

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
№ 4, 2008

Электронный журнал,  
рег. № П2375 от 07.03.97  
ISSN 1817-2172

<http://www.newa.ru/journal>  
<http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal>  
e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Компьютерное моделирование динамических и  
управляемых систем

## Моделирование льда в задачах с конечноэлементной постановкой

В.А.Лобанов

Россия, 603155, Нижний Новгород, Большая Печёрская, 32-46, e-mail:  
lobbas@kis.ru

### Введение

Реализация математических методов численного анализа на базе современных компьютерных технологий обеспечила решение многих инженерных задач на качественно ином уровне. Этот уровень отличает высокая точность, детализация физических процессов, наглядность результатов анализа [3,5,6]. Используемые в настоящее время САД, САМ, САЕ системы эффективно применяются не только в инженерии, но и в научных исследованиях. Особо следует отметить раздел механики, изучающий процессы деформирования и разрушения твёрдых тел и сред. Применение здесь упомянутых систем является не только средством анализа, но источником получения и контроля статистических данных и особенно в тех случаях, когда постановка эксперимента невозможна или экономически неоправданна.

Однако адекватность конечноэлементного моделирования, реализуемого с помощью подобных систем, зависит от ряда факторов: степени дискретизации моделируемых тел; типа (оболочечные, мембранные, объёмные) и формулировки (Лагранжевы, Эйлеравы, произвольные) элементов; вида контактного алгоритма и пр. При этом основными условиями достоверности проводимых расчётов являются правильная формулировка определяющих соотношений для материалов тел (математические модели поведения материалов под нагрузкой), критериев разрушения и задание физико-механических характеристик материалов.

Научная работа автора связана с оценкой ледовых качеств судов внутреннего плавания. Численное моделирование процесса взаимодействия судна с ледяным покровом даёт обнадеживающие результаты в решении задач прочности, ходкости, маневренности во льдах как для эксплуатируемых, так и вновь проектируемых судов.

При движении судна в ледовых условиях контактируют три тела: корпус судна, вода и лёд. Металлы и жидкости как материалы смоделированы и успешно апробированы в различных САЕ системах [3,6]. Так, судовую сталь допустимо представлять упругопластическим материалом с кинематическим упрочнением, воду – специальным материалом в Эйлеровой формулировке с различными уравнениями состояния (полиномиальное, Грюнайзена и др.).

Количество примеров описания численного моделирования поведения льда, его контактного взаимодействия с другими телами крайне ограничено [2,4,8]. Приведённые модели настроены на решение конкретных задач и потому не могут претендовать на универсальность, ряд из них носит дискуссионный характер. Интерес для автора представляет работа [4], где лёд представлен вязкопластическим материалом Перцина

(Perzyna) с условием текучести Надрэ (Nadreau). Однако корректное применение данной модели предусматривает знание зависимости предела текучести льда от скорости деформации, что на данном этапе является недостаточно изученной проблемой (особенно для больших скоростей деформации). То же следует отметить и в отношении используемой здесь вязкости льда, данные по величине которой очень разноречивы –  $10^9$ - $10^{15}$  Па·с [7].

Физико-механические характеристики льда определяются его температурой, солёностью, наличием примесей, условиями формирования, возрастом. Поэтому в его естественном состоянии лёд является материалом, крайне неоднородным по своим свойствам [7,16]. Для сужения границ моделирования, исходя из научных потребностей, автором рассмотрен только пресноводный лёд. В настоящей работе обоснован выбор определяющих соотношений и механических характеристик льда на основе репрезентативных литературных и собственных источников эмпирических данных. Проведён сравнительный анализ некоторых стандартных (встроенных) материалов, которые могут быть использованы для моделирования льда в частных случаях.

### Механические характеристики и определяющие соотношения для льда

Ввиду того, что лёд может проявлять себя реологически разнообразно, для прогнозирования его поведения были проанализированы шесть моделей материалов:

1. Упругий материал.
2. Упругопластический материал с кинематическим упрочнением и критерием разрушения.
3. Упругопластический материал с изотропно-кинематическим упрочнением и критерием разрушения.
4. Упругопластический материал с изотропным упрочнением.
5. Упругопластический материал с изотропным упрочнением, критериями разрушения и удаления элементов из матрицы жёсткости.
6. Вязкопластический материал.

