ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2018
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Стохастические дифференциальные уравнения
Моделирование динамических систем

УДК 519.21+517.521.5

Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича второй кратности, основанное на двойных рядах Фурье-Лежандра, суммируемых по Принсхейму

Кузнецов Д.Ф.

Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
e-mail: sde_kuznetsov@inbox.ru

Аннотация

Статья посвящена разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича 2 кратности в двойные ряды из стандартных гауссовских случайных величин. Доказательство разложения основано на применении двойных рядов Фурье-Лежандра, суммируемых по Присхейму. Результаты статьи могут быть применены к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Ключевые слова: повторный стохастический интеграл Стратоновича, двойной ряд Фурье-Лежандра, разложение, сходимость.

Abstract

The article is devoted to the expansion of multiple Stratonovich stochastic integrals of 2nd multiplicity into double series of standard Gaussian random variables. The proof of the expansion is based on application of double Fourier-Legendre series, summarized by Prinsheim method. The results of the article can be applied to numerical integration of Ito stochastic differential equations.

Key words: multiple Stratonovich stochastic integral, double Fourier-Legendre series, expansion, convergence.

1 Введение

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathsf{F}, \mathsf{P})$, неубывающая совокупность σ-алгебр $\{\mathrm{F}_t, t \in [0, T]\}$ на нем и F_t-измеримый при всех $t \in [0, T]$ m-мерный стандартный винеровский процесс $\mathbf{f}_t$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int\limits_0^t B(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_\tau \in \Re^n$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (1); второй интеграл в правой части (1) понимается как стохастический интеграл Ито; $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, $B(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n \times m}$ — измеримые при всех $(\mathbf{x}, t) \in \Re^n \times [0, T]$ функции, для которых существует правая часть (1) и которые удовлетворяют стандартным условиям существования и единственности сильного решения $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ уравнения (1) [1]; $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ $(t > 0)$ предполагаются независимыми, причем $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ — F_0-измеримая случайная величина, для которой $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$; M — оператор математического ожидания.

Хорошо известно [2] – [4], [6], [7], что одним из перспективных подходов к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито является подход, основанный на стохастических аналогах формулы Тейлора для решений данных уравнений. Важнейшей отличительной особенностью стохастических аналогов формулы Тейлора для решений стохастических дифференциальных уравнений Ито является присутствие в них, так называемых, повторных стохастических интегралов Ито или Стратоновича, имеющих следующий вид:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \tag{2}$$

(интегралы Ито),

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \qquad (3)$$

(интегралы Стратоновича),

где $\psi_l(\tau)$ $(l = 1, \ldots, k)$ — весовые неслучайные функции (в приложениях, как правило, тождественно равные единице [2] – [5] или имеющие биномиальный вид [7] – [9]); $\mathbf{w}_\tau$ — случайный вектор с $m+1$ компонентой вида: $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$; числа $i_1, \ldots, i_k$ принимают значения $0,\ 1, \ldots, m$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ — независимые стандартные винеровские процессы; k — кратность повторного стохастического интеграла.

Таким образом, системы повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича играют довольно важную роль при решении проблемы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Достаточно важно, чтобы при построении методов среднеквадратической аппроксимации стохастических интегралов из семейств (2), (3) величина $T-t$ не подвергалась дроблению, поскольку $T-t$ играет роль шага интегрирования в численных методах для стохастических дифференциальных уравнений Ито, который является достаточно малой величиной.

В связи с этим отметим здесь метод среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов, предложенный Мильштейном Г.Н. [2] (1988) и основанный на тригонометрическом разложении винеровского процесса в ряд по системе стандартных гауссовских случайных величин (см. также [10] (1992)).

Другой метод среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанный на их представлении в виде кратных стохастических интегралов от неслучайных функций нескольких переменных и последующем разложении данных функций с помощью рядов Фурье с целью получения эффективных среднеквадратических аппроксимаций представлен в ряде работ автора. В частности, впервые данный подход появился в [11] (1994). Отметим, что в [11] использовались кратные ряды Фурье по тригонометрической системе функций, сходящиеся в среднем. Следует также заметить, что результаты работы [11] верны для достаточно узкого частного случая, когда числа $i_1, \ldots, i_k$ попарно различны; $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$. Применение рядов Фурье-Лежандра к аппроксимации повторных стохастических интегралов впервые встречается в [12] (1997), [13] (1998) и [14] (2000). Использование полиномов Лежандра в данной области продиктовано прежде всего тем, что разложения, получающиеся с их помощью, оказываются существенно проще своих аналогов, основанных на тригонометрических рядах Фурье. Отметим, что подход из работы [11] в окончательном варианте (теорема 1 в настоящей работе) был сформулирован и обоснован автором в монографии [15] (2006).

В работе [12] было замечено, что существует взаимосвязь множителя 1/2, присущего стохастическому интегралу Стратоновича и входящего в слагаемое, связывающее стохастические интегралы Стратоновича и Ито, и того факта, что в точке конечного разрыва кусочно-гладкой функции $f(x)$ ее ряд Фурье сходится к величине $(f(x-0)+f(x+0))/2$. Данная идея получила развитие в последующих работах автора [16] (2010), [17] (2011), [18] (2013) и [7], [19] (2017), где был сформулирован и доказан ряд теорем о разложении повторных стохастических интегралов Стратоновича 1–4 кратностей при различных условиях гладкости весовых функций и различных способах суммирования кратных рядов Фурье. В указанных работах применялось сочетание кратных рядов Фурье, сходящихся в среднем в пространстве $L_2([t,T]^k)$ (k — кратность стохастического интеграла) с однократными рядами Фурье кусочно-гладких функций, сходящихся равномерно на замкнутых интервалах их гладкости. При этом в качестве систем базисных функций выбирались системы полиномов Лежандра и тригонометрических функций.

В настоящей работе применены двойные ряды Фурье-Лежандра, суммируемые по Принсхейму в квадрате $[t,T]^2$, к разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича 2 кратности. Приводится другое доказательство теоремы из [7] (теорема 5.3, С. A.292) или [17] (теорема 3, С. 57), при этом удается ослабить условие гладкости весовых функций со второго порядка до первого.

2 Разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности k

Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система непрерывных функций в пространстве $L_2([t,T])$, а функции $\psi_1(\tau),\ldots,\psi_k(\tau)$ непрерывны на интервале $[t,T]$. Введем в рассмотрение следующую функцию

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\begin{cases}\psi_1(t_1)\ldots\psi_k(t_k),\ t_1<\ldots<t_k\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases};\ t_1,\ldots,t_k\in[t,T].$$

Функция $K(t_1,\ldots,t_k)$ кусочно-непрерывна в гиперкубе $[t,T]^k$. В этой ситуации хорошо известно, что кратный ряд Фурье функции $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2([t,T]^k)$ сходится в гиперкубе в смысле среднего квадратического, т.е.:

$$\lim_{p_1,\ldots,p_k\to\infty}\left\|K(t_1,\ldots,t_k)-\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)\right\|=0, \tag{4}$$

где

$$\|f\|=\left(\int\limits_{[t,T]^k}f^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k\right)^{1/2}$$

и имеет место равенство Парсеваля:

$$\int\limits_{[t,T]^k}K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k=\lim_{p_1,\ldots,p_k\to\infty}\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C^2_{j_k\ldots j_1}, \tag{5}$$

где коэффициент Фурье $C_{j_k\ldots j_1}$ имеет вид:

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_{[t,T]^k}K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k. \tag{6}$$

Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ промежутка $[t,T]$ такое, что

$$t=\tau_0<\ldots<\tau_N=T,\ \Delta_N=\max_{0\le j\le N-1}\Delta\tau_j\to 0\ \text{при}\ N\to\infty, \tag{7}$$

где $\Delta\tau_j=\tau_{j+1}-\tau_j$.

Теорема 1 (2006) [15] (см. также [7], [16], [19]). *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\psi_i(\tau);\ i=1,\ 2,\ldots,k$ — *непрерывные на промежутке* $[t,T]$ *функции;*

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *полная ортонормированная система непрерывных функций в пространстве* $L_2([t,T])$.

