ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2019
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Стохастические дифференциальные уравнения
Моделирование динамических систем

Аппроксимация повторных стохастических интегралов Ито второй кратности, основанная на разложении винеровского процесса с помощью полиномов Лежандра и тригонометрических функций

Д.Ф. Кузнецов

Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
Email: sde_kuznetsov@inbox.ru

Аннотация

Статья посвящена среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито второй кратности, основанной на разложении винеровского процесса с помощью полных ортонормированных систем функций. Рассмотрены аппроксимации указанных стохастических интегралов с помощью полиномов Лежандра и тригонометрических функций. В отличие от метода аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанного на разложении Карунена–Лоэва для винеровского процесса, рассматриваемый метод позволяет использовать различные системы базисных функций, а не только тригонометрическую систему функций. Предложенный метод позволяет получать аппроксимации стохастических интегралов существенно проще, чем методы, основанные на обобщенных кратных рядах Фурье. Последние предполагают вычисление коэффициентов кратных рядов Фурье, что является трудоемкой задачей. Полученные результаты могут быть применены к реализации метода Мильштейна для численного интегрирования стохастических дифференциальных уранений Ито и полулинейных параболических стохастических дифференциальных уравнений с частными производными.

Ключевые слова: повторный стохастический интеграл Ито, стохастическое дифференциальное уравнение Ито, среднеквадратическая аппроксимация, метод Мильштейна, полная ортонормированная система функций, полином Лежандра, разложение

Abstract

The article is devoted to the mean-square approximation of iterated Ito stochastic integrals of the second multiplicity based on the Wiener process expansion using complete orthonormal systems of functions. The approximations of these stochastic integrals using Legendre polynomials and trigonometric functions are considered. In contrast to the method of expansion of iterated Ito stochastic integrals based on the Karhunen-Loeve expansion for the Wiener process, this method allows the use of different systems of basis functions, not only the trigonometric system of functions. The proposed method makes it possible to obtain expansions of stochastic integrals much easier than the methods based on generalized multiple Fourier series. The latter involve the calculation of coefficients of multiple Fourier series, which is a time-consuming task. The results of the article can be applied to the implementation of the Milstein method for the numerical integration of Ito stochastic differential equations and semilinear parabolic stochastic partial differential equations.

Keywords: iterated Ito stochastic integral, Ito stochastic differential equation, mean-square approximation, Milstein method, complete orthonormal system of functions, Legendre polynomial, expansion

1 Введение

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathrm{F},\ \mathsf{P})$, неубывающая совокупность σ-алгебр $\{\mathrm{F}_t, t\in[0,T]\}$ на нем и F_t-измеримый при всех $t\in[0,T]$ m-мерный стандартный винеровский процесс $\mathbf{w}_t$, $t\in[0,T]$ с независимыми компонентами $\mathbf{w}_t^{(i)}$, $i=1,\ldots,m$. Будем предполагать, что приращения $\mathbf{w}_{t+\Delta}-\mathbf{w}_t$ при всех $t\geq 0$, $\Delta>0$ не зависят от событий σ-алгебры F_t, σ-алгебра F является полной относительно меры P, а σ-алгебра F_0 содержит все события вероятности ноль.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) Ито в интегральной форме

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int\limits_0^t B(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{w}_\tau, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad \omega \in \Omega, \qquad (1)$$

где $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$ — n-мерный случайный процесс, являющийся сильным решением СДУ Ито (1); второй интеграл в правой части (1) — стохастический интеграл Ито; неслучайные функции $\mathbf{a} : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, $B : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n \times m}$ удовлетворяют стандартным условиям существования и единственности сильного решения СДУ Ито (1) [1]; $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_0$ предполагаются независимыми при $t > 0$, причем $\mathbf{x}_0$ — n-мерная F_0-измеримая случайная величина, для которой $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$; M — оператор математического ожидания.

Актуальность проблемы численного интегрирования СДУ Ито вида (1) обуславливается большим кругом математических моделей динамических систем различной физической природы на их основе [2] – [8], а также тем, что СДУ Ито применяются при решении ряда математических задач, таких как задача фильтрации [2], [4], [9] – [11], стохастического оптимального управления [2], [4], [9], оценки параметров стохастических систем [2], [4] и др. Кроме того, хорошо известно, что точности одного из простейших численных методов — метода Эйлера (при стандартных условиях [2], [4], [5], [12]) оказывается, в ряде случаев, недостаточно при численном решении практических задач.

Далее рассмотрим метод Мильштейна [12], который является более точным численным методом для СДУ Ито (1), чем метод Эйлера. Для этого дадим определение порядка среднеквадратической сходимости численного метода.

Рассмотрим разбиение $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ промежутка $[0, T]$ с рангом дробления Δ_N такое, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T$. Через $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$, $p = 0, 1, \ldots, N$ обозначим дискретную аппроксимацию процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, соответствующую максимальному шагу дискретизации Δ_N.