Все перечисленные модели требуют в качестве исходных параметров ряд физико-механических характеристик льда. При описании свойств материалов в САЕ системах очень часто используют способ замены реальной кривой напряжённо-деформированного состояния её билинейной формой. При этом кривая напряжение-деформация аппроксимируется двумя отрезками прямых. Первый отрезок описывает упругую часть деформации, второй – пластическую. Тангенсы углов наклона этих прямых – это модуль Юнга и модуль упрочнения соответственно. Основные расчётные параметры снимаются с билинейной характеристики материала.

Для малых и средних скоростей деформации расчётные физико-механические константы льда, используемые в данной работе (табл. 1.), получены в результате статистической обработки данных литературных [7,13,15] и авторских источников (рис. 1.). Сглаживание их позволило выявить статистическую зависимость, аналогичную кривой напряжённо-деформированного состояния (кривая 3). Анализ данной кривой показывает, что на ней нет явно выраженного предела текучести. Следуя рекомендациям [11], согласно которым предел текучести льда составляет 55% - 65% от предела прочности на сжатие, найдено значение этого параметра. Соотношение модуля Юнга и модуля упрочнения (отношение тангенса угла наклона прямой 1 к аналогичному параметру прямой 2) находится в интервале 7 – 8, что согласуется с данными для поликристаллических льдов [10,11]. Значения модуля сдвига  $G$  и модуля объёмного сжатия  $K$  определялись по известным аналитическим зависимостям [7]:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (1)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

где  $E$  – модуль Юнга;  
 $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Таблица 1

Расчётные физико-механические характеристики льда

Параметр	Значение
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	910,0
Модуль Юнга, Па	$5,00 \cdot 10^9$
Модуль упрочнения, Па	$0,67 \cdot 10^9$
Модуль сдвига, Па	$1,87 \cdot 10^9$
Модуль объёмного сжатия, Па	$5,20 \cdot 10^9$
Предел текучести, Па	$2,50 \cdot 10^6$
Предел прочности на сжатие, Па	$4,80 \cdot 10^6$
Предел прочности на растяжение, Па	$1,20 \cdot 10^6$
Коэффициент Пуассона	0,34
Деформация разрушения	0,012

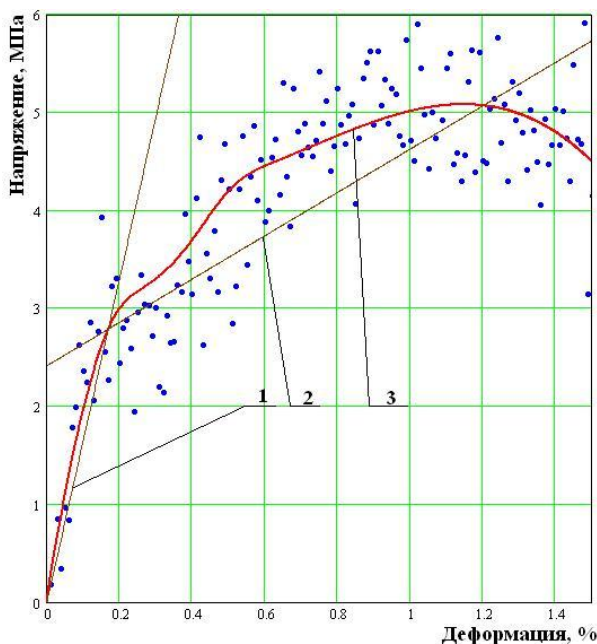


Рис. 1. Кривая напряжённо-деформированного состояния льда при средних скоростях деформации

Ряд из рассмотренных моделей предусматривает более детальное описание поведения материала. При этом такие параметры, как предел прочности на сжатие, предел текучести, модуль упрочнения и модуль Юнга должны быть представлены переменными, зависящими от скорости деформации материала.