Тогда повторный стохастический интеграл Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ *вида* (2) *разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{p_1,\ldots,p_k\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{k}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\phi_{j_k}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}\Biggr), \qquad (8)$$

где l.i.m. *— предел в среднеквадратическом смысле*;

$$\mathcal{G}_k = \mathcal{H}_k\backslash\mathcal{L}_k,\ \mathcal{H}_k = \{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k = 0,\ 1,\ldots,N-1\},$$

$$\mathcal{L}_k = \{(l_1,\ldots,l_k): l_1,\ldots,l_k = 0,\ 1,\ldots,N-1; l_g\neq l_r (g\neq r); g,r = 1,\ldots,k\},$$

$$\zeta_j^{(i)} = \int\limits_t^T \phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(i)}$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных i *или* j *(если* $i\neq 0$*)*, $\Delta\mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)} = \mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)} - \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}$ $(i = 0,\ 1,\ldots,m)$, $\{\tau_j\}_{j_l=0}^{N-1}$ *— разбиение промежутка* $[t,T]$, *удовлетворяющее условию* (7).

Приведем в несколько преобразованной форме частные случаи теоремы 1 при $k = 1,2,3$ [15] (в [16] также рассмотрены случаи $k = 4,5,6,7$ и случай произаольного k, $k\in N$):

$$\int\limits_t^T \psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}, \qquad (9)$$

$$\int\limits_t^T \psi_2(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} = \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\Bigl(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\Bigr), \qquad (10)$$

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\Bigl(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\Bigr), \qquad (11)$$

где $\mathbf{1}_A$ — индикатор A.

3 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича второй кратности

В работах [7], [17], [19] было замечено, что при определенных условиях гладкости, налагаемых на функции $\psi_1(\tau)$ и $\psi_2(\tau)$, справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}, \tag{12}$$

где $C_{j_1 j_1}$ определяется формулой (6) при $k=2,\ j_1=j_2$, а $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полные ортонормированные системы полиномов Лежандра или тригонометрических функций в пространстве $L_2([t,T])$.

В соответствии со стандартной связью стохастических интегралов Стратоновича и Ито с вероятностью 1

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = J[\psi^{(2)}]_{T,t} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\int\limits_t^T \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1. \tag{13}$$

С другой стороны, согласно (10):

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1}\left(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\right) =$$

$$= \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}. \tag{14}$$

Из (12) – (14) получаем:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \underset{p_1,p_2\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}. \tag{15}$$

Условия, налагаемые на функции $\psi_1(\tau)$ и $\psi_2(\tau)$, при которых верна формула (12) и справедливо разложение (15) даются следующей теоремой.

Теорема 2 (2011) [17] (см. также [7], [19]). *Пусть выполнены условия:*

1. *Функция $\psi_2(\tau)$ — непрерывно дифференцируема на интервале $[t,T]$, а функция $\psi_1(\tau)$ — дважды непрерывно дифференцируема на интервале $[t,T]$;*

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ *— полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве* $L_2([t,T])$.

Тогда, повторный стохастический интеграл Стратоновича второй кратности

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_2(t_2) \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \ (i_1, i_2 = 1, \ldots, m)$$

разлагается в следующий, сходящийся в среднеквадратическом смысле, кратный ряд

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \underset{p_1,p_2\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где сохранен смысл обозначений теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 [7], [17], [19] основано на повторных (двойных) рядах Фурье-Лежандра и аналогичных рядах по тригонометрической системе функций. При этом используется двукратное интегрирование по частям, что ведет к требованию двукратной непрерывной дифференцируемости функции $\psi_1(\tau)$ на интервале $[t, T]$.

В данной работе формулируется и доказывается аналог теоремы 2, при доказательстве которого применяются кратные (двойные) ряды Фурье-Лежандра, суммируемые по Принсхейму. При этом удается снизить порядок непрерывной дифференцируемости функции $\psi_1(\tau)$ на интервале $[t, T]$ с двух до единицы.

4 Достаточные условия сходимости двойных рядов Фурье-Лежандра, суммируемых по Принсхейму

Пусть $P_j(x)$; $j = 0, 1, 2, \ldots$ — многочлены Лежандра. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$, определенную в квадрате $[-1, 1]^2$.

Поставим в соответствие функции $f(x, y)$ двойной ряд Фурье-Лежандра, суммируемый по Принсхейму:

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2} \sqrt{(2j+1)(2i+1)} C_{ij}^* P_i(x) P_j(y) \stackrel{\mathsf{def}}{=}$$

$$\stackrel{\mathsf{def}}{=} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{2}\sqrt{(2j+1)(2i+1)}C_{ij}^{*}P_i(x)P_j(y), \tag{16}$$

где

$$C_{ij}^{*} = \frac{1}{2}\sqrt{(2j+1)(2i+1)} \int\limits_{[-1,1]^2} f(x,y)P_i(x)P_j(y)dxdy. \tag{17}$$

Теорема 3 [20]. *Пусть* $f(x,y) \in L_2([-1,1]^2)$ *и для некоторой точки* $(x,y) \in (-1,1)^2$ *выполяется условие*:

$$\int\limits_{[-1,1]^2} \left(\frac{f(x,y)-f(u,v)}{(x-u)(y-v)}\right)^2 dudv < \infty, \tag{18}$$

то в этой точке двойной ряд Фурье-Лежандра вида (16) *сходится к функции* $f(x,y)$.

Отметим, что теорема 3 является обобщением на случай двух переменных известной теоремы о достаточных условиях сходимости ряда Фурье-Лежандра [21].

Рассмотрим обобщение на случай двух переменных [20] теоремы о равносходимости для рядов Фурье-Лежандра [21].

Теорема 4 [20]. *Пусть* $f(x,y) \in L_2([-1,1]^2)$, *а функция*

$$f(x,y)(1-x^2)^{-1/4}(1-y^2)^{-1/4}$$

интегрируема на $[-1,1]^2$. *Пусть, кроме того, выполнено условие*:

$$|f(x,y)-f(u,v)| \leq G(y)|x-u| + H(x)|y-v|,$$

где $G(y), H(x)$ *— ограниченные на* $[-1,1]^2$ *функции.*

Тогда для любых $(x,y) \in (-1,1)^2$ *верно равенство*:

$$\lim_{n,m\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{2}\sqrt{(2j+1)(2i+1)}C_{ij}^{*}P_i(x)P_j(y)-\right.$$

$$\left.-(1-x^2)^{-1/4}(1-y^2)^{-1/4}S_{nm}(\arccos x, \arccos y, F)\right) = 0, \tag{19}$$

причем сходимость равномерная на всяком прямоугольнике

$$[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon] \times [-1+\delta, 1-\delta] \ \forall\ \varepsilon, \delta > 0,$$

а $S_{nm}(\theta,\varphi,F)$ *— частичная сумма двойного тригонометрического ряда Фурье вспомогательной функции*

$$F(\theta,\varphi)=\sqrt{|\mathrm{sin}\theta|}\sqrt{|\mathrm{sin}\varphi|}f(\mathrm{cos}\theta,\mathrm{cos}\varphi);\ \ \theta,\varphi\in[0,\pi];$$

коэффициент C^*_{ij} *имеет вид* (17).

Из теоремы 4, в частности, следует, что для любых $(x,y)\in(-1,1)^2$ верно равенство:

$$\lim_{n,m\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{2}\sqrt{(2j+1)(2i+1)}C^*_{ij}P_i(x)P_j(y)-f(x,y)\right)=0 \qquad (20)$$

причем сходимость равномерная на всяком прямоугольнике

$$[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]\times[-1+\delta,1-\delta]\ \forall\ \varepsilon,\delta>0,$$

если выполнены соответствующие условия сходимости двойного тригонометрического ряда Фурье вспомогательной функции

$$g(x,y)=f(x,y)(1-x^2)^{1/4}(1-y^2)^{1/4}. \qquad (21)$$

Отметим также, что из теоремы 4 не следует никаких выводов о поведении двойного ряда Фурье-Лежандра на границе квадрата $[-1,1]^2$.

Для каждого $\delta>0$ назовем [22] модулем непрерывности $\omega(\delta,f)$ функции $f(\mathbf{t})$, $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_k)$ в k-мерной области D $(k\geq 1)$ точную верхнюю грань разности $|f(\mathbf{t}')-f(\mathbf{t}'')|$ на множестве всех точек $\mathbf{t}'$, $\mathbf{t}''$, которые принадлежат области D, причем расстояние $\rho(\mathbf{t}',\mathbf{t}'')<\delta$.