Определение 1 [12] *Будем говорить, что дискретная аппроксимация (численный метод)* $\mathbf{y}_p$, $p = 0, 1, \ldots, N$, *соответствующая максимальному шагу дискретизации* Δ_N, *сходится в среднеквадратическом смысле с порядком* $\gamma > 0$ *к процессу* $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, *если существуют постоянная* $C > 0$, *которая не зависит от* Δ_N *и* p, *а также число* $\delta > 0$ *такие, что*

$$\left(\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_p} - \mathbf{y}_p|^2\}\right)^{1/2} \le C(\Delta_N)^\gamma \qquad (2)$$

для всех $p = 0, 1, \ldots, N$ *и* $\Delta_N \in (0, \delta)$.

В [12] построен численный метод для СДУ Ито (1), который, при подходящих условиях [2], [4] – [7], [12], сходится в среднеквадратическом смысле к решению этого уравнения с порядком точности 1.0, носит название метода Мильштейна и имеет следующий вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i=1}^{m} B_i(\mathbf{y}_p, \tau_p) \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} d\mathbf{w}_\tau^{(i)} + (\tau_{p+1} - \tau_p)\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} B_{ki}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \frac{\partial B_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int\limits_{\tau_p}^{s} d\mathbf{w}_\tau^{(i)} d\mathbf{w}_s^{(j)}, \qquad (3)$$

где B_i — i-й столбец матричной функции B, B_{ki} — ее элемены, а $\mathbf{x}_k$ — k-й элемент столбца $\mathbf{x}$ (предполагается, что существуют все частные производные, входящие в (3)).

В то же время, метод Эйлера для СДУ Ито (1) имеет, при стандартных предположениях [2], [4] – [7], [12], достаточно низкий порядок среднеквадратической сходимости, равный 0.5.

В [2], [4] – [7], [12] построены неявные и многошаговые (двухшаговые и трехшаговые) версии метода Мильштейна, а также его конечно-разностные модификации — стохастические аналоги методов Рунге–Кутты. Отметим, что в последние годы также построен аналог метода Мильштейна для полулинейных параболических СДУ с частными производными [13], [14].

Как следует из (3), для численной реализации метода Мильштейна необходимо аппроксимировать повторные стохастические интегралы Ито вида

$$\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int\limits_{\tau_p}^{s} d\mathbf{w}_\tau^{(i)} d\mathbf{w}_s^{(j)} \quad (i, j = 1, \ldots, m). \qquad (4)$$

Один из подходов к среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито вида (4) основан на аппроксимации с помощью интегральных сумм. В частности, в [5], [12] рассмотрены приближения на основе методов прямоугольников и трапеций. Однако, такой подход подразумевает дробление промежутка интегрирования $[\tau_p, \tau_{p+1}]$, длина которого и без того достаточно мала, поскольку является шагом интегрирования метода Мильштейна. Данное обстоятельство, как показывают численные эксперименты [5], [6], [12], ведет к росту вычислительных затрат и накоплению ошибок округления при уменьшении шага интегрирования, что требуется для получения приемлемой точности вычислений.

Другой и существенно более эффективный класс методов аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито основан на аппарате рядов Фурье и не предполагает дополнительного дробления отрезка $[\tau_p, \tau_{p+1}]$.

В частности, в [12] предложено использовать разложение Карунена–Лоэва для случайного процесса броуновского моста (фактически оно совпадает с разложением в тригонометрический ряд Фурье для указанного случайного процесса) с целью среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито вида (4) (см. также [2], [4], [5], [7], [15]).

В [6], [16] – [20] были применены обобщенные кратные ряды Фурье по произвольным полным ортонормированным в $L_2([t,T]^k)$ системам функций для аппроксимации более общих чем (4) повторных стохастических интегралов Ито k-й кратности вида

$$\int\limits_t^T \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \quad (i_1, \ldots, i_k = 0, 1, \ldots, m), \tag{5}$$

где $\psi_l(\tau)$ $(l = 1, \ldots, k)$ — непрерывные на промежутке $[t,T]$ неслучайные функции, $i_1^2 + \ldots + i_k^2 > 0$, $\mathbf{w}_\tau^{(0)}$ полагается равным τ, $\tau \in [t,T]$.

Заметим, что идея указанного метода [6], [16] – [20] была предложена в [21]. При этом, в [21] применены кратные тригонометрические ряды Фурье для получения разложений повторных стохастических интегралов Ито вида (5) при $\psi_l(\tau) \equiv 1$, $i_l = 1, \ldots, m$ $(l = 1, 2, 3)$ и $i_1 \neq i_2$, $i_1 \neq i_3$, $i_2 \neq i_3$.

В [12] были использованы тригонометрические ряды Фурье (разложение Карунена–Лоэва для случайного процесса броуновского моста), что продиктовано тем обстоятельством, что собственными функциями линейного оператора, который определяется ковариацией случайного процесса броуновского моста, являются тригонометрические функции, образующие полную ортонормированную систему функций в $L_2([t,T])$. В [6], [16] – [20] кратные ряды Фурье напротив строятся по произвольным полным ортонормированным системам функций в $L_2([t,T]^k)$.

Отметим еще три метода среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов, которые используют аппарат рядов Фурье.

