ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2008
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Новые книги

Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения

Д.Ф.Кузнецов
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
e-mail: sde_kuznetsov@inbox.ru

1 Из предисловия к монографии [1]

Настоящая монография [1] посвящена проблеме численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. Всвязи с этим следует особо отметить три монографии [2–4], в которых приводится систематическое изложение данной проблемы. Сначала скажем несколько слов о численном подходе, который применяется к стохастическим дифференциальным уравнениям во всех четырех книгах, а затем поясним существенные отличия монографии [1] от книг [2–4].

Кратко коснемся известных численных подходов к стохастическим системам и поясним преимущества выбранного в книгах [1–4] направления.

Хорошо известен достаточно общий метод В. Бьюси [5], которым может быть численно исследован широкий класс стохастических систем с использованием метода Монте–Карло. Этот метод, в силу большой общности, недостаточно эффективен в рамках специфической проблемы численного решения стохастических дифференциальных уравнений, поскольку он ориентируется на общие свойства стохастических систем и, в силу этого, не учитывает специфическую структуру стохастических дифференциальных уравнений, характеризуемую их коэффициентами диффузии и сноса.

Другой известный численный подход Г.Дж. Кушнера [6] к стохастическим системам основывается на дискретизации как временной переменной, так и пространственных переменных. В результате такой дискретизации аппроксимации случайных процессов превращаются в цепи Маркова с конечным числом состояний. При численной реализации этого подхода приходится иметь дело с матрицами перехода цепей Маркова, использование которых приводит к значительным вычислительным затратам, вследствие чего данный подход применим к задачам с небольшой размерностью пространства состояний.

В книгах [1–4] интенсивно развивается перспективный подход к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанный на стохастических аналогах формулы Тейлора для решений данных уравнений. Этот подход использует конечную дискретизацию временной переменной и осуществляет численное моделирование решения стохастического дифференциального уравнения в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов формулы Тейлора.

Принципиальной особенностью такого подхода является то, что переменные состояния в нем, в отличие от упоминавшегося подхода Г.Дж. Кушнера, не дискретизуются.

Необходимо отметить, что при этом вычислительные затраты (время и память) растут полиномиально, как отмечается в книге [3], с увеличением размерности задачи, что позволяет говорить о вычислительных резервах данного подхода.

Важнейшей отличительной особенностью стохастических аналогов формулы Тейлора для решений стохастических дифференциальных уравнений Ито является присутствие в них, так называемых, повторных стохастических интегралов в форме Ито или Стратоновича, которые являются функционалами сложной структуры относительно компонент векторного винеровского процесса.

В наиболее общей форме записи в книге [1] указанные повторные стохастические интегралы в форме Ито имеют следующий вид:

$$\int\limits_t^T \psi_k(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

где $\psi_l(\tau),\ l=1,\ldots,k,$ — непрерывные на промежутке $[t,T]$ функции (как правило в приложениях они тождественно равны 1 или имеют полиномиальный вид; $\mathbf{w}_t$ — случайный вектор с $m+1$ компонентой вида: $\mathbf{w}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, m$ и $\mathbf{w}_t^{(0)} = t$; величины $i_1, \ldots, i_k$ принимают значения $0,\ 1, \ldots, m$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы.

Ввиду сказанного выше, системы повторных стохастических интегралов Ито играют исключительно важную и, пожалуй, ключевую роль при решении проблемы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и являются, своего рода, блоками, на которые распадается или которые формируют "винеровский хаос порожденный решением стохастического дифференциального уравнения Ито.

Проблема совместного численного моделирования (исходя из среднеквадратического критерия сходимости) совокупностей повторных стохастических интегралов Ито помимо своей важности является и исключительно сложной как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения. Исключение составляет лишь узкий частный случай, когда $i_1 = \ldots = i_k \neq 0$ и $\psi_1(s), \ldots, \psi_k(s) \equiv \psi(s)$. Изучение этого случая возможно с помощью формулы Ито.