Будем говорить [22], что функция $f(\mathbf{t})$, $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_k)$, $k\geq 1$ принадлежит в области D классу Гельдера C^α с показателем α $(0<\alpha\leq 1)$ и писать $f(\mathbf{t})\in C^\alpha(D)$, если $\omega(\delta,f)=o(\delta^\alpha)$ при $0<\alpha<1$ и $\omega(\delta,f)=O(\delta)$ при $\alpha=1$.

В 1967г. Л.В. Жижиашвили установил [23] окончательные (в классах Гельдера C^α) условия сходимости прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье.

В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 5 [22]. *Если функция* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *периодична с периодом* 2π *по каждой переменной и принадлежит в* $\Re^n$ *классу Гельдера* C^α *при любом* $\alpha>0$, *то прямоугольные частичные суммы кратного тригонометрического ряда Фурье функции* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *сходятся к этой функции равномерно в* $\Re^n$.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x,y)$ удовлетворяет следующему условию:*

$$|f(x,y)-f(x_1,y_1)| \le C_1|x-x_1|+C_2|y-y_1|, \tag{22}$$

где $C_1, C_2 < \infty$, а (x,y) и $(x_1,y_1) \in [-1,1]^2$.

Тогда имеет место неравенство:

$$|g(x,y)-g(x_1,y_1)| \le K\rho^{1/4}, \tag{23}$$

где $g(x,y)$ имеет вид (21); $\rho = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$; (x,y) и $(x_1,y_1) \in [-1,1]^2$; $K < \infty$.

Доказательство. Сначала будем считать, что $x \ne x_1$, $y \ne y_1$. Имеем

$$\begin{gathered}|g(x,y)-g(x_1,y_1)| = \\ = |(1-x^2)^{1/4}(1-y^2)^{1/4}(f(x,y)-f(x_1,y_1))+ \\ +f(x_1,y_1)((1-x^2)^{1/4}(1-y^2)^{1/4}-(1-x_1^2)^{1/4}(1-y_1^2)^{1/4})| \le \\ \le C_1|x-x_1|+C_2|y-y_1|+ \\ +C_3|(1-x^2)^{1/4}(1-y^2)^{1/4}-(1-x_1^2)^{1/4}(1-y_1^2)^{1/4}|,\end{gathered} \tag{24}$$

где $C_3 < \infty$.

Далее

$$\begin{gathered}|(1-x^2)^{1/4}(1-y^2)^{1/4}-(1-x_1^2)^{1/4}(1-y_1^2)^{1/4}| = \\ = |(1-x^2)^{1/4}((1-y^2)^{1/4}-(1-y_1^2)^{1/4})+ \\ +(1-y_1^2)^{1/4}((1-x^2)^{1/4}-(1-x_1^2)^{1/4})| \le \\ \le |(1-y^2)^{1/4}-(1-y_1^2)^{1/4}|+|(1-x^2)^{1/4}-(1-x_1^2)^{1/4}|.\end{gathered} \tag{25}$$

Кроме того

$$\begin{gathered}|(1-x^2)^{1/4}-(1-x_1^2)^{1/4}| = \\ = |((1-x)^{1/4}-(1-x_1)^{1/4})(1+x)^{1/4}+ \\ +(1-x_1)^{1/4}((1+x)^{1/4}-(1+x_1)^{1/4})| \le \\ \le K_1(|(1-x)^{1/4}-(1-x_1)^{1/4}|+|(1+x)^{1/4}-(1+x_1)^{1/4}|),\end{gathered} \tag{26}$$

где $K_1 < \infty$.

Нетрудно заметить, что

$$|(1 \pm x)^{1/4}-(1 \pm x_1)^{1/4}| =$$

$$= \frac{|(1 \pm x) - (1 \pm x_1)|}{((1 \pm x)^{1/2} + (1 \pm x_1)^{1/2})((1 \pm x)^{1/4} + (1 \pm x_1)^{1/4})} =$$

$$= |x_1 - x|^{1/4} \frac{|x_1 - x|^{1/2}}{(1 \pm x)^{1/2} + (1 \pm x_1)^{1/2}} \cdot \frac{|x_1 - x|^{1/4}}{(1 \pm x)^{1/4} + (1 \pm x_1)^{1/4}} \leq$$

$$\leq |x_1 - x|^{1/4}. \qquad (27)$$

Последнее неравенство получается в силу очевидных неравенств:

$$\frac{|x_1 - x|^{1/2}}{(1 \pm x)^{1/2} + (1 \pm x_1)^{1/2}} \leq 1,$$

$$\frac{|x_1 - x|^{1/4}}{(1 \pm x)^{1/4} + (1 \pm x_1)^{1/4}} \leq 1.$$

Собирая неравенства (24) – (27), получаем

$$|g(x,y) - g(x_1,y_1)| \leq$$

$$\leq C_1|x - x_1| + C_2|y - y_1| + C_4(|x_1 - x|^{1/4} + |y_1 - y|^{1/4}) \leq$$

$$\leq C_5\rho + C_6\rho^{1/4} \leq K\rho^{1/4},$$

где $C_5, C_6, K < \infty$.

Случаи $x = x_1, y \neq y_1$ и $x \neq x_1, y = y_1$ рассматриваются аналогично случаю $x \neq x_1, y \neq y_1$. При этом рассмотрение начинается с неравенств вида:

$$|g(x,y) - g(x_1,y_1)| \leq$$

$$\leq K_2|(1 - y^2)^{1/4} f(x,y) - (1 - y_1^2)^{1/4} f(x_1,y_1)|$$

при $x = x_1,\ y \neq y_1$ и

$$|g(x,y) - g(x_1,y_1)| \leq$$

$$\leq K_2|(1 - x^2)^{1/4} f(x,y) - (1 - x_1^2)^{1/4} f(x_1,y_1)|$$

при $x \neq x_1,\ y = y_1$, где $K_2 < \infty$. Лемма 1 доказана. □

Из леммы 1 и теоремы 5 следует, что прямоугольные суммы двойного тригонометрического ряда Фурье функции $g(x,y)$ сходятся равномерно в квадрате $[-1,1]^2$ к функции $g(x,y)$. Это, в свою очередь, означает, что справедливо равенство (20).

Нетрудно видеть, что в условиях леммы 1 выполняется условие (18) в каждой точке $(x,y) \in (-1,1)^2$.

5 Основная теорема

Теорема 6. *Пусть выполнены условия*:

1. *Функции* $\psi_1(\tau)$ *и* $\psi_2(\tau)$ — *непрерывно дифференцируемы на интервале* $[t,T]$;

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве* $L_2([t,T])$.

Тогда, повторный стохастический интеграл Стратоновича второй кратности

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_2(t_2) \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \ (i_1, i_2 = 1, \ldots, m)$$

разлагается в следующий, сходящийся в среднеквадратическом смысле, кратный ряд

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \underset{p_1,p_2\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где сохранен смысл обозначений теоремы 1.

Доказательство. Установим справедливость равенства:

$$\frac{1}{2} \int\limits_t^T \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1},$$

где $C_{j_1 j_1}$ определяется формулой (6) при $k = 2$ и $j_1 = j_2$, а $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t,T])$.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$K'(t_1, t_2) = \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \ t_1 \ge t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \ t_1 \le t_2 \end{cases}, \ t_1, t_2 \in [t,T]$$

и покажем, что

$$|K'(t_1,t_2) - K'(t_1^*, t_2^*)| \le L(|t_1 - t_1^*| + |t_2 - t_2^*|), \tag{28}$$

где $L < \infty$, а (t_1, t_2) и $(t_1^*, t_2^*) \in [t,T]^2$.

Используя формулу Лагранжа для функций $\psi_1(t_1^*)$, $\psi_2(t_1^*)$ на интервале $[\min\{t_1, t_1^*\}, \max\{t_1, t_1^*\}]$ и для функций $\psi_1(t_2^*)$, $\psi_2(t_2^*)$ на интервале $[\min\{t_2, t_2^*\}, \max\{t_2, t_2^*\}]$ придем к представлению:

$$|K'(t_1, t_2) - K'(t_1^*, t_2^*)| \leq$$

$$\leq \left| \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \ t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \ t_1 \leq t_2 \end{cases} - \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \ t_1^* \geq t_2^* \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \ t_1^* \leq t_2^* \end{cases} \right| +$$

$$+L_1|t_1 - t_1^*| + L_2|t_2 - t_2^*|, \tag{29}$$

где $L_1, L_2 < \infty$.