Так в [22] (см. также [16], с. A.428 – A.453) предложен метод среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича вида

$$\int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \quad (i_1, \ldots, i_k = 0, 1, \ldots, m), \qquad (6)$$

который основан на повторных рядах Фурье по произвольным полным ортонормированным в $L_2([t, T])$ системам базисных функций. При этом сходимость рядов Фурье понимается поточечно. В (6) сохранен смысл обозначений формулы (5), а "$*$" означает интеграл Стратоновича.

В [16], [23] рассмотрен метод среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (6) при $k = 2$, который основан на двойных рядах Фурье-Лежандра и двойных тригонометрических рядах Фурье, суммируемых по Принсхейму в квадрате $[t, T]^2$.

В [24] применялись разложения винеровского процесса с помощью произвольных полных ортонормированных систем функций в $L_2([0, T])$ для среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито вида (4) при $\tau_p = 0$. При этом, в качестве базисных функций выбирались тригонометрические функции и функции Хаара. Следует отметить, что подход из работы [24] основан на итеративной подстановке указанных разложений винеровского процесса в стохастический интеграл (4) и вычислении коэффициентов Фурье, соответствующих коэффициентам обобщенных двойных рядов Фурье из метода [6], [16] – [21] для случая $k = 2$ и $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau) \equiv 1$.

С одной стороны подход из работы [12] обладает ограничением на выбор системы базисных функций, которого нет в методах из [6], [16] – [24]. Однако, методы [6], [16] – [24] обладают тем недостатком, что для построения аппроксимаций стохастических интегралов вида (5) или (6) требуется выполнять достаточно трудоемкую работу по вычислению коэффициентов кратных или повторных рядов Фурье по выбранной системе базисных функций.

В настоящей статье показывается, что для случая повторных стохастических интегралов Ито второй кратности вида (4) можно избежать обоих указанных недостатков, если использовать разложение винеровского процесса с помощью произвольной полной ортонормированной системы функций в $L_2([t, T])$, но несколько иначе, чем в [24]. А именно, указанное разложение винеровского процесса подставляется только во внутренний интеграл в (4) [25], что позволяет свести проблему среднеквадратической аппроксимации стохастического интеграла (4) к вычислению коэффициентов однократного обобщенного ряда Фурье. В то же время, для среднеквадратической аппроксимации стохастического интеграла (4) с помощью методов [6], [16] – [24] требуется вычисление коэффициентов двойных обобщенных рядов Фурье, что является достаточно трудоемкой задачей. При этом, в качестве примеров базисной системы функций в $L_2([t,T])$, в настоящей статье используются полиномы Лежандра и тригонометрические функции.

2 О представлении винеровского процесса в виде ряда с помощью полных ортонормированных систем функций

Хорошо известно, что идея представления винеровского случайного процесса в виде функционального ряда со случайными коэффициентами, являющимися независимыми стандартными гауссовскими случайными величинами, с помощью полной ортонормированной в $L_2([0,T])$ системы тригонометрических функций восходит к работам Винера [26] (1924) и Леви [27] (1951). Указанный ряд использовался в [26] и [27] для построения случайного процесса броуновского движения (винеровского случайного процесса). Несколько позже Ито и Маккин в работе [28] (1965) использовали для этой цели полную ортонормированную в $L_2([0,T])$ систему функций Хаара.

Пусть $\mathbf{w}_s$, $s \in [0,T]$ — стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{w}_s^{(i)}$, $i = 1,\ldots,m$. Для дальнейшего нам потребуется следующая модификация отмеченного выше разложения

$$\mathbf{w}_s^{(i)} - \mathbf{w}_t^{(i)} = \underset{q\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{q} \int\limits_t^s \phi_j(\tau)d\tau \int\limits_t^T \phi_j(\tau)d\mathbf{w}_\tau^{(i)}, \tag{7}$$

где $0 \le t < s \le T$, а $\phi_j(\tau)$ $(j = 0,1,\ldots)$ — произвольная полная ортонормированная в $L_2([t,T])$ система функций, причем здесь и далее запись l.i.m. означает предел в среднеквадратическом смысле.

Разложение (7) легко выводится с помощью подхода (см., например, [29]), который основан на разложении функции

$$\mathbf{1}_{\{\tau<s\}}=\begin{cases}1 & \text{при } \tau<s\\ \\ 0 & \text{иначе}\end{cases},$$

где $\tau, s\in[t,T]$, в ряд Фурье на промежутке $[t,T]$ по произвольной полной ортонормированной в пространстве $L_2([t,T])$ системе базисных функций $\phi_j(\tau)$ $(j=0,\,1,\,\ldots\,)$.

