см., например, [46, § 5.1]); наконец,  $J_0(X, Y) = J(0, X, Y)$ .

Из формулы 5.1.11 книги [46] вытекает равенство

$$e^{-bZ} E_1((a - b)Z) = -\log Z - (e^{-bZ} - 1) \log Z - e^{-bZ} \left\{ \gamma + \log(a - b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n (a - b)^n}{n n!} \right\},$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера. Комбинируя его с предыдущими формулами, приходим к следующим представлениям функций Грина:

$$\begin{aligned} 2\pi G^{(i,i)}(z, \zeta) &= -\log |z - \zeta| + \frac{(-1)^i}{2\sigma + 1} \log |z - \bar{\zeta}| + \\ &+ \frac{2(\sigma + i - 1)}{2\sigma + 1} L(x - \xi, (-1)^{i+1}(y + \eta)) + \hat{g}^{(i,i)}(z, \zeta), \quad i = 1, 2, \\ \pi G^{(2,1)}(z, \zeta) &= -\frac{\sigma}{2\sigma + 1} \log |z - \zeta| - \frac{\sigma}{2\sigma + 1} L(x - \xi, \eta - y) + \hat{g}^{(2,1)}(z, \zeta), \\ \pi G^{(1,2)}(z, \zeta) &= -\frac{1 + \sigma}{2\sigma + 1} \log |z - \zeta| - \frac{1 + \sigma}{2\sigma + 1} L(x - \xi, y - \eta) + \hat{g}^{(1,2)}(z, \zeta). \end{aligned} \tag{117}$$

Здесь функции  $\hat{g}^{(i,j)}(z, \zeta)$  непрерывны вместе со всеми производными при  $(z, \zeta) \in \overline{L^{(i)}} \times \overline{L^{(j)}}$ , а

$$L(X, Y) = \operatorname{Re}\left\{ \log(i(X + iY)) (e^{-ib(X+iY)} - 1) \right\}.$$

Из этой формулы и соотношений (117) следует, что только логарифмические слагаемые функций Грина вносят вклад в существенные нормы операторов  $T^{(i,j)}$ . Действительно, производные остальных слагаемых имеют только логарифмические особенности, и соответствующие интегральные операторы компактны.

Для отыскания условий, гарантирующих справедливость оценки (116), воспользуемся методом, изложенным в § 2.1.3.3 книги [11] и основанным на результатах работы [41]. Пусть на контуре  $\overline{S_1} \cup \overline{S_2}$  введена параметризация  $s \mapsto z(s) = x(s) + iy(s)$ , где  $s$  принадлежит некоторому отрезку. Полагая, что точке  $\zeta = \xi + i\eta$  отвечает значение параметра  $\tau$ , т.е.  $(\xi, \eta) = (x(\tau), y(\tau))$ ,

имеем

$$-\frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial n_{(x,y)}} = \frac{y'(s)[x(s) - x(\tau)] - x'(s)[y(s) - y(\tau)]}{[x(s) - x(\tau)]^2 + [y(s) - y(\tau)]^2}.$$

Когда обе точки принадлежат либо  $\bar{S}_1$ , либо  $\bar{S}_2$  и  $s \rightarrow \tau$ , это выражение имеет предел

$$\frac{x'(\tau)y''(\tau) - y'(\tau)x''(\tau)}{2(x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2)}$$

и, следовательно, представляет собой непрерывную функцию  $z, \zeta$ . Тем самым, логарифмы в первой формуле (117) (представлении функции  $G^{(i,i)}$ ,  $i = 1, 2$ ) не вносят вклада в существенную норму  $T^{(i,i)}$ .

Обратимся теперь к ситуации, когда точки принадлежат к разным кривым, скажем,  $z \in S_1$ , а  $\zeta \in S_2$ . Как показано в цитированных работах, для оператора, действующего из  $C_\kappa(S_2)$  в  $C_\kappa(S_1)$  по формуле

$$(N\mu)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{S_2} \mu(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial n_z} ds,$$

справедлива следующая оценка существенной нормы:

$$|N| \leq \max_{\pm} \frac{\sin \kappa |\pi - \alpha_{\pm}|}{\sin \kappa \pi},$$

где  $\alpha_{\pm} = \beta_{\pm}^{(1)} + \beta_{\pm}^{(2)}$  — угол между односторонними касательными к  $S_1$  и  $S_2$  в точке  $P_{\pm}$ .