Данная проблема оказалась гораздо сложнее (она не может быть решена с помощью формулы Ито и требует более глубокого и сложного исследования) для случая, когда не все числа $i_1, \ldots, i_k$ совпадают между собой. Заметим, что даже в случае такого совпадения: $i_1 = \ldots = i_k \neq 0$ (при различных $\psi_1(s), \ldots, \psi_k(s)$) указанная проблема сохраняется и не очень сложные совокупности повторных стохастических интегралов Ито, которые часто встречаются в приложениях, не могут быть выражены в конечной форме (при среднеквадратической аппроксимации) через систему стандартных гауссовских случайных величин. Формула Ито также не "спасает"в этом случае, в результате приходится прибегать к сложным разложениям.

Поскольку стохастические дифференциальные уравнения Ито являются адекватными математическими моделями динамических систем различной физической природы, находящихся под воздействием случайных возмущений [1, 3], то, в некотором смысле, указанные повторные стохастические интегралы Ито описывают, в определенном приближении, упомянутые природные процессы. Этим обуславливается важность задачи совместной аппроксимации систем повторных стохастических интегралов Ито.

Почему же задача среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито столь сложна?

Во-первых, указанные интегралы при фиксированных пределах интегрирования являются случайными величинами, плотности распределения которых, в общем случае неизвестны, да и вряд ли они принесли бы пользу, скажем, для среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Во-вторых, требуется аппоксимировать не один стохастический интеграл, а совместно несколько различных стохастических интегралов, которые зависимы, в вероятностном смысле, сложным образом.

Обозначенная проблема является действительно проблемой как в случае векторного, так и скалярного стохастического возмущения даже для стохастических дифференциальных уравнений с точно известными решениями, т.е., зная точное решение, далеко не всегда возможно его смоделировать численно без привлечения численного моделирования повторных стохастических интегралов.

Существуют два основных критерия сходимости численных методов для стохастических дифференциальных уравнений: сильный или среднеквадратический критерий и слабый критерий, в котором аппроксимируется не само решение стохастического дифференциального уравнения, а математическое ожидание от некоторой гладкой функции от решения стохастического дифференциального уравнения в фиксированный момент времени, т.е. упрощенно говоря, аппроксимируется распределение решения стохастического дифференциального уравнения.

Поскольку сильные численные методы, т.е. построенные в соответствии с сильным критерием сходимости, используют много информации о решении стохастического дифференциального уравнения (в отличии от слабых численных методов, построенных в соответствии со слабым критерием сходимости), то они оказываются существенно сложнее, чем слабые численные методы.

Оба упомянутых критерия являются самостоятельными, т.е. в общем случае нельзя утверждать, что из выполнения сильного критерия следует выполнение слабого критерия и наоборот.

Каждый из двух критериев сходимости ориентирован на решение специфических классов математических задач, связанных со стохастическими дифференциальными уравнениями.

С помощью сильных численных методов можно качественно численно строить отдельные выборочные траектории решения стохастического дифференциального уравнения. Именно эти численные методы требуют совместной среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито, что, как уже отмечалось, является сложной проблемой.

Ввиду сказанного, сильные численные методы применяются при построении новых математических моделей на основе стохастических дифференциальных уравнений, численном решении задачи фильтрации сигнала на фоне случайной помехи в различных постановках (линейная фильтрация Калмана – Бьюси, нелинейная оптимальная фильтрация, фильтрация марковской цепи с непрерывным временем и конечным пространством состояний и т.д.), задачи стохастического оптимального управления, задачи тестирования процедур оценивания параметров стохастических систем и др.

Основным применением слабых численных методов является их применение к численному решению задач математической физики (задачи Коши, Дирихле и Неймана для уравнений в частных производных второго порядка), причем данные численные методы способны преодолеть, в силу своей экономичности, так называемое "проклятие размерности"при размерности пространственной пременной $n > 3$. Как известно, сеточные численные методы, которые не используют сведений из теории вероятностей, ведут при $n > 3$ к гигантскому объему вычислений. Слабые численные методы применяются и при численном решении некоторых других задач, например, задачи о стохастической устойчивости.