Действительно, с вероятностью 1 (далее с в. 1) имеем

$$\mathbf{w}_s^{(i)}-\mathbf{w}_t^{(i)}=\int\limits_t^s d\mathbf{w}_\tau^{(i)}=\int\limits_t^T \mathbf{1}_{\{\tau<s\}}d\mathbf{w}_\tau^{(i)}. \tag{8}$$

Далее, с учетом (8), моментных свойств стохастического интеграла Ито и того, что функция $\mathbf{1}_{\{\tau<s\}}$ интегрируема с квадратом на промежутке $[t,T]$ (т. е. ряд Фурье функции $\mathbf{1}_{\{\tau<s\}}$ по системе $\phi_j(\tau)$ $(j=0,1,\ldots)$ сходится к $\mathbf{1}_{\{\tau<s\}}$ на промежутке $[t,T]$ в среднеквадратическом смысле), получим

$$\mathsf{M}\left\{\left(\mathbf{w}_s^{(i)}-\mathbf{w}_t^{(i)}-\sum_{j=0}^q\int\limits_t^s\phi_j(\tau)d\tau\int\limits_t^T\phi_j(\tau)d\mathbf{w}_\tau^{(i)}\right)^2\right\}=$$

$$=\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_t^T\left(\mathbf{1}_{\{\tau<s\}}-\sum_{j=0}^q\phi_j(\tau)\int\limits_t^s\phi_j(\tau)d\tau\right)d\mathbf{w}_\tau^{(i)}\right)^2\right\}=$$

$$=\int\limits_t^T\left(\mathbf{1}_{\{\tau<s\}}-\sum_{j=0}^q\phi_j(\tau)\int\limits_t^T\mathbf{1}_{\{\tau<s\}}\phi_j(\tau)d\tau\right)^2 d\tau\to 0 \tag{9}$$

при $q\to\infty$. Из (9) следует разложение (7).

Отметим, что в [26]–[28] рассматривалось разложение (7) при $t=0$, причем сходимость в нем понималась с в. 1.

3 Разложение повторного стохастического интеграла Ито второй кратности

Докажем следующую теорему о разложении повторного стохастического интеграла Ито второй кратности.

Теорема 1 *Пусть $\phi_j(\tau)$ $(j=0,1,\ldots)$ — произвольная полная ортонормированная система функций в $L_2([t,T])$. Тогда имеет место следующее равенство*

$$\int\limits_t^T\int\limits_t^s d\mathbf{w}_\tau^{(i_1)}d\mathbf{w}_s^{(i_2)}=\underset{q\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \int\limits_t^T\mathbf{w}_{s,t}^{(i_1)q}d\mathbf{w}_s^{(i_2)},\qquad(10)$$

где $i_1,i_2=1,\ldots,m,$ а $\mathbf{w}_{s,t}^{(i_1)q}$ определяется равенством

$$\mathbf{w}_{s,t}^{(i_1)q}=\sum_{j=0}^{q}\int\limits_t^s\phi_j(\tau)d\tau\int\limits_t^T\phi_j(\tau)d\mathbf{w}_\tau^{(i_1)}.\qquad(11)$$

Доказательство. В силу моментных свойств стохастического интеграла Ито, соотношения (9), а также ортонормированности системы функций $\phi_j(\tau)$ $(j=0,1,\ldots)$ на промежутке $[t,T]$, имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_t^T\int\limits_t^s d\mathbf{w}_\tau^{(i_1)}d\mathbf{w}_s^{(i_2)}-\int\limits_t^T\mathbf{w}_{s,t}^{(i_1)q}d\mathbf{w}_s^{(i_2)}\right)^2\right\}=$$

$$=\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_t^T\left(\mathbf{w}_s^{(i_1)}-\mathbf{w}_t^{(i_1)}-\mathbf{w}_{s,t}^{(i_1)q}\right)d\mathbf{w}_s^{(i_2)}\right)^2\right\}=$$

$$=\int\limits_t^T\mathsf{M}\left\{\left(\mathbf{w}_s^{(i_1)}-\mathbf{w}_t^{(i_1)}-\mathbf{w}_{s,t}^{(i_1)q}\right)^2\right\}ds=$$

$$=\int\limits_t^T\int\limits_t^T\left(\mathbf{1}_{\{\tau<s\}}-\sum_{j=0}^{q}\phi_j(\tau)\int\limits_t^s\phi_j(\tau)d\tau\right)^2d\tau ds=$$

$$= \int\limits_t^T \left((s-t) - \sum_{j=0}^{q} \left(\int\limits_t^s \phi_j(\tau) d\tau \right)^2 \right) ds. \tag{12}$$

Согласно равенству Парсеваля, подынтегральное выражение в (12) стремится к нулю при $q \to \infty$. Более того, в силу непрерывности и неубывания членов функциональной последовательности

$$u_q(s) = \sum_{j=0}^{q} \left(\int\limits_t^s \phi_j(\tau) d\tau \right)^2,$$

а также в силу непрерывности предельной функции $u(s) = s - t$, по признаку Дини имеет место равномерная сходимость $u_q(s)$ к $u(s)$ на интервале $[t, T]$ при $q \to \infty$. Тогда из (12) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Заметим, что согласно (10) и (11) при $i_1 \neq i_2$ можно записать

$$\int\limits_t^T \mathbf{w}_{s,t}^{(i_1)q} d\mathbf{w}_s^{(i_2)} = \sum_{j=0}^{q} \zeta_j^{(i_1)} \int\limits_t^T \int\limits_t^s \phi_j(\tau) d\tau d\mathbf{w}_s^{(i_2)}, \tag{13}$$

$$\int\limits_t^T \int\limits_t^s d\mathbf{w}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{w}_s^{(i_2)} = \underset{q\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{q} \zeta_j^{(i_1)} \int\limits_t^T \int\limits_t^s \phi_j(\tau) d\tau d\mathbf{w}_s^{(i_2)}, \tag{14}$$

где случайные величины

$$\zeta_j^{(i)} = \int\limits_t^T \phi_j(\tau) d\mathbf{w}_\tau^{(i)} \quad (i = 1, \ldots, m)$$

образуют систему независимых стандартных гауссовских случайных величин при различных i и j.