Из сказанного вытекают следующие оценки существенных норм:

$$\begin{aligned} |T^{(i,i)}| &\leq \frac{1}{2\sigma + 1} \max_{\pm} \frac{\sin \kappa |\pi - 2\beta_{\pm}^{(i)}|}{\sin \kappa \pi}, \quad i = 1, 2, \\ |T^{(1,2)}| &\leq \frac{2(\sigma + 1)}{2\sigma + 1} \max_{\pm} \frac{\sin \kappa |\pi - \alpha_{\pm}|}{\sin \kappa \pi}, \\ |T^{(2,1)}| &\leq \frac{2\sigma}{2\sigma + 1} \max_{\pm} \frac{\sin \kappa |\pi - \alpha_{\pm}|}{\sin \kappa \pi}. \end{aligned} \tag{118}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^2 |T^{(i,j)}| &\leq \max \left\{ \max_{\pm} \sin \kappa |\pi - 2\beta_{\pm}^{(1)}| + 2\sigma \max_{\pm} \sin \kappa |\pi - \alpha_{\pm}|, \right. \\ &\quad \left. \max_{\pm} \sin \kappa |\pi - 2\beta_{\pm}^{(2)}| + 2(\sigma + 1) \max_{\pm} \sin \kappa |\pi - \alpha_{\pm}| \right\} / [(2\sigma + 1) \sin \kappa \pi], \end{aligned}$$

и, ввиду неравенства (116), доказано следующее утверждение.



**Теорема 2.** Пусть углы  $\beta_{\pm}^{(1)}$  и  $\beta_{\pm}^{(2)}$  таковы, что для  $\kappa \in (0, 1)$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sin \kappa \pi} \max \left\{ \max_{\pm} \sin \kappa |\pi - 2\beta_{\pm}^{(1)}| + 2\sigma \max_{\pm} \sin \kappa |\pi - \alpha_{\pm}|, \right. \\ \left. \max_{\pm} \sin \kappa |\pi - 2\beta_{\pm}^{(2)}| + 2(\sigma + 1) \max_{\pm} \sin \kappa |\pi - \alpha_{\pm}| \right\} < 2\sigma + 1, \quad (119)$$

где  $\alpha_{\pm} = \beta_{\pm}^{(1)} + \beta_{\pm}^{(2)}$ . Тогда в пространстве  $\mathcal{C}_{\kappa}$  оператор  $-\mathbf{I} + \mathbf{T}$  фредгольмов.

Легко видеть, что для всякого  $\beta \in (0, 2\pi)$  и  $\kappa \in (0, 1)$

$$\frac{\sin \kappa |\pi - \beta|}{\sin \kappa \pi} \leq \frac{\kappa \pi}{\sin \kappa \pi} \frac{|\pi - \beta|}{\pi}.$$

Поэтому (119) является следствием неравенства

$$\frac{1}{2\sigma + 1} \max \left\{ \max_{\pm} |1 - 2\beta_{\pm}^{(1)}/\pi| + 2\sigma \max_{\pm} |1 - \alpha_{\pm}/\pi|, \right. \\ \left. \max_{\pm} |1 - 2\beta_{\pm}^{(2)}/\pi| + 2(\sigma + 1) \max_{\pm} |1 - \alpha_{\pm}/\pi| \right\} < \frac{\sin \kappa \pi}{\kappa \pi},$$

в котором  $\kappa$  фигурирует только в правой части.

Рассмотрим случай гладкого тела, когда  $\alpha_{\pm} = \pi$ . При этом условие (119) превращается в

$$\max \left\{ \max_{\pm} \frac{\sin \kappa |\pi - 2\beta_{\pm}^{(1)}|}{\sin \kappa \pi}, \max_{\pm} \frac{\sin \kappa |\pi - 2\beta_{\pm}^{(2)}|}{\sin \kappa \pi} \right\} < 2\sigma + 1,$$

которое выполняется для всякого  $\kappa \in (0, 1)$ , если  $\sigma$  достаточно велико, и для всех  $\sigma \in [0, \infty)$ , когда неравенства

$$\max_{\pm} \frac{\sin \kappa |\pi - 2\beta_{\pm}^{(1)}|}{\sin \kappa \pi} < 1 \quad \text{и} \quad \max_{\pm} \frac{\sin \kappa |\pi - 2\beta_{\pm}^{(2)}|}{\sin \kappa \pi} < 1$$

имеют место одновременно. Каждое из последних неравенств дает ограничение сверху на величину  $\kappa$ , при которой имеет место фредгольмовость оператора  $-\mathbf{I} + \mathbf{T}$  в пространстве  $\mathcal{C}_{\kappa}$ . Ограничение, вытекающее из первого неравенства, совпадает с оценкой (100), в которую нужно подставить  $\beta_{\pm}^{(1)}$  вместо  $\beta_{\pm}$ . Она получена при рассмотрении тела, движущегося в заполненном однородной жидкостью верхнем слое по его твердому дну. Второе ограничение отличается от первого тем, что  $\beta_{\pm}^{(2)}$  фигурирует вместо  $\beta_{\pm}$ . Оно было получено в § 8.1.4.1 книги [11] для частично погруженного тела, движущегося в однородной жидкости бесконечной глубины; при этом  $\beta_{\pm}^{(2)}$  — углы между контуром тела и свободной поверхностью.