Особо здесь следует отметить кривую прочности, непосредственно связанную с разрушением льда. Под разрушением автор понимает дробление или местное смятие льда. Прочность материала обычно устанавливается как максимально достижимое напряжение при условии, что нагружение происходит при постоянной скорости деформации, или при постоянной скорости изменения напряжения. Для льда предел прочности сильно зависит от скорости деформации, поэтому для больших скоростей деформации данные табл.1 нуждаются в корректировке. На рис. 2 приведена попытка обобщения известных автору данных [7,11] по влиянию скорости деформации на предел прочности льда при сжатии. Верхняя граница полученной зависимости требует существенного расширения, т.к. в случаях местного смятия льда скорость деформации может достигать значений в несколько порядков. Однако достоверных данных для этого диапазона скоростей деформации не имеется.

В теоретической механике разрушения весьма важной является величина отношения предельной прочности при одноосном сжатии к предельной прочности при одноосном растяжении. Согласно [11] для хрупкого разрушения льда это соотношение находится в пределах 5 – 6. Вместе с тем есть достаточные основания утверждать, что прочность при одноосном растяжении является сравнительно постоянной величиной (1,0 – 1,2 МПа) даже при достаточно высокой скорости деформации. Исходя из этих соображений, на данном этапе прочность льда на сжатие при больших скоростях деформации выбрана в пределах максимальных значений кривой на рис. 2.

Результаты обработки эмпирических данных [7] для получения остальных зависимостей показаны на рис. 3 – 5. Необходимо отметить, что дисперсия точек во всех статистических зависимостях достаточно велика (коэффициент корреляции не превосходит значения 0,85) и поэтому они требуют уточнения функций и расширения границ аргумента.