Далее имеем

$$\begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \ t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \ t_1 \leq t_2 \end{cases} - \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \ t_1^* \geq t_2^* \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \ t_1^* \leq t_2^* \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, \ t_1 \geq t_2, t_1^* \geq t_2^* \text{ или } t_1 \leq t_2, t_1^* \leq t_2^* \\ \psi_2(t_1)\psi_1(t_2) - \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \ t_1 \geq t_2, t_1^* \leq t_2^*. \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2) - \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \ t_1 \leq t_2, t_1^* \geq t_2^* \end{cases} \tag{30}$$

Используя формулу Лагранжа для функций $\psi_1(t_2)$, $\psi_2(t_2)$ на интервале $[\min\{t_1, t_2\}, \max\{t_1, t_2\}]$ придем к оценке:

$$\left| \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \ t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \ t_1 \leq t_2 \end{cases} - \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \ t_1^* \geq t_2^* \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \ t_1^* \leq t_2^* \end{cases} \right| \leq$$

$$\leq L_3|t_2 - t_1| \begin{cases} 0, \ t_1 \geq t_2, t_1^* \geq t_2^* \text{ или } t_1 \leq t_2, t_1^* \leq t_2^* \\ 1, \ t_1 \leq t_2, t_1^* \geq t_2^* \text{ или } t_1 \geq t_2, t_1^* \leq t_2^* \end{cases}, \tag{31}$$

где $L_3 < \infty$.

Покажем, что при $t_1 \leq t_2, \ t_1^* \geq t_2^*$ или $t_1 \geq t_2, \ t_1^* \leq t_2^*$ выполняется неравенство:

$$|t_2 - t_1| \leq |t_1^* - t_1| + |t_2^* - t_2|. \tag{32}$$

Сначала рассмотрим случай $t_1 \geq t_2, \ t_1^* \leq t_2^*$. Имеем: $t_2 + (t_1^* - t_2^*) \leq t_2 \leq t_1$. Тогда $(t_1^* - t_1) - (t_2^* - t_2) \leq t_2 - t_1 \leq 0$, т.е. (32) выполнено.

Для случая $t_1 \leq t_2, \ t_1^* \geq t_2^*$ получаем: $t_1 + (t_2^* - t_1^*) \leq t_1 \leq t_2$. Тогда $(t_1 - t_1^*) - (t_2 - t_2^*) \leq t_1 - t_2 \leq 0$, т.е. (32) тоже выполнено.

Объединяя (31) и (32) имеем:

$$\left|\begin{cases}\psi_2(t_1)\psi_1(t_2),\ t_1\ge t_2\\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2),\ t_1\le t_2\end{cases} - \begin{cases}\psi_2(t_1)\psi_1(t_2),\ t_1^*\ge t_2^*\\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2),\ t_1^*\le t_2^*\end{cases}\right| \le$$

$$\le L_3(|t_1^*-t_1|+|t_2^*-t_2|)\begin{cases}0,\ t_1\ge t_2, t_1^*\ge t_2^* \text{ или } t_1\le t_2, t_1^*\le t_2^*\\ 1,\ t_1\le t_2, t_1^*\ge t_2^* \text{ или } t_1\ge t_2, t_1^*\le t_2^*\end{cases} \le$$

$$\le L_3(|t_1^*-t_1|+|t_2^*-t_2|)\begin{cases}1,\ t_1\ge t_2, t_1^*\ge t_2^* \text{ или } t_1\le t_2, t_1^*\le t_2^*\\ 1,\ t_1\le t_2, t_1^*\ge t_2^* \text{ или } t_1\ge t_2, t_1^*\le t_2^*\end{cases} =$$

$$= L_3(|t_1^*-t_1|+|t_2^*-t_2|). \tag{33}$$

Объединив (29) и (33), придем к (28).

Сделаем замену:

$$t_1=\frac{T-t}{2}x+\frac{T+t}{2},\ t_2=\frac{T-t}{2}y+\frac{T+t}{2},$$

где $x,y\in[-1,1]$. Таким образом изменению переменных t_1,t_2 в пределах от t до T соответствует изменение переменных x,y в пределах от -1 до 1.

Далее

$$K'(t_1,t_2)\equiv K^*(x,y)=\begin{cases}\psi_2\left(h(x)\right)\psi_1\left(h(y)\right),\ x\ge y\\ \psi_1\left(h(x)\right)\psi_2\left(h(y)\right),\ x\le y\end{cases},$$

где $x,y\in[-1,1]$ и

$$h(x)=\frac{T-t}{2}x+\frac{T+t}{2}.$$

Неравенство (28) перепишется в виде:

$$|K^*(x,y)-K^*(x^*,y^*)|\le L^*(|x-x^*|+|y-y^*|), \tag{34}$$

где $L^*<\infty$, а (x,y) и $(x^*,y^*)\in[-1,1]^2$.

Таким образом функция $K^*(x,y)$ удовлетворяет условиям леммы 1, а значит для функции $K^*(x,y)(1-x^2)^{1/4}(1-y^2)^{1/4}$ верно неравенство (23).

В силу непрерыной дифференцируемости функций $\psi_1\left(h(x)\right)$ и $\psi_2\left(h(x)\right)$ на интервале $[-1,1]$ имеем $K^*(x,y)\in L_2([-1,1]^2)$. Кроме того

$$\int\limits_{[-1,1]^2}\frac{K^*(x,y)dxdy}{(1-x^2)^{1/4}(1-y^2)^{1/4}}\le C\Bigg(\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{(1-x^2)^{1/4}}\int\limits_{-1}^{x}\frac{1}{(1-y^2)^{1/4}}dydx+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{(1-x^2)^{1/4}}\int\limits_{x}^{1}\frac{1}{(1-y^2)^{1/4}}dydx\Bigg)<\infty,$$

где $C<\infty$.

Таким образом для функции $K^*(x,y)$ выполнены условия теоремы 4. Кроме того, в силу неравенства (34) функция $K^*(x,y)$ удовлетворяет условию (18) в каждой точке $(x,y)\in(-1,1)^2$.

Отметим, что все перечисленные свойства функции $K^*(x,y);\ x,y\in[-1,1]$ верны и для функции $K'(t_1,t_2);\ t_1,t_2\in[t,T]$.

Разложим функцию $K'(t_1,t_2)$ в квадрате $[t,T]^2$ в кратный ряд Фурье, суммируемый методом прямоугольных сумм, т.е.

$$K'(t_1,t_2)=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\int\limits_{t}^{T}\int\limits_{t}^{T}K'(t_1,t_2)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)dt_1dt_2\cdot\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)=$$

$$=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\Bigg(\int\limits_{t}^{T}\psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\int\limits_{t}^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_{t}^{T}\psi_1(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\int\limits_{t_2}^{T}\psi_2(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\Bigg)dt_2\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)=$$

$$=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\left(C_{j_2j_1}+C_{j_1j_2}\right)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2),\ \ (t_1,t_2)\in(t,T)^2,\qquad(35)$$

причем сходимость ряда (35) равномерная на всяком прямоугольнике

$$[t+\varepsilon,T-\varepsilon]\times[t+\delta,T-\delta]\ \forall\ \varepsilon,\delta>0\ (\text{в частности, можно взять } \varepsilon=\delta).$$

Кроме того, ряд (35) сходится к $K'(t_1,t_2)$ во всякой внутренней точке квадрата $[t,T]^2$.

Отметим, что теоремы 3 и 4 не отвечают на вопрос о сходимости ряда (35) на границе квадрата $[t,T]^2$.

При получении (35) мы заменили порядок интегрирования во втором повторном интеграле.