### 7.3 Разрешимость задачи

Пусть углы  $\beta_{\pm}^{(1)}$  и  $\beta_{\pm}^{(2)}$  таковы, что оператор  $-I + T$  фредгольмов в пространстве  $\mathcal{C}_{\kappa}$  при некотором  $\kappa \in (0, 1)$  (см. Теорему 2). Воспользуемся голоморфностью оператор-функции  $A_{(\nu, \sigma)} = -I + T$  в областях  $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}^2$ , которые являются окрестностями лежащих в  $\mathbb{R}^2$  областей  $D_1^*$  и  $D_2^*$ ; описание последних дано в § 2.6 (см., в частности, рис. 2). Поскольку параметров два, то в отличие от § 6.2 будут применены результаты работ [47, 48]; в первой из них приведены только формулировки, а вторая содержит подробные доказательства. Другое отличие от § 6.2 заключается в использовании нефизических значений параметров принадлежащих  $D_1^*$  и  $D_2^*$ ; ранее один из авторов прибег к этому приему в работе [27]. Напомним некоторые сведения из [47, 48] и сформулируем вытекающие из них следствия применительно к нашей задаче.

Точка  $(\nu, \sigma)$  называется характеристической для оператора  $A_{(\nu, \sigma)}$  (принадлежит  $\Upsilon_i \subset D_i, i = 1, 2$ ), если размерность его ядра положительна в этой точке. Поскольку согласно Теореме 2 индекс оператора  $A_{(\nu, \sigma)}$  равен нулю, то множества  $\Upsilon_i$  являются аналитическими множествами в  $D_i$ . Более того, согласно теореме 3 [48] множество  $\Upsilon_i$  либо совпадает с  $D_i$ , либо есть локально главное аналитическое множество в  $D_i$ . Последнее означает, что для каждой точки  $a \in D_i$  можно указать окрестность  $P_a \subset D_i$  и аналитическую функцию  $q_a(\nu, \sigma)$ , такие что  $\Upsilon_i \cap P_a$  совпадает с множеством нулей функции  $q_a(\nu, \sigma)$  (см. [49, гл. 1, § 2.6]). Наконец, если  $\Upsilon_i \neq D_i$ , то это множество нигде не плотно в области  $D_i$  (см. [49, гл. 1, § 2.2]).

Таким образом, последнее свойство верно, если в  $D_i$  есть хотя бы одна точка  $(\nu h, \sigma)$  такая, что оператор  $A_{(\nu, \sigma)}^{-1}$  ограничен. Чтобы установить наличие такой точки в каждой из областей  $D_i, i = 1, 2$ , рассмотрим пары  $(\nu, 0)$ . Действительно, при  $\sigma = 0$  интегро-алгебраическая система (111) распадается таким образом, что только в первом ее уравнении (см. (121) ниже) присутствуют все четыре неизвестные, а последние три уравнения согласно формулам (11), (14), (113) и (114) превращаются в систему

$$\left[ -I + T_{(\nu, 0)}^{(2)} \right] M^{(2)} = F^{(2)} \quad (120)$$

для вектора  $M^{(2)} = (\mu^{(2)}, \mu_+, \mu_-)^T$ , где  $F^{(2)} = (2f^{(2)}, d_+, d_-)^T$ , а матрица оператора  $T_{(\nu, 0)}^{(2)}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathring{T}^{(2,2)} & \mathring{N}_+^{(2)} & \mathring{N}_-^{(2)} \\ \mathring{T}_+^2 & \mathring{c}_{11} & \mathring{c}_{12} \\ \mathring{T}_-^2 & \mathring{c}_{21} & \mathring{c}_{22} \end{pmatrix}.$$

Ее элементами являются интегральный оператор

$$\left[ \overset{\circ}{T}^{(2,2)} \mu^{(2)} \right] (z) = \int_{S^{(2)}} \mu^{(2)}(\zeta) \frac{\partial G^{(2)}}{\partial n_z}(z, \zeta) ds_\zeta, \quad z \in S^{(2)},$$

два оператора умножения на функцию ( $\overset{\circ}{N}_\pm^{(2)}$  умножает на  $2 \partial_{n_z} G^{(2)}(z, \pm a)$ ), числа  $\overset{\circ}{c}_{ij} = \partial_x G^{(2)}((-1)^{i+1}a, (-1)^{j+1}a)$  и функционалы

$$\overset{\circ}{T}_\pm^2 \mu^{(2)} = \int_{S^{(2)}} \mu^{(2)}(\zeta) \partial_x G^{(2)}(\pm a, \zeta) ds_\zeta.$$

Наконец,  $I$  — тождественный оператор в  $C_\kappa(S^{(2)}) \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .