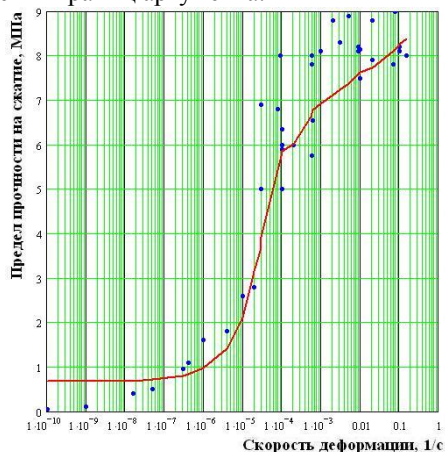


Рис. 2. Зависимость предела прочности льда на сжатие

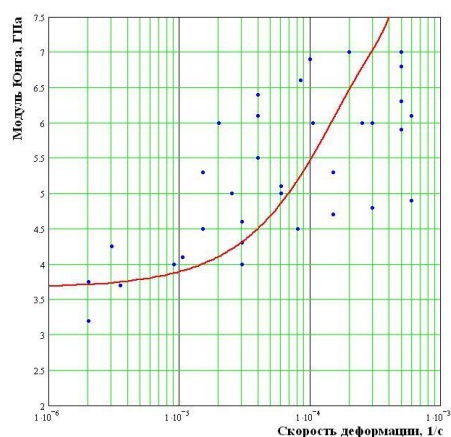


Рис. 3. Зависимость модуля Юнга льда от скорости

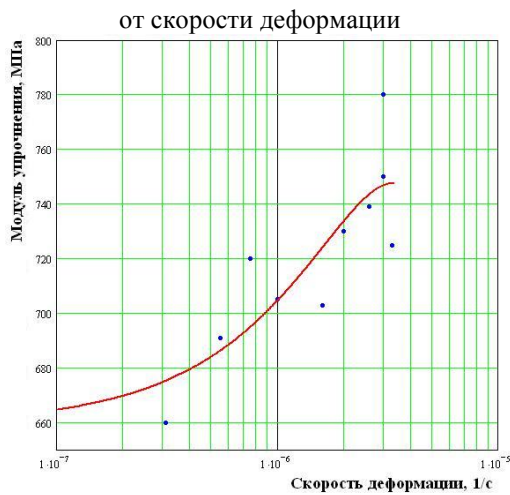


Рис. 4. Зависимость модуля упрочнения льда от скорости деформации

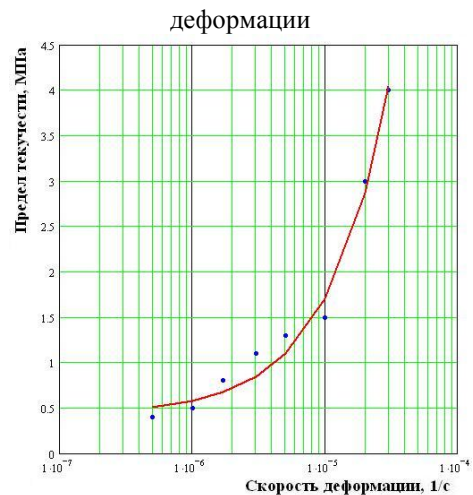


Рис. 5. Зависимость предела текучести льда от скорости деформации

Анализ результатов расчёта, приведённый ниже, отдаёт предпочтение изотропным материалам, моделирующим лёд (материалы №№ 4 и 5). Поэтому далее приводятся определяющие соотношения только для этих моделей. Лёд в них описывается упругопластической средой Прандтля-Рейсса с условием текучести Мизеса [3]. При этом связь девиатора напряжений со скоростями пластических деформаций следующая:

$$\dot{S}_{ij} + \lambda_0 S_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij} \quad (2)$$

$$\lambda_0 = \frac{3G\dot{A}H(\dot{A})}{\sigma_y^2} \quad (3)$$

$$\dot{A} = S_{mn}\dot{\epsilon}_{mn} \quad (i, j, m, n = 1, 2, 3) \quad (4)$$

где  $S_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений;

$G$  – модуль сдвига;

$H(\dot{A})$  – функция Хевисайда;

$\sigma_y$  – предел текучести льда.

Условие текучести выражено:

$$\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij} = \sigma_y^2 \quad (5)$$

В свою очередь, предел текучести является функцией эффективной пластической деформации:

$$\sigma_y = \sigma_0 + E_p \epsilon_{ef} \quad (6)$$

где  $\sigma_0$  – постоянное значение предела текучести (табл. 1);

$E_p$  – расчётный модуль пластического упрочнения, определяемый:

$$E_p = \frac{EE_t}{E - E_t} \quad (7)$$

где  $E$  – модуль Юнга льда;

$E_t$  – исходный модуль упрочнения (табл. 1).

Величина эффективной пластической деформации выражается как интеграл пошаговых приращений пластических деформаций за период времени  $t$ :

$$\epsilon_{ef} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}d\epsilon_{ij}d\epsilon_{ij}} \quad (8)$$

Внутренние давления на  $k + 1$  шаге интегрирования рассчитываются:

$$p_{k+1} = K \left( \frac{1}{V_{k+1}} - 1 \right) \quad (9)$$

где  $K$  – модуль объёмного сжатия льда;

$V_{k+1}$  – относительный объём элемента на  $k + 1$  шаге интегрирования.

Модель материала №5 дополнена условиями разрушения:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &< -P_{\text{lim}} \\ \varepsilon_{ef} &> \varepsilon_{\text{lim}} \end{aligned} \quad (10)$$

где  $P_{\text{lim}}$ ;  $\varepsilon_{\text{lim}}$  – предел прочности на растяжение и деформация разрушения льда соответственно.

### Результаты моделирования ползучести

Под действием нагрузок определённого уровня лёд может деформироваться без разрушения и изменения объёма. Его общая деформация состоит из двух частей: упругой обратимой и пластической (вязкопластической) остаточной. Изменение пластической деформации во времени при постоянном напряжении называется ползучестью. Репрезентативные эмпирические данные по ползучести для пресноводного льда приведены в [1,9].

В общем случае даже при низких нагрузках лёд не является линейно деформируемым твёрдым телом [9,11], поэтому для проведения расчётов выбран конечноеlementный решатель явного вида [3]. Моделируемым телом являлся куб с ребром длиной 10 см, подвергавшийся сжимающим нагрузкам. Куб был разбит сеткой из одинаковых восьмиузловых объёмных элементов на 8000 частей. Результаты моделирования показаны на рис. 6 – 17.