Нетрудно видеть, что положив $t_1=t_2$ в (35), разбив предел в правой части полученного равенства на два предела и переобозначив j_1 на j_2, j_2 на

j_1, n_1 на n_2 и n_2 на n_1 во втором пределе, получим

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)=\frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1),\ t_1\in(t,T). \tag{36}$$

Согласно вышеизложенным рассужденям, равенство (36) выполняется равномерно на всяком интервале $[t+\varepsilon,T-\varepsilon]$ $\forall\ \varepsilon>0$. Кроме того (36) выполняется в каждой внутренней точке интервала $[t,T]$.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 6 *ряд* (36) *при* $n_1=n_2$ *сходится в точках* $t_1=t,T$ (*не обязательно к* $\psi_1(t)\psi_2(t)/2$ *и* $\psi_1(T)\psi_2(T)/2$ *соответственно*).

Доказательство леммы 2 приводится в разд. 7.

Проинтегрируем равенство (36) по интервалу $[t+\varepsilon,T-\varepsilon]$ $\forall\varepsilon>0$ и поменяем интеграл и ряд местами, в силу равномерной сходимости последнего:

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}C_{j_2j_1}\int\limits_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1=\int\limits_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon}\frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1. \tag{37}$$

Рассмотрим левую часть (37)

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}C_{j_2j_1}\int\limits_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1=$$

$$=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}C_{j_2j_1}\Biggl(\int\limits_{t}^{T}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1-\int\limits_{t}^{t+\varepsilon}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1-$$

$$-\int\limits_{T-\varepsilon}^{T}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1\Biggr)=$$

$$=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}C_{j_2j_1}\Biggl(\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}-\Bigl(\phi_{j_1}(\theta)\phi_{j_2}(\theta)+\phi_{j_1}(\lambda)\phi_{j_2}(\lambda)\Bigr)\varepsilon\Biggr)=$$

$$=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{\min\{n_1,n_2\}}C_{j_1j_1}-$$

$$-\varepsilon\Biggl(\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(\theta)\phi_{j_2}(\theta)-\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(\lambda)\phi_{j_2}(\lambda)\Biggr)=$$

$$= \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1} - \varepsilon \Biggl(\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(\theta)\phi_{j_2}(\theta) - \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(\lambda)\phi_{j_2}(\lambda) \Biggr), \qquad (38)$$

где $\theta \in [t, t+\varepsilon]$, $\lambda \in [T-\varepsilon, T]$.

При получении (38) мы использовали теорему о среднем значении для интеграла и ортонормированность функций $\phi_j(x)$; $j = 0, 1, 2 \ldots$

Подставим (38) в (37) и осуществим в полученном равенстве предельный переход $\lim\limits_{\varepsilon \to +0}$. В результате придем к равенству

$$\int\limits_t^T \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1},$$

при получении которого мы использовали соотношение

$$\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(s)\phi_{j_2}(s) < \infty;\ s \in [t, t+\varepsilon],\ [T-\varepsilon, T].$$

Теорема доказана. □

Замечание 1. *На основании* (28) *можно утверждать, что функция* $K'(t_1, t_2)$ *принадлежит классу Гельдера с показателем* 1 *в* $[t, T]^2$, *а значит разлагается в равномерно сходящийся на квадрате* $[t, T]^2$ *двойной тригонометрический ряд Фурье, суммируемый по Принсхейму* (*согласно теореме* 5). *Это означает, что теорема* 6 *останется верной если в ней вместо двойного ряда Фурье-Лежандра рассматривать двойной тригонометрический ряд Фурье. Однако, разложения повторных стохастических интегралов, полученные с помощью системы полиномов Лежандра, оказываются существенно проще их аналогов, полученных с помощью тригонометрической системы функций* (*см. разд.* 8).

6 О некоторых свойствах полиномов Лежандра

Для дальнейшего рассмотрения нам понадобятся некоторые хорошо известные свойства полиномов Лежандра, а также их некоторые модификации [24].

Полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t, T])$ имеет вид

$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j\left(\left(x - \frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right);\ j = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (39)$$

где $P_j(x)$ — полином Лежандра.

Известно, что полином Лежандра $P_j(x)$ представим, например, в виде (формула Родрига):

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}\left(x^2-1\right)^j.$$

На концах интервала ортогональности полиномы Лежандра удовлетворяют следующим соотношениям:

$$P_j(1) = 1,\ P_j(-1) = (-1)^j,$$

$$P_{j+1}(1) - P_j(1) = 0,\ P_{j+1}(-1) + P_j(-1) = 0,$$

где $j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Связь многочлена Лежандра с номером j с производными многочленов Лежандра с номерами $j+1$ и $j-1$ выражается следующим равенством:

$$P_j(x) = \frac{1}{2j+1}\left(P'_{j+1}(x) - P'_{j-1}(x)\right); j = 1,\ 2, \ldots,$$

где штрих означает производную по x.

Рекуррентное соотношение имеет вид:

$$xP_j(x) = \frac{(j+1)P_{j+1}(x) + jP_{j-1}(x)}{2j+1};\ j = 1,\ 2, \ldots$$

Ортогональность полинома Лежандра $P_j(x)$ любому многочлену $Q_k(x)$ меньшей степени запишем в следующей форме:

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_k(x)P_j(x)dx = 0;\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, j-1.$$

Из свойства

$$\int\limits_{-1}^{1} P_k(x)P_j(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j \\ 2/(2j+1) & \text{при } k = j \end{cases}$$

следует, что ортонормированный на интервале $[-1,1]$ многочлен Лежандра определяется соотношением:

$$P_j^*(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{2}}P_j(x);\ j = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Хорошо известно, что имеет место оценка

$$|P_j(y)| < \frac{K}{\sqrt{j+1}(1-y^2)^{1/4}};\ y \in (-1,1);\ j = 1,\ 2, \ldots, \tag{40}$$

где постоянная K не зависит от y и j.

Кроме того

$$|P_j(x)| \le 1,\ x \in [-1,1];\ j = 0,\ 1, \ldots \tag{41}$$

Формула Кристоффеля-Дарбу имеет вид:

$$\sum_{j=0}^{n}(2j+1)P_j(x)P_j(y) = (n+1)\frac{P_n(x)P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}. \tag{42}$$

В частности, из (42) при $x = \pm 1$ получим:

$$\sum_{j=0}^{n}(2j+1)P_j(y) = (n+1)\frac{P_{n+1}(y) - P_n(y)}{y-1}, \tag{43}$$

$$\sum_{j=0}^{n}(2j+1)(-1)^j P_j(y) = (n+1)(-1)^n\frac{P_{n+1}(y) + P_n(y)}{y+1}. \tag{44}$$

С другой стороны:

$$\sum_{j=0}^{n}(2j+1)P_j(y) = 1 + \sum_{j=1}^{n}(2j+1)P_j(y) =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n}(P'_{j+1}(y) - P'_{j-1}(y)) = 1 + \left(\sum_{j=1}^{n}(P_{j+1}(y) - P_{j-1}(y))\right)' =$$

$$= 1 + (P_{n+1}(x) + P_n(x) - x - 1)' = (P_n(x) + P_{n+1}(x))' \tag{45}$$

и

$$\sum_{j=0}^{n}(2j+1)(-1)^j P_j(y) = 1 + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j(2j+1)P_j(y) =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j(P'_{j+1}(y) - P'_{j-1}(y)) = 1 + \left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(P_{j+1}(y) - P_{j-1}(y))\right)' =$$

$$= 1 + ((-1)^n(P_{n+1}(x) - P_n(x)) - x + 1)' = (-1)^n(P_{n+1}(x) - P_n(x))'. \tag{46}$$

Сопоставляя (43) с (45) и (44) с (46) получим

$$(n+1)\frac{P_{n+1}(y)-P_n(y)}{y-1}=(P_n(x)+P_{n+1}(x))', \tag{47}$$

$$(n+1)\frac{P_{n+1}(y)+P_n(y)}{y+1}=(P_{n+1}(x)-P_n(x))'. \tag{48}$$

7 Доказательство леммы 2

Итак, требуется установить, что в условиях теоремы 6 конечны следующие величины:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j_2=0}^{n}\sum_{j_1=0}^{n}C_{j_2j_1}\phi_{j_2}(T)\phi_{j_1}(T),\ \lim_{n\to\infty}\sum_{j_2=0}^{n}\sum_{j_1=0}^{n}C_{j_2j_1}\phi_{j_2}(t)\phi_{j_1}(t). \tag{49}$$