При этом оказывается, что

$$\begin{aligned} G^{(2)}(z; \zeta) = G_{(0,\nu)}^{(2,2)}(z; \zeta) = & -(2\pi)^{-1} (\log |z - \zeta| + \log |z - \bar{\zeta}|) - \\ & - \pi^{-1} \int_0^\infty \frac{e^{k(y+\eta)} \cos k(x - \xi)}{k - \nu} dk - e^{\nu(y+\eta)} \sin \nu(x - \xi) \end{aligned}$$

является функцией Грина задачи Неймана–Кельвина для однородной жидкости бесконечной глубины. Последнее означает, что система (120) есть не что иное как интегро-алгебраическая система, изученная в работе [31] (см. также § 8.1 книги [11]), где рассматривалась разрешимость задачи о движении тела, частично погруженного в однородную жидкость бесконечной глубины с дополнительными условиями вида  $u_x(P_+) = d_+$  и  $u_x(P_-) = d_-$ . Доказано, что условия, наложенные в начале параграфа на  $\beta_\pm^{(2)}$ , гарантируют фредгольмовость оператора этой системы и существование ограниченного оператора

$$\left[ -I + T_{(\nu,0)}^{(2)} \right]^{-1}$$

для всех значений  $\nu$  за исключением некоторой (возможно пустой) последовательности с точкой сгущения на бесконечности. Таким образом, можно выбрать одну такую точку (скажем,  $\nu_1$ ) на интервале  $(0, h^{-1})$ , в силу чего  $(\nu_1 h, 0) \in D_1$ . Выбор другой точки (скажем,  $\nu_2$ ), лежащей на  $(h^{-1}, \infty)$ , будет сделан позже.

Решение системы (120) при  $\nu = \nu_1$ , т.е.

$$M^{(2)} = \left[ -I + T_{(\nu_1,0)}^{(2)} \right]^{-1} F^{(2)},$$

подставим в первое уравнение системы (111), и получим интегральное уравнение для  $\mu^{(1)}$ :

$$\left[ -I + T_{(\nu_1,0)}^{(1,1)} \right] \mu^{(1)} = 2f^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)} M^{(2)}, \quad (121)$$

где

$$\left[ T_{(\nu_1, 0)}^{(1,1)} \mu^{(1)} \right] (z) = \int_{S^{(1)}} \mu^{(1)}(\zeta) \frac{\partial G^{(1)}}{\partial n_z}(z, \zeta) \, ds_\zeta,$$

функция  $G^{(1)}(z, \zeta)$  определяется формулой (92), в которой  $\nu = \nu_1$ , а оператор в последнем члене имеет следующий вид:

$$\mathbf{T}^{(2)} = \left( \overset{\circ}{T}^{(1,2)}, \overset{\circ}{N}_+^{(1)}, \overset{\circ}{N}_-^{(1)} \right)^\top.$$

Здесь  $\overset{\circ}{T}^{(1,2)}$  и  $\overset{\circ}{N}_\pm^{(2)}$  — это операторы  $T_{(\nu_1, \sigma)}^{(1,2)}$  и  $N_\pm^{(2)}$  соответственно, в которых  $\sigma = 0$ .

Уравнение (121) лишь видом правой части отличается от уравнения (99), исследованного в § 6, где доказана его однозначная разрешимость при всех значениях  $\nu < h^{-1}$ . Тем самым, установлено, что оператор  $\mathbf{A}_{(\nu, \sigma)}$  обратим при  $(\nu h, \sigma) = (\nu_1 h, 0)$ , а значит, всюду в  $D_1$  за исключением некоторого нигде не плотного множества.

Аналогичные рассуждения показывают, что оператор  $\mathbf{A}_{(\nu, \sigma)}$  обратим всюду в  $D_2$  за исключением некоторого нигде не плотного множества. Однако при выборе значения  $\nu_2$  на  $(h^{-1}, \infty)$  следует исключить ту (возможно пустую) последовательность значений (ее единственной возможной точкой сгущения является  $h^{-1}$ ), для которой отсутствует разрешимость уравнения (99). Таким образом, доказано следующее утверждение, в формулировке которого мы ограничимся физически оправданными значениями параметров  $\nu$  и  $\sigma$ .

**Теорема 3.** Пусть углы  $\beta_\pm^{(1)}$  и  $\beta_\pm^{(2)}$  таковы, что для  $\kappa \in (0, 1)$  выполняется неравенство (119). Тогда в пространстве  $\mathcal{C}_\kappa$  единственное решение интеграл-алгебраической системы (111) существует для всех  $(\nu h, \sigma) \in D_i^* \cap \{\sigma > 0\}$  ( $i = 1, 2$ ) за исключением нигде не плотных (возможно пустых) аналитических множеств.

Из этой теоремы и свойств потенциалов (106) вытекает

**Теорема 4.** Если неравенство (119) выполняется для некоторого  $\kappa \in (0, 1)$ , то задача (1)–(7), дополненная условиями (84), имеет решение для всех значений параметров  $(\nu h, \sigma) \in D_i^* \cap \{\sigma > 0\}$  ( $i = 1, 2$ ) за исключением нигде не плотных (возможно пустых) аналитических множеств.