Теперь скажем несколько слов об отличиях книг [1–4] друг от друга.

Небольшая монография [2] является первой монографией в мире по численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений, в которой систематически изучаются сильные и слабые численные методы, причем понятие слабого численного метода было впервые введено автором монографии [2].

Книга [4] условно состоит из двух частей. Первая содержит результаты книги [2] по численным методам для стохастических дифференциальных уравнений в дополненной форме, а вторая и большая часть посвящена преимущественно численному решению задач математической физики с помощью слабых численных методов.

Авторы книг [2] и [4] отмечают сложность проблемы аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и, в силу этого, тяготеют к задачам (безусловно важным с практической точки зрения), в которых указанная проблема сводится к минимуму (стохастические дифференциальные уравнения со скалярным шумом или с векторным, но аддитивным шумом, стохастические дифференциальные уравнения с малым параметром и т.д.).

В книгах [2] и [4] разобран вопрос о среднеквадратической аппроксимации только двух простейших повторных стохастических интегралов Ито первой и второй кратностей ($k = 1$ и 2; $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s) \equiv 1$) для многомерного случая: $i_1,\ i_2 = 0,\ 1, \ldots, m$. При этом, основная идея основана на разложении, так называемого, процесса броуновского моста в ряд Фурье. Данный метод назван в [2] методом Фурье.

В монографии [3] дается большее по объему, чем в [2, 4] и выдержанное в пропорциональном отношении между сильными и слабыми численными методами изложение. Авторы уделяют примерно одинаковое внимание как сильным, так и слабым численным методам, а также их приложениям.

В [3] методом Фурье предпринята попытка среднеквадратической аппроксимации простейших повторных стохастических интегралов первой, второй и третьей кратности ($k = 1, \ldots, 3$; $\psi_1(s), \ldots, \psi_3(s) \equiv 1$) для многомерного случая: $i_1, \ldots, i_3 = 0,\ 1, \ldots, m$.

Идеология книги [1] отличается от идеологии монографий [2–4]. В данной книге уделяется существенно большее внимание сильным численным методам и, как следствие, проблеме среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито (этим попросам посвящены по меньшей мере восемь глав книги [1]: 5 – 9, 13 – 15), нежели слабым численным методам (этим вопросам полностью посвящены только две главы в [1]: 10 и 16). В главах 11 и 12 [1] затрагиваются вопросы, связанные как с сильными, так и со слабыми численными методами.

Одной из основных целей монографии [1] является развеять сложившееся представление о том, что проблемой среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито не стоит заниматься в большем объеме, чем в книгах [2–4], поскольку она является слишком сложной, а для некоторых приложений достаточно тех результатов, которые уже получены в данном направлении в [2–4].

Автор монографии [1] не вполне согласен с обоими приведенными доводами.

Во-первых, в [1] (главы 5 и 6) предложен новый мощный метод среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито, который основан на обобщенных кратных рядах Фурье (сходящихся в среднем) и по многим показателям (см. ниже) превосходит метод Фурье из [2–4]. Более того, данный метод мало чувствителен к кратности повторного стохастического интеграла Ито и делает процедуры аппроксимации и оценки погрешности весьма прозрачными и удобными в применении на практике.

Во-вторых, стохастические дифференциальные уравнения, как математический объект, существуют лишь несколько десятилетий и процесс построения новых и все более сложных математических моделей на их основе весьма бурно протекает в настоящее время. В силу этого, эффективные методы среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито (в том числе кратностей выше третьей), как средство более глубокого изучения математических моделей и более эффективного численного решения задач на основе стохастических дифференциальных уравнений, востребованы уже сейчас и интерес к ним будет, по мнению автора, только расти.

Есть еще одно отличие монографии [1] от книг [2–4].