Имеем

$$\sum_{j_2=0}^{n}\sum_{j_1=0}^{n}C_{j_2j_1}\phi_{j_2}(T)\phi_{j_1}(T)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{j_2=0}^{n}\sum_{j_1=0}^{n}(2j_2+1)(2j_1+1)\int\limits_{-1}^{1}\psi_2(h(y))P_{j_2}(y)\int\limits_{-1}^{y}\psi_1((h(y_1))P_{j_1}(y_1)dy_1dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\psi_2(h(y))\sum_{j_2=0}^{n}(2j_2+1)P_{j_2}(y)\int\limits_{-1}^{y}\psi_1((h(y_1))\sum_{j_1=0}^{n}(2j_1+1)P_{j_1}(y_1)dy_1dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\psi_2(h(y))\left(\int\limits_{-1}^{y}\psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1)+P_n(y_1))\right)d(P_{n+1}(y)+P_n(y))=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\psi_1(h(y))\left(\int\limits_{-1}^{y}\psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1)+P_n(y_1))\right)d(P_{n+1}(y)+P_n(y))+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\Delta(h(y))\left(\int\limits_{-1}^{y}\psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1)+P_n(y_1))\right)d(P_{n+1}(y)+P_n(y))=$$

$$=\frac{1}{4}I_1+\frac{1}{4}I_2,$$

где

$$\Delta(h(y)) = \psi_2((h(y)) - \psi_1((h(y)),\ h(y) = \frac{T-t}{2}y + \frac{T+t}{2}. \tag{50}$$

Далее

$$I_1 = \frac{1}{2}\Bigg(\int\limits_{-1}^{1} \psi_1((h(y))d(P_{n+1}(y) + P_n(y))\Bigg)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(2\psi_1(T) - \int\limits_{-1}^{1} (P_{n+1}(y) + P_n(y))\psi_1'((h(y))\frac{T-t}{2}dy\Bigg)^2 < C_1 < \infty,$$

где постоянная C_1 не зависит от n, а ψ_1' — производная ψ_1 по y.

По формуле Лагранжа

$$\Delta(h(y)) = \psi_2\Bigg(\frac{1}{2}(T-t)(y-1) + T\Bigg) - \psi_1\Bigg(\frac{1}{2}(T-t)(y-1) + T\Bigg) =$$

$$= \psi_2(T) - \psi_1(T) + (y-1)\Bigg(\psi_2'(\xi_y) - \psi_1'(\theta_y)\Bigg)\frac{1}{2}(T-t) = C_1 + \alpha_y(y-1), \tag{51}$$

где $|\alpha_y| < \infty$, а $C_1 = \psi_2(T) - \psi_1(T)$.

Рассмотрим интеграл I_2 и подставим в него (51):

$$I_2 = I_3 + I_4,$$

где

$$I_3 = \int\limits_{-1}^{1} \alpha_y(y-1)\Bigg(\int\limits_{-1}^{y} \psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1))\Bigg)d(P_{n+1}(y) + P_n(y)),$$

$$I_4 = C_1\int\limits_{-1}^{1}\Bigg(\int\limits_{-1}^{y} \psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1))\Bigg)d(P_{n+1}(y) + P_n(y)).$$

Интегрируя по частям и используя (47), получим

$$I_3 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\alpha_y(y-1)(n+1)(P_{n+1}(y) - P_n(y))}{y-1}\Bigg(\psi_1((h(y))(P_{n+1}(y) + P_n(y)) -$$

$$- \int\limits_{-1}^{y} (P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1))\psi_1'((h(y_1))\frac{1}{2}(T-t)dy_1\Bigg)dy.$$

Применяя оценку (40) и учитывая ограниченность α_y и $\psi_1'((h(y_1))$, имеем $|I_3| < \infty$.

Поменяем в интеграле I_4 порядок интегрирования:

$$I_4 = C_1 \int\limits_{-1}^{1} \psi_1((h(y_1)) \left(\int\limits_{y_1}^{1} d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) \right) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) =$$

$$= C_1 \int\limits_{-1}^{1} \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) \int\limits_{-1}^{1} d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) -$$

$$-C_1 \int\limits_{-1}^{1} \psi_1((h(y_1)) \left(\int\limits_{-1}^{y_1} d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) \right) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) =$$

$$= I_5 - I_6.$$

Рассмотрим интеграл I_5 :

$$I_5 = 2C_1 \int\limits_{-1}^{1} \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) =$$

$$= 2C_1 \left(2\psi_1(T) - \int\limits_{-1}^{1} (P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) \psi_1'((h(y_1)) \frac{1}{2}(T-t) dy_1 \right).$$

Применяя оценку (41) и учитывая ограниченность $\psi_1'((h(y_1))$, имеем $|I_5| < \infty$.

Поскольку (см. (51)):

$$\psi_1(h(y)) = \psi_1\left(\frac{1}{2}(T-t)(y-1) + T\right) =$$

$$= \psi_1(T) + (y-1)\psi_1'(\theta_y)\frac{1}{2}(T-t) = C_2 + \beta_y(y-1),$$

где $|\beta_y| < \infty$, а $C_2 = \psi_1(T)$, то

$$I_6 = C_3 \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{-1}^{y_1} d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) \right) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) +$$

$$+C_1\int\limits_{-1}^{1}\beta_{y_1}(y_1-1)\left(\int\limits_{-1}^{y_1}d(P_{n+1}(y)+P_n(y))\right)d(P_{n+1}(y_1)+P_n(y_1))=$$

$$=\frac{C_3}{2}\left(\int\limits_{-1}^{1}d(P_{n+1}(y)+P_n(y))\right)^2+$$

$$+C_1\int\limits_{-1}^{1}\frac{\beta_{y_1}(y_1-1)(n+1)(P_{n+1}(y_1)-P_n(y_1))}{y_1-1}\left(\int\limits_{-1}^{y_1}d(P_{n+1}(y)+P_n(y))\right)dy_1=$$

$$=2C_3+C_1\int\limits_{-1}^{1}\beta_{y_1}(n+1)(P_{n+1}(y_1)-P_n(y_1))(P_{n+1}(y_1)+P_n(y_1))dy_1.$$

Применяя оценку (40) и учитывая ограниченность β_{y_1}, имеем $|I_6|<\infty$. Таким образом ограниченость первого ряда в (49) доказана.

Докажем ограниченость второго ряда в (49). Имеем

$$\sum_{j_2=0}^{n}\sum_{j_1=0}^{n}C_{j_2j_1}\phi_{j_2}(t)\phi_{j_1}(t)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{j_1,j_2=0}^{n}(2j_2+1)(2j_1+1)(-1)^{j_1+j_2}\int\limits_{-1}^{1}\psi_2(h(y))P_{j_2}(y)\int\limits_{-1}^{y}\psi_1((h(y_1))P_{j_1}(y_1)dy_1dy$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\psi_2(h(y))\sum_{j_2=0}^{n}(2j_2+1)P_{j_2}(y)(-1)^{j_2}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{y}\psi_1((h(y_1))\sum_{j_1=0}^{n}(2j_1+1)P_{j_1}(y_1)(-1)^{j_1}dy_1dy=$$

$$=\frac{(-1)^{2n}}{4}\int\limits_{-1}^{1}\psi_2(h(y))\left(\int\limits_{-1}^{y}\psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1)-P_n(y_1))\right)d(P_{n+1}(y)-P_n(y))$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\psi_1(h(y))\left(\int\limits_{-1}^{y}\psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1)-P_n(y_1))\right)d(P_{n+1}(y)-P_n(y))+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\Delta(h(y))\Bigg(\int\limits_{-1}^{y}\psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1)-P_n(y_1))\Bigg)d(P_{n+1}(y)-P_n(y))=$$

$$=\frac{1}{4}J_1+\frac{1}{4}J_2,$$

где $\Delta(h(y))$, $h(y)$ определяются соотношениями (50).

Далее

$$J_1=\frac{1}{2}\Bigg(\int\limits_{-1}^{1}\psi_1((h(y))d(P_{n+1}(y)-P_n(y))\Bigg)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\Bigg(2(-1)^n\psi_1(t)-\int\limits_{-1}^{1}(P_{n+1}(y)-P_n(y))\psi_1'((h(y))\frac{T-t}{2}dy\Bigg)^2<K_1<\infty, \quad (52)$$

где постоянная K_1 не зависит от n, а ψ_1' — производная ψ_1 по y.