Согласно (14), для получения среднеквадратической аппроксимации повторного стохастического интеграла Ито второй кратности достаточно вычислить интеграл

$$\int\limits_t^s \phi_j(\tau) d\tau \quad (j = 0, 1, \ldots).$$

При этом, согласно методу аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанному на обобщенных кратных рядах Фурье [6], [16]

– [20] или методу из работы [24] для получения указанной аппроксимации пришлось бы вычислять коэффициенты

$$C_{kj} = \int\limits_t^T \phi_k(s) \int\limits_t^s \phi_j(\tau) d\tau ds \quad (k, j = 0, 1, \ldots)$$

двойного ряда Фурье, что очевидно является существенно более трудоемкой задачей.

В том случае, когда $i_1 = i_2$ справедлива хорошо известная формула

$$\int\limits_t^T \int\limits_t^s d\mathbf{w}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{w}_s^{(i_1)} = \frac{T-t}{2}\left(\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2 - 1\right) \quad \text{с в. 1}, \tag{15}$$

которая может быть получена с помощью формулы Ито [30].

4 Случай полиномов Лежандра

В данном разделе применим теорему 1 для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито второй кратности для случая, когда $\phi_j(\tau)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в $L_2([t, T])$, которая имеет следующий вид

$$\phi_j(\tau) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j\left(\left(\tau - t - \frac{T-t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right) \quad (j = 0, 1, \ldots), \tag{16}$$

где $P_j(x)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ — полная ортонормированная в $L_2([-1, 1])$ система полиномов Лежандра [31].

Применяя стандартные свойства полиномов Лежандра [31], получим

$$\int\limits_t^s \phi_j(\tau) d\tau = \frac{T-t}{2}\left(\frac{\phi_{j+1}(s)}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} - \frac{\phi_{j-1}(s)}{\sqrt{4j^2-1}}\right), \tag{17}$$

где $j \geq 1$.

Используя (13) и (17), при $i_1 \neq i_2$ находим

$$\int\limits_t^T \mathbf{w}_{s,t}^{(i_1)q} d\mathbf{w}_s^{(i_2)} = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \zeta_0^{(i_1)} \int_t^T (s-t) d\mathbf{w}_s^{(i_2)} +$$

$$
+\frac{T-t}{2}\sum_{j=1}^{q}\zeta_j^{(i_1)}\left(\frac{1}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}}\zeta_{j+1}^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{4j^2-1}}\zeta_{j-1}^{(i_2)}\right)=
$$

$$
=\frac{T-t}{2}\zeta_0^{(i_1)}\left(\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_2)}\right)+
$$

$$
+\frac{T-t}{2}\sum_{j=1}^{q}\zeta_j^{(i_1)}\left(\frac{1}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}}\zeta_{j+1}^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{4j^2-1}}\zeta_{j-1}^{(i_2)}\right)=
$$

$$
=\frac{T-t}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4j^2-1}}\left(\zeta_{j-1}^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}-\zeta_j^{(i_1)}\zeta_{j-1}^{(i_2)}\right)\right)+
$$

$$
+\frac{T-t}{2}\zeta_q^{(i_1)}\zeta_{q+1}^{(i_2)}\frac{1}{\sqrt{(2q+1)(2q+3)}}. \tag{18}
$$

Объединяя (14) и (18), получим следующее представление для случая $i_1\ne i_2$

$$
\int\limits_t^T\int\limits_t^s d\mathbf{w}_\tau^{(i_1)}d\mathbf{w}_s^{(i_2)}=\underset{q\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \frac{T-t}{2}\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+
$$

$$
+\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4j^2-1}}\left(\zeta_{j-1}^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}-\zeta_j^{(i_1)}\zeta_{j-1}^{(i_2)}\right)\Biggr). \tag{19}
$$

Принимая во внимание (15) и (19), для $i_1,i_2=1,\ldots,m$ приходим к следующему равенству

$$
\int\limits_t^T\int\limits_t^s d\mathbf{w}_\tau^{(i_1)}d\mathbf{w}_s^{(i_2)}=\underset{q\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \frac{T-t}{2}\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+
$$

$$
+\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4j^2-1}}\left(\zeta_{j-1}^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}-\zeta_j^{(i_1)}\zeta_{j-1}^{(i_2)}\right)-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Biggr), \tag{20}
$$

где здесь и далее $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A.