В книге [1] подробно рассмотрены стационарные системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (ССЛСДУ), которые весьма часто встречаются в приложениях. Помимо своей важности для приложений ССЛСДУ допускают построение специальных и особенно эффективных численных методов своего решения, которые не используют численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито и основаны на интегральном представлении решения ССЛСДУ в форме Коши. Кроме того, указанные численные методы весьма "спокойно"реагируют на повышение размерности системы стохастических дифференциальных уравнений. В подтверждение этого в главе 13 [1] приводится текст программы в системе MATLAB 7.0, которая позволяет численно моделировать решения ССЛСДУ общего вида, при этом допускается выбор размерности вектора состояния (решения) ССЛСДУ, размерности векторного винеровского процесса (стохастического возмущения) и размерностей матриц правой части ССЛСДУ.

В монографиях [2–4] данный вопрос не рассматривается. По-видимому это обстоятельство объясняется тем, что с теоретической точки зрения численное интегрирование ССЛСДУ не является серьезной проблемой и, вследствие этого, этот вопрос не попадает в поле зрения даже специалистов по проблеме численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. Однако, когда дело доходит до практической реализации все оказывается не так просто [1] (главы 11 и 13).

Если говорить более подробно об истории решения проблемы среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов, то оказалась разумной идея отыскания неких базисов случайных величин, с помощью которых можно представлять интересующие нас совокупности повторных стохастических интегралов. Эта идея претерпевала с течением времени ряд трансформаций.

Пожалуй до середины 80-х годов XX века осуществлялись попытки аппроксимировать повторные стохастические интегралы с помощью разного рода интегральных сумм, т.е. промежуток интегрирования стохастического интеграла разбивался на n частей и повторный стохастический интеграл приближенно представлялся повторной интегральной суммой, в которую входила система независимых стандартных гауссовских случайных величин, численное моделирование которой не является проблемой.

Однако, очевидно, что промежуток интегрирования повторных стохастических интегралов есть не что иное, как шаг интегрирования численного метода, который и без дополнительного дробления уже является достаточно малой величиной. Численные эксперименты показывают, что такой подход ведет к резкому увеличению вычислительных затрат при росте кратности стохастических интегралов, что необходимо для построения более точных численных методов или при уменьшении шага интегрирования численного метода и, в силу этих причин, не выдерживает критики.

Новый шаг в направлении решения проблемы среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов был сделан Г.Н.Мильштейном в монографии [2], который предложил использовать сходящиеся в среднеквадратическом смысле тригонометрические разложения Фурье для винеровских процессов, по которым вычисляется повторный стохастический интеграл. В [2] данным методом получены разложения в ряды из независимых стандартных гауссовских случайных величин двух простейших стохастических интегралов 1 и 2 кратности и доказана их сходимость в среднеквадратическом смысле.

Эта идея была развита в монографии [3] где были получены разложения и сходящиеся в среднеквадратическом смысле аппроксимации простейших повторных стохастических интегралов 1–3 кратности. Однако, в силу ряда ограничений и технических трудностей присущих методу [2], в [3] и последующих публикациях, рассматриваемая проблема дальнейшего решения не получила. Кроме того, у автора вызывает обоснованное сомнение трактовка в [3] способа суммирования рядов, относящихся к интегралам 3 кратности (см. разд. 6.8.4 [1]). Этих результатов оказалось достаточно для построения в упомянутых монографиях сильных численных методов порядков точности 1.0 и 1.5 для стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом. Важно отметить, что уже метод [2] в разы, а то и на порядки, превзошел метод интегральных сумм по вычислительным затратам в смысле их уменьшения.

Помимо позитивных черт метода [2], наметился и ряд его существенных недостатков, которые перечислены ниже.

Прорывом, на взгляд автора, на пути решения проблемы среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов является предложенный им в [1] метод (далее метод, основанный на кратных рядах Фурье).