По формуле Лагранжа

$$\Delta(h(y))=\psi_2\Bigg(\frac{1}{2}(T-t)(y+1)+t\Bigg)-\psi_1\Bigg(\frac{1}{2}(T-t)(y+1)+t\Bigg)=$$

$$=\psi_2(t)-\psi_1(t)+(y+1)\Bigg(\psi_2'(\mu_y)-\psi_1'(\rho_y)\Bigg)\frac{1}{2}(T-t)=K_2+\gamma_y(y+1), \quad (53)$$

где $|\gamma_y|<\infty$, а $K_2=\psi_2(t)-\psi_1(t)$.

Рассмотрим интеграл J_2:

$$J_2=\int\limits_{-1}^{1}\Delta(h(y))d(P_{n+1}(y)-P_n(y))\int\limits_{-1}^{1}\psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1)-P_n(y_1))-$$

$$-\int\limits_{-1}^{1}\Delta(h(y))\Bigg(\int\limits_{y}^{1}\psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1)-P_n(y_1))\Bigg)d(P_{n+1}(y)-P_n(y))=$$

$$=J_3J_4-J_5.$$

Интеграл J_4 встречался при рассмотрении интеграла J_1 (см. (52)), где было показано, что $|J_4|<\infty$. Аналогично $|J_3|<\infty$.

Рассмотрим интеграл J_5 и подставим в него (53):

$$J_5=J_6+J_7,$$

где

$$J_6 = \int\limits_{-1}^{1} \gamma_y(y+1)\left(\int\limits_{y}^{1} \psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1))\right)d(P_{n+1}(y) - P_n(y)),$$

$$J_7 = K_2\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{y}^{1} \psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1))\right)d(P_{n+1}(y) - P_n(y)).$$

Интегрируя по частям и используя (48), получим

$$J_6 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\gamma_y(y+1)(n+1)(P_{n+1}(y)+P_n(y))}{y+1}\Bigg(-\psi_1((h(y))(P_{n+1}(y) - P_n(y))-$$

$$-\int\limits_{y}^{1}(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1))\psi_1'((h(y_1))\frac{1}{2}(T-t)dy_1\Bigg)dy.$$

Применяя оценку (40) и учитывая ограниченность γ_y и $\psi_1'((h(y_1))$, имеем $|J_6| < \infty$.

Поменяем в интеграле J_7 порядок интегрирования:

$$J_7 = K_2\int\limits_{-1}^{1} \psi_1((h(y_1))\left(\int\limits_{-1}^{y_1} d(P_{n+1}(y) - P_n(y))\right)d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) =$$

$$= K_2\int\limits_{-1}^{1} \psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1))\int\limits_{-1}^{1} d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) - K_2J_8 =$$

$$= K_2J_4 2(-1)^n - K_2J_8,$$

где

$$J_8 = \int\limits_{-1}^{1} \psi_1((h(y_1))\left(\int\limits_{y_1}^{1} d(P_{n+1}(y) - P_n(y))\right)d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)).$$

Поскольку (см. (53)):

$$\psi_1(h(y)) = \psi_1\left(\frac{1}{2}(T-t)(y+1)+t\right) =$$

$$= \psi_1(t) + (y+1)\psi_1'(\rho_y)\frac{1}{2}(T-t) = K_3 + \varepsilon_y(y+1), \tag{54}$$

где $|\varepsilon_y| < \infty$, а $K_3 = \psi_1(t)$, то

$$J_8 = K_3 \int\limits_{-1}^{1} \Biggl(\int\limits_{y_1}^{1} d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) \Biggr) d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} \varepsilon_y(y+1) \Biggl(\int\limits_{y_1}^{1} d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) \Biggr) d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) =$$

$$= \frac{K_3}{2} \Biggl(\int\limits_{-1}^{1} d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) \Biggr)^2 +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varepsilon_{y_1}(y_1+1)(n+1)(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1))}{y_1+1} (P_n(y_1) - P_{n+1}(y_1)) dy =$$

$$= 2K_3 + \int\limits_{-1}^{1} \varepsilon_{y_1}(n+1)(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1))(P_n(y_1) - P_{n+1}(y_1)) dy. \tag{55}$$

При получении (55) мы использовали (48). Применяя оценку (40) и учитывая ограниченность ε_{y_1}, имеем $|J_8| < \infty$. Таким образом ограниченность второго ряда в (49) доказана. Лемма 2 доказана. □

8 Разложения стохастических интегралов Стратоновича 1 и 2 кратностей с помощью рядов Фурье-Лежандра

Будем использовать следующие обозначения для стохастических интегралов Стратоновича 1 и 2 кратностей:

$$I_{(l_1)T,t}^{*(i_1)} = \int\limits_{t}^{*T} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}, \tag{56}$$

$$I_{(l_1 l_2)T,t}^{*(i_1 i_2)} = \int\limits_t^{*T} (t - t_2)^{l_2} \int\limits_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}, \tag{57}$$

где $l_1, l_2 = 0,\ 1, \ldots ;\ i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m.$

Отметим, что наряду со стохастическими интегралами Стратоновича более высокой кратности, чем вторая, стохастические интегралы вида (56) и (57) входят в, так называемое, унифицированное разложение Тейлора-Стратоновича [9], которое может быть использовано для построения сильных (определение сильного численного метода см., например, в [3]) численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито.

В монографиях [7], [15] – [19] уделяется большое внимание среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича кратностей 1-5 вида (2) и (3) с использованием рядов Фурье-Лежандра и тригонометрических рядов Фурье.

Приведем примеры разложений некоторых стохастических интегралов Стратоновича 1 и 2 кратностей вида (56) и (57), полученных с помощью теоремы 6 и формулы (9):

$$I_{(0)T,t}^{*(i_1)} = \sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{58}$$

$$I_{(1)T,t}^{*(i_1)} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right), \tag{59}$$

$$I_{(2)T,t}^{*(i_1)} = \frac{(T-t)^{5/2}}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\right), \tag{60}$$

$$I_{(00)T,t}^{*(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left(\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right)\right), \tag{61}$$

$$I_{(01)T,t}^{*(i_1 i_2)} = -\frac{T-t}{2} I_{(00)T,t}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(i+2)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+1)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)} - \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\right)\right), \tag{62}$$

$$I_{(10)T,t}^{*(i_1 i_2)} = -\frac{T-t}{2} I_{(00)T,t}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_1^{(i_1)} + \right.$$

$$
+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}+\frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\right)\Biggr), \tag{63}
$$

$$
I_{(02)T,t}^{*(i_1i_2)}=-\frac{(T-t)^2}{4}I_{(00)T,t}^{*(i_1i_2)}-(T-t)I_{(01)T,t}^{*(i_1i_2)}+\frac{(T-t)^3}{8}\Biggl(\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}+
$$

$$
+\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+2)(i+3)\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i+1)(i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)}+
$$

$$
+\frac{(i^2+i-3)\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i^2+3i-1)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr), \tag{64}
$$

$$
I_{(20)T,t}^{*(i_1i_2)}=-\frac{(T-t)^2}{4}I_{(00)T,t}^{*(i_1i_2)}-(T-t)I_{(10)T,t}^{*(i_1i_2)}+\frac{(T-t)^3}{8}\Biggl(\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_2^{(i_1)}+
$$

$$
+\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+1)(i+2)\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i+2)(i+3)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)}+
$$

$$
+\frac{(i^2+3i-1)\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i^2+i-3)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr), \tag{65}
$$

$$
I_{(11)T,t}^{*(i_1i_2)}=-\frac{(T-t)^2}{4}I_{(00)T,t}^{*(i_1i_2)}-\frac{(T-t)}{2}\left(I_{(10)T,t}^{*(i_1i_2)}+I_{(01)T,t}^{*(i_1i_2)}\right)+
$$

$$
+\frac{(T-t)^3}{8}\Biggl(\frac{1}{3}\zeta_1^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)}+\sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+1)(i+3)(\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)})}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)}+
$$

$$
+\frac{(i+1)^2(\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)})}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr), \tag{66}
$$

где

$$
\zeta_j^{(i)}=\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{f}_s^{(i)} \tag{67}
$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных i $(i=1,\ldots,m)$ или j $(j=0,1,\ldots)$.