Согласно свойствам аналитических множеств, т.е. множеств заданных локально как множества общих нулей конечных наборов аналитических функций (см. [49]), исключительные множества, фигурирующие в этих теоремах, могут состоять только из изолированных точек, замкнутых кривых и кривых, конечные точки которых находятся на границах областей  $D_i^*$ .

## 8 О единственности решения задачи с дополнительными условиями

Покажем, что, если решение задачи (1)–(7) с дополнительными условиями (84) существует для всех  $(\nu h, \sigma) \in D_i^* \cap \{\sigma > 0\}$  ( $i = 1, 2$ ) за исключением нигде не плотных (возможно пустых) аналитических множеств, то с точностью до произвольных аддитивных констант оно единственно для всех значений параметров в  $D_i^* \cap \{\sigma > 0\}$  с аналогичными исключениями аналитических множеств. Для этой цели воспользуемся методом, предложенным в работе [31] (см. также § 8.1.7 книги [11]).

Рассмотрим задачу с дополнительными условиями (84) о движении того же тела в противоположном направлении. Пара функций  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$ , составляющих ее решение, удовлетворяет всем условиям исходной задачи (см. (1)–(7)) за исключением второго условия (6), которое следует заменить следующим:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |\nabla u^{(i)}| = 0$  ( $i = 1, 2$ ). Кроме того, условие (5) мы будем писать в виде

$$\partial u^{(i)} / \partial n = f^{(i)} \quad \text{на } S^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (122)$$

Очевидно, что для этой задачи рассуждения предыдущего параграфа остаются в силе, и решение, когда оно существует, получается в виде (106), где  $G^{(i,j)}$  нужно заменить на  $'G^{(i,j)}$  — функцию Грина задачи с обратным направлением движения (см. § 2.2).

Дословно повторяя рассуждения § 4, получаем следующее представление:

$$u_0^{(i)}(z) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Pi^{(j)}} \sigma'^{(j)}(\xi, \eta) 'G^{(i,j)}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + c'^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (123)$$

где области  $\Pi^{(j)}$  были введены в § 4, а  $c'^{(1)}$  и  $c'^{(2)}$  — некоторые постоянные. Функции  $u_0^{(i)}$  и  $u^{(i)}$  совпадают в  $W^{(i)} \setminus \Pi^{(j)}$ , и первая из них удовлетворяет соотношению

$$-\nabla^2 u_0^{(i)} = \sigma'^{(i)} \quad \text{в } L^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (124)$$

где  $\sigma'^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , — бесконечно-дифференцируемые функции такие, что  $\sigma'^{(i)} = 0$  в  $W^{(i)} \setminus \Pi$ .

Используя представления (77) и (123), уравнения (73) и (124), а также

соотношения (21), связывающие функции Грина  $G^{(i,j)}$  и  $'G^{(i,j)}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \rho_i \int_{\Pi^{(i)}} \left[ \bar{u}_0^{(i)} \nabla^2 \bar{u}'_0^{(i)} - \bar{u}'_0^{(i)} \nabla^2 \bar{u}_0^{(i)} \right] dx dy = \\ & = \sum_{i=1}^2 \rho_i \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{\Pi^{(i)}} \sigma^{(i)}(x, y) dx dy \int_{\Pi^{(j)}} \sigma'^{(j)}(\xi, \eta) 'G^{(i,j)}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta - \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Pi^{(i)}} \sigma'^{(i)}(x, y) dx dy \int_{\Pi^{(j)}} \sigma^{(j)}(\xi, \eta) G^{(i,j)}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \right\} = 0, \quad (125) \end{aligned}$$

где  $\bar{u}_0^{(i)} = u_0^{(i)} - c^{(i)}$ ,  $\bar{u}'_0^{(i)} = u'_0^{(i)} - c'^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  (т.е. для потенциалов  $u_0^{(i)}$ ,  $u'_0^{(i)}$  аддитивные постоянные зафиксированы). Очевидно, что при дифференцировании фиксация констант не важна, но для упрощения обозначений это обстоятельство далее не используется.

Применяя формулу Грина и учитывая равенство (125), приходим к соотношению

$$0 = \sum_{i=1}^2 \rho_i \int_{\partial\Pi^{(i)}} \left[ \bar{u}'_0^{(i)} \partial_n \bar{u}_0^{(i)} - \bar{u}_0^{(i)} \partial_n \bar{u}'_0^{(i)} \right] ds, \quad (126)$$

где нормаль направлена во внешность области  $\Pi^{(i)}$ . Рассмотрим входящие в эту формулу интегралы по интервалу  $(-b, b)$  (эта часть интерфейса, т.е.  $\{y = 0\} \cap \bar{\Pi}$ , обозначалась  $(b_-, b_+)$  в § 4). Положим

$$I_j = (-1)^j \rho_j \int_{-b}^b \left[ \bar{u}'_0^{(j)} \partial_y \bar{u}_0^{(j)} - \bar{u}_0^{(j)} \partial_y \bar{u}'_0^{(j)} \right]_{y=0} dx,$$

где учтено, что на верхней (нижней) стороне интерфейса  $\partial_n = -\partial_y$  ( $\partial_n = \partial_y$ ). Таким образом, вклад в правую часть (126) от интегралов по интерфейсу равен  $I_1 + I_2$ .