Идея данного метода состоит в следующем: повторный стохастический интеграл Ито представляется в виде кратного стохастического интеграла от специальной неслучайной разрывной функции k переменных, определенной на гиперкубе $[t,T]^k$, где k — кратность стохастического интеграла Ито, $[t,T]$ — его промежуток интегрирования. Далее указанная неслучайная функция разлагается в гиперкубе в обобщенный кратный ряд Фурье, сходящийся в среднем в пространстве $L_2([t,T]^k)$. После ряда преобразований приходим к сходящемуся в среднеквадратическом смысле разложению повторного стохастического интеграла Ито в кратный ряд из произведений независимых стандартных гауссовских случайных величин (коэффициентами данного ряда являются коэффициенты обобщенного кратного ряда Фурье для упоминавшейся неслучайной функции нескольких переменных, которые вычисляются по явной формуле независимо от кратности стохастического интеграла).

В результате мы получаем следующие новые возможности и преимущества [1] по сравнению с методом Фурье из [2]:

1. Имеется явная формула для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности k. Иными словами мы можем вычислить (без какой-либо подготовительной и дополнительной работы) коэффициент разложения с любым фиксированным номером в разложении повторного стохастического интеграла заданной фиксированной кратности, например, коэффициент с номером 123456 в разложении стохастического интеграла шестой кратности. При этом нам не потребуется знаний о коэффициентах с другими номерами или о других стохастических интегралах, входящих в рассматриваемую совокупность.

2. Открываются новые возможности для точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов. Эти возможности реализуются точными формулами (см. главу 6 [1]) для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций повторных сто-

хастических интегралов. В результате не потребуется учитывать избыточные члены разложения, что усложнило бы численные методы.

3. Поскольку используемый кратный ряд Фурье является обобщенным в том смысле, что он строится с использованием различных полных ортонормированных систем функций в пространстве $L_2([t, T])$, то появляются новые возможности для аппроксимации — можно использовать не только тригонометрические функции [2], но и полиномы Лежандра, а также системы функций Хаара и Радемахера–Уолша [1].

4. Как оказалось, работать при построении аппроксимаций повторных стохастических интегралов, удобнее всего именно с полиномами Лежандра — существенно проще вычислять коэффициенты кратного ряда Фурье (используется по сути только формула первообразной для степенной функции с целым неотрицательным показателем; при работе с тригономерическими функциями это не так — скажем при вычислении интеграла от произведения синуса на косинус с аргументами nt и mt соответственно $(n, m = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ мы уже получим три существенно различных первообразных в случаях: $n - m \neq 0, n + m \neq 0; \quad n - m = 0, n + m \neq 0; \quad n - m = 0, n + m = 0)$. Кроме того, сами аппроксимации по виду получаются гораздо проще при использовании полиномов Лежандра. Это связано с тем, что система полиномов Лежандра более однородна в том смысле, что каждая ее функция — многочлен. Тригонометрическая же система устроена сложнее — первая ее функция является многочленом нулевой степени, остальные представляют собой две бесконечные серии синусов и косинусов соответственно. Для систем функций Хаара и Радемахера–Уолша разложения повторных стохастических интегралов получаются пожалуй чересчур сложными (см. главу 5 [1]).

5. Вопрос о том, какая же система функций полиномиальная или тригонометрическая удобнее с точки зрения вычислительных затрат на аппроксимацию повторных стохастических интегралов оказался [1] не простым, поскольку требуется сравнивать аппроксимации не одного интеграла, а нескольких интегралов одновременно. При этом может случиться так, что для одних интегралов вычислительные затраты окажутся меньше для полиномов Лежандра, а для других для тригонометрических функций. Отметим, что сами формулы для полученных аппроксимаций достаточно громоздки, но существенно проще для системы полиномов Лежандра. Автор (см. нижние строки таблиц 6.43 и 6.44 [1]) считает, что вычислительные затраты в 3 раза меньше для полиномов Лежандра по крайней мере при аппроксимации совокупности повторных стохастических интегралов 1–3 кратности, необходимых для

построения сильного численного метода порядка точности 1.5 для стохастического дифференциального уравнения Ито с многомерным шумом (в монографии [1] все примеры численного моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений реализованы впервые с применением системы полиномов Лежандра).