Следует обратить внимание на то, что в приведенных выше разложениях величина $T-t$ не подвергается дополнительному дроблению, что особенно важно, поскольку $T-t$ играет роль шага интегрирования в численных методах для стохастических дифференциальных уравнений Ито, который является достаточно малой величиной.

Отметим простоту формул (58) – (60). Для сравнения приведем аналог формулы (59), полученный в [10] (см. также [3]) с помощью метода Мильштейна Г.Н. [2]:

$$I_{(1)T,t}^{(i_1)q}=-\frac{(T-t)^{3/2}}{2}\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}+\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\Biggr)\Biggr), \qquad (68)$$

где $\zeta_j^{(i)}$ определяется формулой (67), в которой $\phi_j(s)$ — полная ортонормированная система тригонометрических функций в пространстве $L_2([t,T])$; $\zeta_0^{(i)}$, $\zeta_{2r-1}^{(i)}$, $\xi_q^{(i)}$ $(r=1,\ldots,q;\ i=1,\ldots,m)$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины;

$$\xi_q^{(i)}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_q}}\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i)},\ \ \alpha_q=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}.$$

Еще одним примером убедительного преимущества полиномов Лежандра над тригонометрическими функциями (в контексте рассматриваемой проблемы) является пример усеченного разложения $I_{(10)T,t}^{*(i_2i_1)q}$ стохастического интеграла Стратоновича $I_{(10)T,t}^{*(i_2i_1)}$, полученного с помощью теоремы 6, в которой вместо двойного ряда Фурье-Лежандра взят двойной тригонометрический ряд Фурье (что допустимо согласно замечанию 1):

$$\begin{gathered}I_{(10)T,t}^{*(i_2i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\\+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\left(2\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right)+\\+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left(-\frac{1}{\pi r}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)+\right.\\\left.+\frac{1}{\pi^2r^2}\left(-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+2\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right)\right)+\\+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{q}\Biggl(\sum_{l=1}^{k-1}+\sum_{l=k+1}^{q}\Biggr)\frac{1}{l^2-k^2}\left(\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}-\frac{k}{l}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\right)\Biggr), \qquad (69)\end{gathered}$$

где

$$\mu_q^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\beta_q}} \sum_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, \zeta_{2r}^{(i)},\ \beta_q = \frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^{q} \frac{1}{r^4},$$

а $\zeta_0^{(i)},\ \zeta_{2r}^{(i)},\ \zeta_{2r-1}^{(i)},\ \xi_q^{(i)},\ \mu_q^{(i)}$ $(r = 1, \ldots, q;\ i = 1, \ldots, m)$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины; $i_1,\ i_2 = 1, \ldots, m$; остальные обозначения, входящие в (69), такие же, как в (68).

Аналогом формулы (69) (для случая полиномов Лежандра) является (согласно (61) и (63)) следующее представление:

$$I_{(10)T,t}^{*(i_1 i_2)q} = -\frac{T-t}{2} I_{(00)T,t}^{*(i_1 i_2)q} - \frac{(T-t)^2}{4} \Biggl(\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{q} \Biggl(\frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+2)\zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)} + \frac{\zeta_i^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \Biggr) \Biggr), \tag{70}$$

где

$$I_{(00)T,t}^{*(i_1 i_2)q} = \frac{T-t}{2} \Biggl(\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \Bigl(\zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \Bigr) \Biggr),$$

которое очевидно существенно проще, чем (69).

Здесь следует обратить особое внимание на то, что в представление (70) входит однократная сумма с верхним пределом суммирования q, в то время как в предствление (69) входит двойная сумма с тем же пределом суммирования. При численном моделировании, очевидно, формула (70) более экономична по вычислительным затратам, нежели ее аналог (69).

Есть еще одна особенность, которую необходимо отметить в связи с формулой (69). Данная формула впервые была получена в [10] (1992) методом Мильштейна Г.Н. [2]. Однако, в силу своих особенностей (см. разд. 1) метод Мильштейна Г.Н. приводит к повторному применению операции предельного перехода (в противоположность теоремам 1, 2 и 6, в которых предельный переход осуществляется один раз) при осуществлении разложения повторного стохастического интеграла. Это означает, что из метода Мильштейна Г.Н., вообще говоря, не следует среднеквадратической сходимости $I_{(10)T,t}^{*(i_1 i_2)q}$ вида (69) к $I_{(10)T,t}^{*(i_1 i_2)}$ при $q \to \infty$. Это же касается и некоторых других аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича, полученных в [10] методом Мильштейна Г.Н.

Справедливость формулы

$$\lim_{q\to\infty} \mathsf{M} \left\{ \left(I_{(10)T,t}^{*(i_1 i_2)} - I_{(10)T,t}^{*(i_1 i_2)q} \right) \right\} = 0,$$

где $I_{(10)T,t}^{*(i_1 i_2)q}$ определяется формулой (69), вытекает из теорем 2, 6.

Список литературы

[1] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев, Наукова думка, 1982. 612 с.

[2] Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск, Изд-во Уральск. ун-та, 1988. 225 с.

[3] Kloeden P.E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin, Springer-Verlag Publ., 1992. 632 p.

[4] Milstein G.N., Tretyakov M.V. Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin, Springer-Verlag Publ., 2004. 596 p.

[5] Kloeden P.E., Platen E. The Stratonovich and Ito-Taylor expansions. *Math. Nachr.* 151 (1991), 33-50.

[6] Аверина Т.А., Артемьев С.С. Новое семейство численных методов для решения стохастических дифференциальных уравнений. *Докл. АН СССР.* 288: 4 (1986), 777-780.

[7] Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MatLab. Изд. 5-е (перераб. и дополн.). *Электронный Журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления"*. 2017, no. 2, С. A.1 - A.1000. Доступно по ссылке: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov_book3.pdf

[8] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Унифицированное разложение Тейлора-Ито. *Зап. научн. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова.* 244 (1997), 186-204.

[9] Кузнецов Д.Ф. Новые представления разложения Тейлора-Стратоновича. *Зап. научн. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова.* 278 (2001), 141-158.

[10] Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W. The approximation of multiple stochastic integrals. *Stoch. Anal. Appl.* 10: 4 (1992), 431-441.

[11] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Аппроксимация кратных стохастических интегралов Ито. *ВИНИТИ*, 1678-В94 (1994), 42 с.

[12] Кузнецов Д.Ф. Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций. *Электронный журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления".* 1997, no. 1, С. 18-77. Доступно по ссылке:
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j002.pdf

[13] Кузнецов Д.Ф. Некоторые вопросы теории численного решения стохастических дифференциальных уранений Ито. *Электронный Журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления".* 1998. no. 1, С. 66-367. Доступно по ссылке:
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j011.pdf

[14] Кузнецов Д.Ф. Применение полиномов Лежандра к среднеквадратической аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений. *Проблемы управления и информатики.* 5 (2000), 84-104.

[15] Кузнецов Д.Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. 2. С.-Петербург, Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 764 с.

[16] Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. Изд. 4-е. С.-Петербург, Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 816 с.

[17] Kuznetsov D.F. Strong approximation of multiple Ito and Stratonovich stochastic integrals: multiple Fourier series approach. 2nd Ed. St.-Petersburg, Polytech. Univ. Publ. House, 2011, 284 p.

[18] Kuznetsov D.F. Multiple Ito and Stratonovich stochastic integrals: approximations, properties, formulas. St.-Petersburg, Polytech. Univ. Publ. House, 2013. 382 p.

[19] Kuznetsov D.F. Multiple Ito and Stratonovich stochastic integrals: Fourier-Legendre and trigonometric expansions, approximations, formulas. *Electronic Journal "Differential Equations and Control Processes".* 2017, no. 1, P. A.1 - A.385. Available at:
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov_book2.pdf

[20] Старченко Т.К. Об условиях сходимости двойных рядов Фурье-Лежандра. *Труды института математики НАН Беларуси. Аналитические*

методы анализа и дифференциальных уравнений. Минск. 5 (2000), 124-126.

[21] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. Изд. 3-е (перераб. и дополн). М.: Физматлит, 2005. 480 с.

[22] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. Москва, Наука, 1973. 448 с.

[23] Жижиашвили Л.В. Сопряженные функции и тригонометрические ряды. Тбилиси, Изд-во Тбил. ун-та, 1969. 271 с.

[24] Hobson E.W. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931. 502 p.