Используя равенства

$$\begin{aligned} \partial_y \bar{u}_0^{(1)}(x, 0) &= \partial_y \bar{u}_0^{(2)}(x, 0) = \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \left[ \rho_1 \partial_x^2 \bar{u}_0^{(1)}(x, 0) - \rho_2 \partial_x^2 \bar{u}_0^{(2)}(x, 0) \right], \\ \partial_y \bar{u}'_0^{(1)}(x, 0) &= \partial_y \bar{u}'_0^{(2)}(x, 0) = \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \left[ \rho_1 \partial_x^2 \bar{u}'_0^{(1)}(x, 0) - \rho_2 \partial_x^2 \bar{u}'_0^{(2)}(x, 0) \right]. \end{aligned}$$

в выражениях для  $I_1$  и  $I_2$ , находим, что

$$I_j = \frac{(-1)^j \rho_j}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \int_{-b}^b \left[ \bar{u}'_0^{(j)} (\rho_1 \partial_x^2 \bar{u}_0^{(1)} - \rho_2 \partial_x^2 \bar{u}_0^{(2)}) - \bar{u}_0^{(j)} (\rho_1 \partial_x^2 \bar{u}'_0^{(1)} - \rho_2 \partial_x^2 \bar{u}'_0^{(2)}) \right]_{y=0} dx.$$

Отсюда следует

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} \int_{-b}^b [\bar{\Delta}_0 \partial_x^2 \bar{\Delta}'_0 - \bar{\Delta}'_0 \partial_x^2 \bar{\Delta}_0] dx,$$

где  $\bar{\Delta}_0(x) = \rho_1 \bar{u}_0^{(1)}(x, 0) - \rho_2 \bar{u}_0^{(2)}(x, 0)$ ,  $\bar{\Delta}'_0(x) = \rho_1 \bar{u}'_0^{(1)}(x, 0) - \rho_2 \bar{u}'_0^{(2)}(x, 0)$ , откуда интегрированием по частям получаем

$$\frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} [\bar{\Delta}_0 \partial_x \bar{\Delta}'_0 - \bar{\Delta}'_0 \partial_x \bar{\Delta}_0]_{x=-b}^{x=b} = \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} [\bar{\Delta} \partial_x \bar{\Delta}' - \bar{\Delta}' \partial_x \bar{\Delta}]_{x=-b}^{x=b}, \quad (127)$$

где последнее равенство является следствием определения функций  $u_0^{(i)}$ ,  $u_0^{\prime(i)}$ , а  $\bar{\Delta}(x) = \rho_1 \bar{u}^{(1)}(x, 0) - \rho_2 \bar{u}^{(2)}(x, 0)$ ,  $\bar{\Delta}'(x) = \rho_1 \bar{u}'^{(1)}(x, 0) - \rho_2 \bar{u}'^{(2)}(x, 0)$ .

Поскольку

$$0 = \sum_{j=1}^2 \rho_j \int_{\Pi^{(j)} \setminus B^{(j)}} [\bar{u}^{(j)} \nabla^2 \bar{u}'^{(j)} - \bar{u}'^{(j)} \nabla^2 \bar{u}^{(j)}] dx dy,$$

то согласно формуле Грина имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \rho_j \int_{S^{(j)}} [\bar{u}^{(j)} \partial_n \bar{u}'^{(j)} - \bar{u}'^{(j)} \partial_n \bar{u}^{(j)}] ds + \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} [\bar{\Delta} \partial_x \bar{\Delta}' - \bar{\Delta}' \partial_x \bar{\Delta}]_{x=-a}^{x=a} = \\ & = \sum_{j=1}^2 \rho_j \int_{\partial \Pi \cap L^{(j)}} [\bar{u}^{(j)} \partial_n \bar{u}'^{(j)} - \bar{u}'^{(j)} \partial_n \bar{u}^{(j)}] ds + \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} [\bar{\Delta} \partial_x \bar{\Delta}' - \bar{\Delta}' \partial_x \bar{\Delta}]_{x=-b}^{x=b}, \end{aligned}$$

где на  $S$  и  $\partial \Pi$  нормаль внешняя относительно  $B$  и  $\Pi$ ; здесь использован также прием интегрирования по частям на отрезках  $\{(x, y) : |x| \in (a, b), y = 0\}$ .