6. Метод Г.Н. Мильштейна приводит к повторным рядам (в противоположность кратным рядам из теоремы 5.1 [1]) начиная по меньшей мере с третьей кратности повторного стохастического интеграла (здесь имеется ввиду не менее чем трехкратное интегрирование по винеровским процессам). Кратные ряды гораздо более предпочтительны с точки зрения аппроксимации, чем повторные, поскольку, частичные суммы кратных рядов сходятся при любом способе одновременного стремления к бесконечности их верхних пределов суммирования (обозначим их $p_1, \ldots, p_k$). В частности, в наиболее простом и удобном для практики случае при $p_1 = \ldots = p_k = p \to \infty$. Для повторных рядов это очевидно не так, хотя в [3] эти выводы игнорируются.

7. Доказана сходимость (см. разд. 6.7 [1]) в среднем степени $2n$, $n \in N$ аппроксимаций из теоремы 5.1 [1] и с вероятностю 1 для некоторых из этих аппроксимаций.

Отметим, что книга [1] не претендует на полное прояснение всего круга вопросов, связанного с обсуждаемой проблемой, однако автор надеется, что монография вносит существенный вклад в развитие теории (главным образом среднеквадратической) и практики численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и делает данную проблему во многих отношениях достаточно прозрачной.

В заключении данного раздела скажем несколько слов о содержании и некоторых особенностях книги [1].

Монография [1] является своего рода уникальным изданием. В ней, как нигде полно, освещена проблема аппроксимации (в основном среднеквадратической) повторных стохастических интегралов применительно к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений, причем центральное место в этой части книги занимают полученные автором результаты, которые могут расцениваться как отдельная теория (главы 5 и 6 [1]).

Монография [1] может рассматриваться как энциклопедия, не имеющая аналогов на русском языке, по численным методам и схемам для стохастических дифференциальных уравнений.

По охвату приложений и численным примерам решения математических задач, связанных со стохастическими дифференциальными уравнениями книга [1] также занимает видное место.

Изложение подробно и доступно, несмотря на достаточно высокую степень новизны изучаемой проблемы (проблема численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений получила интенсивное развитие лишь в 80-х годах XX века) и ее высокую "формулоемкость"(такова специфика указанной проблемы).

Коснемся содержания монографии [1] по главам.

Книга [1] состоит из четырех частей, разделенных на 17 глав.

Часть I [1] содержит две вводные главы. В главе 1 [1] приводятся необходимые в дальнейшем сведения из теории стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. В главе 2 [1] рассмотрены математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Приведены примеры физических и технических систем, описываемых данными математическими моделями. Показано (см. разд. 2.1.1 [1]), что системы стохастических дифференциальных уравнений с цветным шумом в ряде случаев могут быть сведены к системам стохастических дифференциальных уравнений Ито более высоких размерностей. Рассмотрен также ряд математических задач, в которых встречается необходимость численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

В часть II книги [1] входят четыре главы (главы 3–6), в которых представлены теоретические результаты, положенные в основу численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений.

Глава 3 монографии [1] знакомит с некоторыми свойствами стохастических интегралов. В частности, рассмотрена новая технология замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу (подробно рассмотрен случай стохастических интегралов Ито) и выведены соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито произвольной кратности k. Приведена таблица стохастических интегралов.

Глава 4 [1] посвящена стохастическим аналогам разложения Тейлора для процессов Ито. В ней представлены как известные стохастические разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, так и четыре новых и весьма неожиданных представления разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, названных автором унифицированными. Унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича строятся с помощью введенной им технологии замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах и минимизируют общее число различных повторных стохастических интегралов, входящих в разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, которые изучались в [2, 3].