Отметим, что аналог разложения (20) для стохастических интегралов Стратоновича впервые был получен в [22] с помощью метода, основанного на обобщенных повторных рядах Фурье–Лежандра, сходимость которых понималась поточечно. В [6], [16] разложение (20) было получено с помощью метода, основанного на обобщенных кратных (двойных) рядах Фурье–Лежандра, сходящихся в смысле нормы в $L_2([t,T]^2)$. В то же время, в работе [23] аналог разложения (20) для стохастических интегралов Стратоновича был выведен с помощью двойных рядов Фурье–Лежандра, суммируемых по Принсхейму в квадрате $[t,T]^2$.

Далее будем через $I_{T,t}^{(i_1 i_2)}$ обозначать повторный стохастический интеграл Ито в левой части (20).

Пусть $I_{T,t}^{(i_1 i_2)q}$ — аппроксимация стохастического интеграла $I_{T,t}^{(i_1 i_2)}$, которая имеет следующий вид

$$I_{T,t}^{(i_1 i_2)q} = \frac{T-t}{2}\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4j^2-1}}\left(\zeta_{j-1}^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}-\zeta_j^{(i_1)}\zeta_{j-1}^{(i_2)}\right)-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Biggr). \qquad (21)$$

Отметим, что в [6], [16] (см. также [22]) получено следующее равенство для среднеквадратической погрешности аппроксимации $I_{T,t}^{(i_1 i_2)q}$ вида (21) повторного стохастического интеграла Ито $I_{T,t}^{(i_1 i_2)}$ при $i_1 \ne i_2$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{T,t}^{(i_1 i_2)}-I_{T,t}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{4j^2-1}\right). \qquad (22)$$

Хорошо известно, что при стандартных условиях [2], [5], [12] метод Мильштейна (3) имеет порядок среднеквадратической сходимости 1.0 в смысле определения 1. Отметим здесь лишь условие на точность среднеквадратической аппроксимации повторного стохастического интеграла $I_{T,t}^{(i_1 i_2)}$. А именно, число q в (22) должно быть выбрано так, чтобы правая часть (22) не превосходила величины $C(T-t)^3$ [2], [5], [12], где постоянная C не зависит от $T-t$ (здесь для простоты мы считаем шаг интегрирования $T-t$ метода Мильштейна постоянным).

5 Случай тригонометрических функций

Пусть теперь $\phi_j(\tau)$ $(j=0,1,\ldots)$ — полная ортонормированная система тригонометрических функций в $L_2([t,T])$, которая имеет следующий вид

$$
\phi_j(s)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\begin{cases} 1 & \text{при } j=0\\ \\ \sqrt{2}\sin(2\pi r(s-t)/(T-t)) & \text{при } j=2r-1\\ \\ \sqrt{2}\cos(2\pi r(s-t)/(T-t)) & \text{при } j=2r \end{cases}, \qquad (23)
$$

где $r=1,\ 2,\ldots$.

Нетрудно заметить, что

$$
\int\limits_t^s \phi_j(\tau)d\tau=\frac{T-t}{2\pi r}\begin{cases} \phi_{2r-1}(s) & \text{при } j=2r\\ \\ \sqrt{2}\phi_0(s)-\phi_{2r}(s) & \text{при } j=2r-1 \end{cases}, \qquad (24)
$$

где $j\ge 1$ и $r=1,\ 2,\ldots$.

С помощью (13), (24) и системы функций (23) при $i_1\ne i_2$ находим

$$
\int\limits_t^T \mathbf{w}_{s,t}^{(i_1)q}d\mathbf{w}_s^{(i_2)}=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\zeta_0^{(i_1)}\int_t^T(s-t)d\mathbf{w}_s^{(i_2)}+
$$

$$
+\frac{T-t}{2}\sum_{r=1}^q\frac{1}{\pi r}\left(\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right)+\sqrt{2}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)=
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\zeta_0^{(i_1)}\frac{(T-t)^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_2)}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)+
$$

$$
+\frac{T-t}{2}\sum_{r=1}^q\frac{1}{\pi r}\left(\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right)+\sqrt{2}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)=
$$

$$
=\frac{1}{2}(T-t)\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^q\frac{1}{r}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\right.
$$

$$
\left.\left.+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right)\right)-
$$

$$
-\frac{T-t}{\pi\sqrt{2}}\zeta_0^{(i_1)}\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}. \qquad (25)
$$

Из (14), (15) и (25) для $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$ окончательно получаем

$$I_{T,t}^{(i_1 i_2)} = \underset{q\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \frac{1}{2}(T-t)\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right) - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Biggr). \qquad (26)$$

Отметим, что разложение (26) было получено в [12] с помощью разложения Карунена–Лоэва для случайного процесса броуновского моста. В [6], [16], [22] указанное разложение было выведено с помощью методов, основанных на кратных и повторных тригонометрических рядах Фурье.