Объединяя последнее равенство и (126) и учитывая формулу (127) для  $I_1 + I_2$ , приходим к соотношению

$$0 = \sum_{j=1}^2 \rho_j \int_{S^{(j)}} [\bar{u}^{(j)} \partial_n \bar{u}'^{(j)} - \bar{u}'^{(j)} \partial_n \bar{u}^{(j)}] ds + \frac{1}{\nu(\rho_2 - \rho_1)} [\bar{\Delta} \partial_x \bar{\Delta}' - \bar{\Delta}' \partial_x \bar{\Delta}]_{x=-a}^{x=a}.$$

Пусть  $\bar{u}^{(i)}$  — решение однородной задачи (1)–(7) с однородными дополнительными условиями (85), а задача с противоположным направлением потока разрешима, и  $\bar{u}'$  — ее решение для  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = 0$  и однородных дополнительных условий (85). Тогда согласно последнему соотношению

$$\int_{S^{(1)}} \bar{u}^{(1)} f' ds = 0,$$

откуда ввиду произвольности  $f'$  получаем, что  $\bar{u}^{(1)} = 0$  на  $S^{(1)}$ , где также имеет место равенство  $\partial_n \bar{u}^{(1)} = 0$ . Тогда из теоремы о единственности решения задачи Коши для уравнения Лапласа следует, что  $\bar{u}^{(1)} = 0$  в  $W^{(1)}$ . Аналогично, при помощи решения, для которого  $f^{(2)} = f'$  и  $f^{(1)} = 0$ , получается, что  $\bar{u}^{(1)} = 0$  в  $W^{(1)}$ .

Учитывая Теорему 4, доказана

**Теорема 5.** *Если неравенство (119) выполняется для некоторого  $\kappa \in (0, 1)$ , то задача (1)–(7), дополненная условиями (84), имеет единственное решение для всех значений параметров  $(\nu h, \sigma) \in D_i^* \cap \{\sigma > 0\}$  ( $i = 1, 2$ ) за исключением нигде не плотных (возможно пустых) аналитических множеств.*

## Список литературы

- [1] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1932.
- [2] A. S. Peters, J. J. Stoker, *The motion of a ship, as a floating rigid body, in a seaway*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 399–490.
- [3] J. J. Stoker, *Water waves. The mathematical theory with applications*. New York, Intersci. Publ., 1957.
- [4] J. V. Wehausen, E. V. Laitone, *Surface waves*, Handbuch der Physik **9** (1960), 446–778, Springer, Berlin.
- [5] А. А. Костюков, *Теория корабельных волн и волнового сопротивления*, Судпромгиз, Л., 1959.
- [6] Л. Н. Сретенский, *Теория волновых движений жидкости*, Наука, М., 1977.
- [7] J. N. Newman, *Marine hydrodynamics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1977.
- [8] J. N. Newman, *The theory of ship motions*, Adv. Appl. Mech. **18** (1978), 221–283.
- [9] В. Е. Веденьков, Г. В. Смирнов, Т. Н. Борисов, *Динамика поверхностных и внутренних корабельных волн*, Дальнаука, Владивосток, 1999.
- [10] В. В. Васильева, С. В. Шкадова, *Внутренние волны*, СПбГМТУ, СПб., 2001.
- [11] N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear water waves: A mathematical approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.



- [12] C. D. Pagani, D. Pierotti, *Exact solution of the wave-resistance problem for a submerged cylinder. II. The nonlinear problem*, Arch. Rat. Mech. Anal. **149** (1999), 289–327.
- [13] C. D. Pagani, D. Pierotti, *On solvability of the nonlinear wave-resistance problem for a surface-piercing symmetric cylinder*, SIAM J. Math. Anal. **32** (2000), 214–233.
- [14] C. D. Pagani, D. Pierotti, *The forward motion of an unsymmetric surface-piercing cylinder: the solvability of nonlinear problem in the supercritical case*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **54** (2001), 1–22.
- [15] C. D. Pagani, D. Pierotti, *The subcritical motion of a semisubmerged body: solvability of the free-boundary problem*, SIAM J. Math. Anal. **36** (2004), 69–93.
- [16] V. Duchene, *Asymptotic models for the generation of internal waves by a moving ship, and the dead-water phenomenon*, Nonlinearity **24** (2011), 2281–2323.
- [17] M. Mercier, R. Vasseur, T. Dauxois, *Resurrecting dead-water phenomenon*, Nonlinear Processes Geophys. **18** (2011), 193–208.
- [18] R. W. Yeung, T. C. Nguyen, *Waves generated by a moving source in a two-layer ocean of finite depth*, J. Eng. Math. **35** (1999), 85–107.
- [19] T. Miloh, M. Tulin, and G. Zilman, *Dead-water effects of a ship moving in stratified seas*, J. Offshore Mech. Arct. Eng. **115** (1993), 105–110.
- [20] V. W. Ekman, *On dead water*, Scientific Results of the Norwegian North Polar Expedition, **5**. Christiania, 1904, 1–152.
- [21] Л. Н. Сретенский, *О волнах на поверхности раздела двух жидкостей с применением к явлению “мертвой воды”*, Журн. геофизики **4** (1934), 332–370.
- [22] Л. Н. Сретенский, *О волновом сопротивлении корабля при наличии внутренних волн*, Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. No 1 (1959), 56–63.
- [23] П. Н. Успенский, *О волновом сопротивлении корабля при наличии внутренних волн (в условиях конечной глубины)*, Труды Морск. гидрофиз. ин-та **18** (1959), 68–85.
- [24] В. А. Городцов, Э. В. Теодорович, *К теории волнового сопротивления (поверхностные и внутренние волны)*, Н. Е. Кочин и развитие механики, Наука, М., 1984.