В главе 5 книги [1] рассматриваются сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения повторных стохастических интегралов в кратные ряды из произведений независимых стандартных гауссовских случайных величин, которые основаны на обобщенных кратных рядах Фурье. Об этом подробно говорилось выше.

Глава 6, завершающая часть II монографии [1], посвящена методам сильной и слабой аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, входящих в разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича соответственно. На результатах главы 5 [1] в главе 6 [1] предложен метод сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным в пространстве $L_2([t,T])$ системам функций. Данный метод обладает рядом новых возможностей (о них говорилось выше) по сравнению с методом Г. Н. Мильштейна [2], который до настоящего времени считался общепризнанным и наиболее эффективным для сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов.

В части III книги [1] (главы 7–12) приведены различные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений.

В главах 7–9 [1] представлены явные и неявные одношаговые, двухшаговые и трехшаговые, в том числе конечно - разностные (типа Рунге – Кутта) сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито порядка точности 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 и 3.0. Значительная часть из приведенных численных методов является новой вследствие использования унифицированных разложений Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича, метода сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанного на кратных рядах Фурье, а также новых конечно - разностных аппроксимаций частных производных функций, входящих в правую часть соответствующего стохастического дифференциального уравнения.

Глава 10 [1] посвящена слабым численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Большая часть представленных в этой главе результатов принадлежит другим авторам [2, 3] (см. также библиографию к [1–4]). Однако здесь предложено также несколько новых слабых численных методов.

В главе 11 [1] рассматриваются методы численного интегрирования систем линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений Ито, которые основываются на точном интегральном представлении решений этих линейных систем. Один из предложенных методов строится на спектральном разложении дисперсионной матрицы стохастической составляющей решения системы линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений, а другой — на аппроксимации указанной стохастической составляющей при помощи кусочно - постоянных случайных процессов. Поясняется также, как численно решать стационарные линейные стохастические системы в соответствии с общей теорией для нелинейных стохастических систем.

Глава 12, завершающая часть III монографии [1], содержит общие представления сильных и слабых явных одношаговых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой. При написании данной главы автор опирался на результаты других авторов [7]. При этом новизна результатов, представленных в главе 12 [1], обусловлена выбором способа численного моделирования решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой на промежутках времени между скачками, на которых данное уравнение превращается в стохастическое дифференциальное уравнение Ито.

В части IV книги [1] (главы 13–17) представлены примеры численного моделирования и тексты программ в системе MATLAB 7.0.

В главе 13 [1] приведен текст программы в системе MATLAB 7.0 для численного решения стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито, которая реализует алгоритмы из главы 11 [1]. Приводятся примеры численного моделирования систем второго и шестого порядка с помощью указанных алгоритмов.

Глава 14 [1] содержит примеры численного моделирования выборочных траекторий решений нелинейных систем стохастических дифференциальных уравнений Ито второго и третьего порядка. При численном моделировании впервые применена аппроксимация повторных стохастических интегралов, основанная на кратных рядах Фурье по полиномиальной системе функций.

Содержание главы 15 книги [1] составляют примеры численного решения математических задач с использованием сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрены задачи тестирования процедур оценивания параметров, фильтрации марковской цепи с непрерывным временем и конечным числом состояний, линейной фильтрации Калмана – Бьюси, нелинейной оптимальной фильтрации, оптимального стохастического управления.

Материал 16 главы монографии [1] составляют примеры численного решения математических задач с использованием слабых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрена задача о вычислении наибольшего стохастического ляпуновского показателя, а также примеры численного решения задачи Коши для уравнений в частных производных параболического типа, основанные на вероятностных представлениях решений данных задач.

В заключительной 17 главе [1] приведены тексты программ в системе MATLAB 7.0, которые реализуют численные эксперименты по тексту книги в целом.