Обозначим через $I_{T,t}^{(i_1 i_2)q}$ аппроксимацию стохастического интеграла $I_{T,t}^{(i_1 i_2)}$, которая имеет следующий вид

$$I_{T,t}^{(i_1 i_2)q} = \frac{1}{2}(T-t)\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right) - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Biggr). \qquad (27)$$

В [6], [16] (см. также [22]) получено следующее равенство для среднеквадратической погрешности аппроксимации $I_{T,t}^{(i_1 i_2)q}$ вида (27) повторного стохастического интеграла Ито $I_{T,t}^{(i_1 i_2)}$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{T,t}^{(i_1 i_2)} - I_{T,t}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} = \frac{3(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right). \qquad (28)$$

Следует отметить, что в [12] предложено использовать вместо аппроксимации $I_{T,t}^{(i_1 i_2)q}$ вида (27) следующее выражение

$$I_{T,t}^{(i_1 i_2)q} = \frac{1}{2}(T-t)\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\mu_q^{(i_2)}\right) - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Biggr), \qquad (29)$$

где случайные величины $\mu_q^{(i)}$ $(i=1,\ldots,m)$ вида

$$\mu_q^{(i)}=\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i)}$$

имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2},$$

а также независимы со случайными величинами $\zeta_{2r-1}^{(i)}$, $\zeta_{2r}^{(i)}$ $(i=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,q)$.

При этом, для аппроксимации $I_{T,t}^{(i_1i_2)q}$ вида (29) при $i_1\ne i_2$ правая часть (28) окажется в 3 раза меньше [12], т. е.

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{T,t}^{(i_1i_2)}-I_{T,t}^{(i_1i_2)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right). \tag{30}$$

Сравним (21) с (29) и (22) с (30). Рассмотрим минимальные натуральные числа $q_{\rm pol}$ и $q_{\rm trig}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\frac{(T-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q_{\rm pol}}\frac{1}{4i^2-1}\right)\le (T-t)^3, \tag{31}$$

$$\frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q_{\rm trig}}\frac{1}{r^2}\right)\le (T-t)^3 \tag{32}$$

при различных значениях $T-t$ (см. табл. 1).

На основании табл. 1 получаем:

$$q_{\rm pol}/q_{\rm trig}\ \approx\ 1.67,\ 2.22,\ 2.43,\ 2.36,\ 2.41,\ 2.43,\ 2.45,\ 2.45.$$

С другой стороны в (29) входят $4q+4$ независимых стандартных гауссовских случайных величин, в то время как в (21) входят $2q+2$ независимых стандартных гауссовских случайных величин. Кроме этого формула (21) проще чем формула (29). Таким образом, в данной ситуации мы можем говорить о примерно одинаковых вычислительных затратах для формул (21) и (29).

Рассмотрим минимальные натуральные числа $q_{\rm trig}^*$, которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{3(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q_{\rm trig}^*}\frac{1}{r^2}\right)\le (T-t)^3 \tag{33}$$

Таблица 1. Числа $q_{\rm trig}$, $q^*_{\rm trig}$, $q_{\rm pol}$

$T-t$	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}	2^{-12}
$q_{\rm trig}$	3	4	7	14	27	53	105	209
$q^*_{\rm trig}$	6	11	20	40	79	157	312	624
$q_{\rm pol}$	5	9	17	33	65	129	257	513

при различных значениях $T-t$ (см. табл. 1). Левая часть (33) соответствует формулам (27) и (28). В этой ситуации можно говорить о преимуществе полиномов Лежандра перед тригонометрическими функциями, поскольку $q^*_{\rm trig} > q_{pol}$ и (27) сложнее, чем (21).

Нетрудно видеть, что разложение стохастического интеграла (см. (25))

$$J_{T,t}^{(i_1)} = \int_t^T (s-t)d\mathbf{w}_s^{(i_1)},$$

имеющего гауссовское распределение и встречающегося при реализации численных методов с порядком среднеквадратической сходимости 1.5 для СДУ Ито [2], [4] – [6], получается слишком сложным при применении тригонометрической системы функций

$$J_{T,t}^{(i_1)} = \frac{(T-t)^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right), \tag{34}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (29).

С другой стороны применение системы полиномов Лежандра приводит к простой формуле (см. (18))

$$J_{T,t}^{(i_1)} = \frac{(T-t)^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right), \tag{35}$$

где $\zeta_0^{(i_1)}$, $\zeta_1^{(i_1)}$ $(i_1 = 1, \ldots, m)$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

Более подробное сравнение эффективности применения полиномов Лежандра и тригонометрических функций при реализации численных методов с порядком среднеквадратической сходимости 1.5 для СДУ Ито приведено в [20].

В [6], [16] с помощью метода, основанного на обобщенных кратных рядах Фурье и в [24] с помощью метода, основанного на разложении винеровского процесса (см. введение) были получены аналоги разложений (20) и (26) для повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича вида (5), (6) при $k = 2$ ($\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau) \equiv 1$) с использованием функций Хаара. В [6], [16] для этой цели были также применены функции Радемахера–Уолша. Однако, указанные разложения оказались [6], [16], [24] заметно сложнее, чем разложения (20) и (26).

В заключение отметим, что аппроксимации (21), (29) могут быть применены не только к реализации метода Мильштейна для СДУ Ито, но и к модификации метода Мильштейна для полулинейных СДУ с частными производными [13], [14], [32].