- [25] Ю. А. Степанянц, И. В. Стурова, Э. В. Теодорович, *Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн*, Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. **21** (1987), 93–179. ВИНТИ, М.
- [26] O. Motygin, N. Kuznetsov, *The wave resistance of a two-dimensional body moving forward in a two-layer fluid*, J. Eng. Math. **32** (1997), 53–72.
- [27] О. В. Мотыгин, *Разрешимость граничных интегральных уравнений для задачи о движении тела в двухслойной жидкости*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **43** (2003), 279–286.
- [28] O. Motygin, N. Kuznetsov, *On the forward motion of an interface-crossing body in a two-layer fluid: the role of asymptotics in problem's statement*, J. Eng. Math. **69** (2011), 113–134.
- [29] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*. М.: Наука, 1991. 336 с.
- [30] S. Nicaise, A. M. Sändig, *General interface problems. 1, 2*. Math. Meth. Appl. Sci. **17** (1994), 395–450.
- [31] Н. Г. Кузнецов, В. Г. Мазья, *Об однозначной разрешимости плоской задачи Неймана-Кельвина*. Мат. сборник **135** (1988) 440–462.
- [32] G. A. Anastassiou, S. S. Dragomir, *On some estimates of the remainder in Taylor's formula*. J. Math. Analysis and Applications. **263** (2001), 246–263.
- [33] Б. Р. Вайнберг, В. Г. Мазья, *К плоской задаче о движении погруженного в жидкость тела*. Труды Моск. мат. общества. **28** (1973), 35–56.
- [34] F. Ursell, *Mathematical note on the two-dimensional Kelvin–Neumann problem*. Proc. 13<sup>th</sup> Symp. Naval Hydrodynamics (Tokyo, 1980). Shipbuild. Res. Assoc. Japan (1981), 245–251.
- [35] K. Suzuki, *Numerical studies of the Neumann–Kelvin problem for a two-dimensional semisubmerged body*, Proceedings of the Third International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. Paris: Bassin d'Essais des Carènes, 1982, pp. 83–95.
- [36] O. Motygin, N. Kuznetsov, *The problem of steady flow over a two-dimensional bottom obstacle*, In: Around the Research of Vladimir Maz'ya II, Partial Differential Equations (ed. A. Laptev). N. Y.: Springer Sci., 2010, pp. 253–274.
- [37] O. V. Motygin, *Uniqueness and solvability in the linearized two-dimensional problem of a body in a finite depth subcritical stream*. Euro. J. Appl. Math. **10** (1999), 141–156.

- [38] D. Lahalle, *Calcul des efforts sur un profil portant d'hydroptère par couplage éléments finis — représentation intégrale*. Rapport de Recherche. **187**. Paris: ENSTA, 1984.
- [39] N. M. Wigley, *Mixed boundary value problems in plane domains with corners*, Math. Z. **115** (1970), 33–52.
- [40] В. Г. Мазья, *Граничные интегральные уравнения*. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. **27** (1988), 132–228. ВИНТИ, М.
- [41] T. Carleman, *Über das Neumann-Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken*. Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1916. 195 S.
- [42] P. Werner, *A Green's function approach to the potential flow around obstacles in a two-dimensional channel*. Methoden und Verfahren der math. physik. Bd. **37** (1991), Frankfurt am Main et al.: P. Lang.
- [43] В. П. Трофимов, *О корневых подпространствах операторов, аналитически зависящих от параметра*. Матем. исслед. **3**(9) (1968), 117–125.
- [44] O. V. Motygin, P. McIver, *A uniqueness criterion for linear problems of wave-body interaction*. IMA J. Appl. Math. **68** (2003), 229–250.
- [45] А. Н. Канатников, А. П. Крищенко, *Линейная алгебра*. М., МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 336 с.
- [46] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
- [47] С. Г. Крейн, В. П. Трофимов, *О голоморфных оператор-функциях нескольких комплексных переменных*. Функц. анализ и его приложения. **3**(4) (1969), 85–86.
- [48] С. Г. Крейн, В. П. Трофимов, *О нётеровых операторах, голоморфно зависящих от параметров*. Труды Мат. факультета ВГУ, Труды семинара по функц. анализу. Сб. статей по функц. пространствам и операторным уравнениям. Воронеж, 1970. С. 63–85.
- [49] Е. М. Чирка, *Комплексные аналитические множества*. М.: Наука, 1985.