2 Оглавление монографии [1]

7.4.1. Метод порядка точности r/2. Теорема о сходимости

7.4.2. Метод порядка точности 1.5

7.4.3. Метод порядка точности 2.0

7.4.4. Метод порядка точности 2.5

7.4.5. Замечание об особенностях численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена

7.5. Явные одношаговые методы, основанные на разложении Тейлора-Стратоновича в форме Клоедена и Платена

7.5.1. Метод порядка точности r/2. Теорема о сходимости

7.5.2. Метод порядка точности 1.0

7.5.3. Метод порядка точности 1.5

7.5.4. Метод порядка точности 2.0

7.5.5. Метод порядка точности 2.5

7.6. Явные одношаговые методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Стратоновича

7.6.1. Метод порядка точности r/2. Теорема о сходимости

7.6.2. Метод порядка точности 1.5

7.6.3. Метод порядка точности 2.0

7.6.4. Метод порядка точности 2.5

7.6.5. Метод порядка точности 3.0

7.7. Явные одношаговые конечно-разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора – Ито

7.7.1. Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций

7.7.2. Метод порядка точности 1.0

7.7.3. Методы порядка точности 1.5

7.7.4. Методы порядка точности 2.0

7.7.5. Методы порядка точности 2.5

7.7.6. О сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов

7.8. Об ослаблении достаточных условий сходимости численных методов

ниях Тейлора – Ито

9.4.1. Методы порядка точности 1.0 и 1.5

9.4.2. Метод порядка точности 2.0

9.5. Общие представления двухшаговых методов

9.6. Явные и неявные, в том числе конечно-разностные, трехшаговые численные методы, основанные на разложениях Тейлора-Ито

9.6.1. Методы порядка точности 1.0

9.6.2. Методы порядка точности 1.5

9.7. Об устойчивости численных методов

Глава 10. Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

10.1. Слабая сходимость и тестирование слабых численных методов

10.2. Явные слабые численные методы

10.2.1. Явный метод Эйлера

10.2.2. Метод порядка точности 2.0

10.2.3. Методы порядка точности 3.0

10.2.4. Методы порядка точности 4.0

10.3. Теорема о сходимости слабых численных методов

10.4. Экстраполяционные численные методы

10.5. Явные слабые конечно-разностные численные методы

10.6. Неявные слабые численные методы

10.6.1. Неявные методы Эйлера

10.6.2. Методы порядка точности 2.0

10.6.3. Конечно-разностные методы порядка точности 2.0

10.7. Численные методы типа "предсказатель–корректор"

10.8. О сходимости слабых численных методов

10.9. Устойчивость слабых численных методов в случае мультипликативного шума

10.10. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений с использованием метода Монте-Карло и уменьшение дисперсии

Глава 11. Численное моделирование решений стационарных систем ли-

3 Где можно ознакомиться с полным текстом или преобрести монографию [1]

По вопросам преобретения монографии [1]: *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2007. 800 с. (второе издание) обращаться к автору книги по электронной почте: sde_kuznetsov@inbox.ru.

Информацию о библиотеках России и стран ближнего зарубежья, в которых находятся твердые копии монографии [1], а также информацию о книжных магазинах, где можно преобрести книгу [1], можно найти на сайте: www.sde-kuznetsov.spb.ru

Литература

[1] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического уни-

верситета, 2007. 800 с. (второе издание).

[2] *Milstein G.N.* Numerical integration of stochastic differential equations. Kluwer, 1995, 228 p. (перевод с издания на русском языке, 1988).

[3] *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 632 p. (2nd edition 1995, 3rd edition 1999).

[4] *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 596 p.

[5] *Boyce W. E.* Approximate solution of random ordinary differential equations // Adv. in Appl. Probab. 1978. N 10. P. 172–184.

[6] *Кушнер Г. Дж.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985. 222 с.

[7] *Mikulevicius R., Platen E.* Time discrete Taylor approximations for Ito processes with jump component // Math. Nachr. 1988. Bd 138. S. 93–104.