Список литературы

[1] *Гихман, И.И., Скороход, А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982, 612 с.

[2] *Kloeden, P.E., Platen, E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992, 632 p.

[3] *Ширяев, А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Москва: Фазис, 1998, 544 с.

[4] *Kloeden, P.E., Platen, E., Schurz, H.* Numerical solution of SDE through computer experiments. Berlin: Springer, 1994, 292 p.

[5] *Milstein, G.N., Tretyakov, M.V.* Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin: Springer-Verlag, 2004, 596 p.

[6] *Кузнецов, Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. 2. С.-Петербург: Издательство Политехнического университета, 2006, 764 с.
DOI: `http://doi.org/10.18720/SPBPU/2/s17-227`

[7] *Platen, E., Bruti-Liberati, N.* Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010, 868 p.

[8] *Аверина, Т.А.* Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2019, 350 с.

[9] *Липцер, Р.Ш., Ширяев, А.Н.* Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. Москва: Наука, 1974, 696 с.

[10] *Насыров, Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. Москва: Физматлит, 2011, 212 с.

[11] *Рыбаков, К.А.* Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. Москва: Издательство МАИ, 2017, 176 с.

[12] *Мильштейн, Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Издательство Уральского университета, 1988, 225 с.

[13] *Jentzen, A., Röckner, M.* A Milstein scheme for SPDEs. Foundations of Computational Mathematics. V. 15, no. 2, 2015, P. 313-362.

[14] *Leonhard, C., Rößler, A.* Iterated stochastic integrals in infinite dimensions: approximation and error estimates. Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations. V. 7, no. 2, 2019, P. 209-239.

[15] *Kloeden, P.E., Platen, E., Wright, I.W.* The approximation of multiple stochastic integrals. Stochastic Analysis and Applications. V. 10, no. 4, 1992, P. 431-441.

[16] *Кузнецов, Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: Теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB. Дифференциальные уравнения и процессы управления. No 4, 2018, С. А.1-А.1073. Доступно по ссылке:
`http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2018.4/article.2.1.html`

[17] *Кузнецов, Д.Ф.* Разработка и применение метода Фурье к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито. Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 58, No 7, 2018, С. 1108-1120.

[18] *Кузнецов, Д.Ф.* К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядками сильной сходимости 1.5 и 2.0. Автоматика и телемеханика. No 7, 2018, С. 80-98.

[19] *Кузнецов, Д.Ф.* К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядком сильной сходимости 2.5. Автоматика и телемеханика. No 5, 2019, С. 99-117.

[20] *Кузнецов, Д.Ф.* Сравнительный анализ эффективности применения полиномов Лежандра и тригонометрических функций к численному

интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито. Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 59, No 8, 2019, С. 1299-1313.

[21] *Кузнецов, Д.Ф.* Методы численного моделирования решений систем стохастических дифференциальных уравнений Ито в задачах механики. Дисс. канд. физ.-матем. наук. С.-Петербург, 1996, 260 с.

[22] *Кузнецов, Д.Ф.* Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций. Дифференциальные уравнения и процессы управления. No 1, 1997, С. 18-77. Доступно по ссылке:
`http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/1997.1/article.1.2.html`

[23] *Кузнецов, Д.Ф.* Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича второй кратности, основанное на двойных рядах Фурье-Лежандра, суммируемых по Принсхейму. Дифференциальные уравнения и процессы управления. No 1, 2018, С. 1-34. Доступно по ссылке:
`http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2018.1/article.1.1.html`

[24] *Пригарин, С.М., Белов, С.М.* Об одном применении разложений винеровского процесса в ряды. Препринт 1107. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1998, 16 с.

[25] *Kuznetsov, D.F.* New simple method for obtainment an expansion of double stochastic Ito integrals, which is based on the expansion of Brownian motion using Legendre polynomials and trigonometric functions.
arXiv:1807.00409v3 [math.PR], 2019, 15 p.

[26] *Wiener, N.* Un problème de probabilités dénombrables. Bulletin de la Société Mathématique de France. V. 52, 1924, P. 569-578.

[27] *Lévy, P.* Wiener's random function and other Laplacian random functions. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. 1951, P. 171-187.

[28] *Ito, K., McKean, H.* Diffusion processes and their sample paths. Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1965, 395 p.

[29] *Luo, W.* Wiener chaos expansion and numerical solutions of stochastic partial differential equations. PhD thesis, California Institute of Technology, 2006, 225 p.

[30] *Дынкин, Е.Б.* Марковские процессы. Москва: Наука, 1963, 860 с.

[31] *Суетин, П.К.* Классические ортогональные многочлены. Москва: Физматлит, 2005, 480 с.

[32] *Kuznetsov, D.F.* Application of the method of approximation of iterated stochastic Ito integrals based on generalized multiple Fourier series to the high-order strong numerical methods for non-commutative semilinear stochastic partial differential equations. Differential Equations and Control Processes. no. 3, 2019, P. 18-62. Available at:
`http://diffjournal.spbu.ru/EN/numbers/2019.3/article.1.2.html`