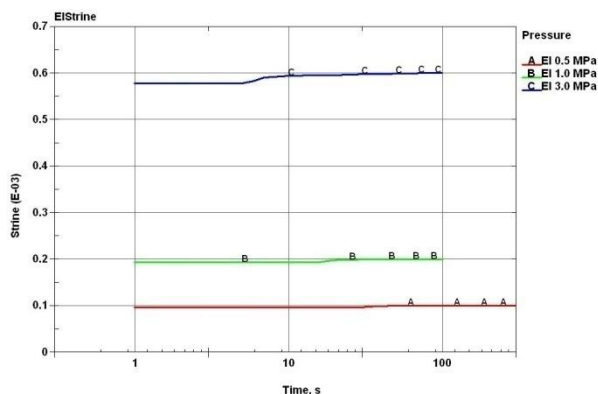


Рис.6. Кривые ползучести упругого материала при различных нагрузках

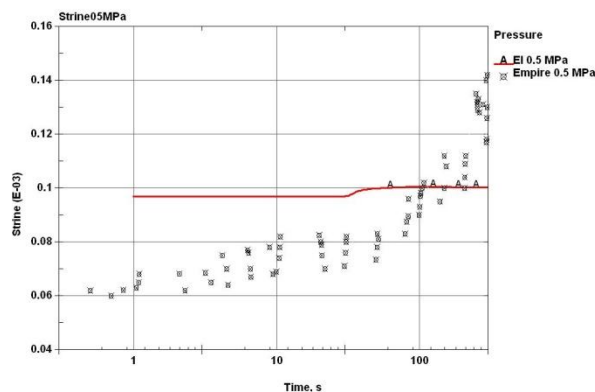


Рис.7. Сопоставление экспериментальных данных по ползучести льда и расчётной кривой для упругого материала при напряжении 0,5 МПа

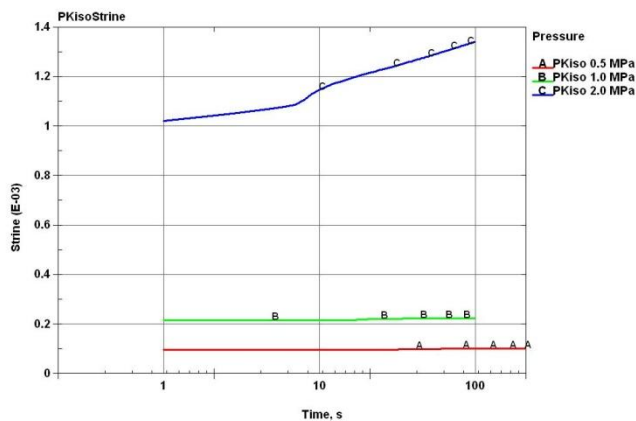


Рис. 8. Кривые ползучести упругопластического материала с изотропно-кинематическим упрочнением и критерием разрушения при различных нагрузках

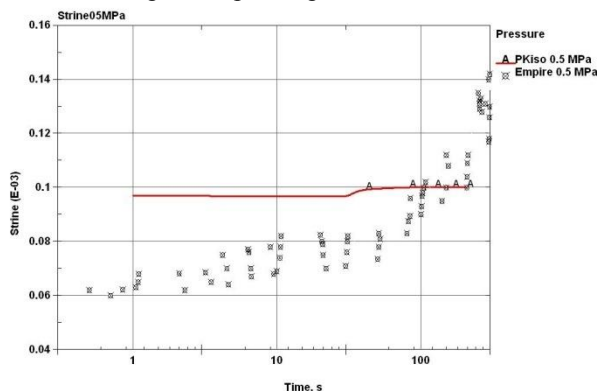


Рис. 9. Сопоставление экспериментальных данных по ползучести льда и расчётной кривой для материала с изотропно-кинематическим упрочнением и критерием разрушения при напряжении 0,5 МПа

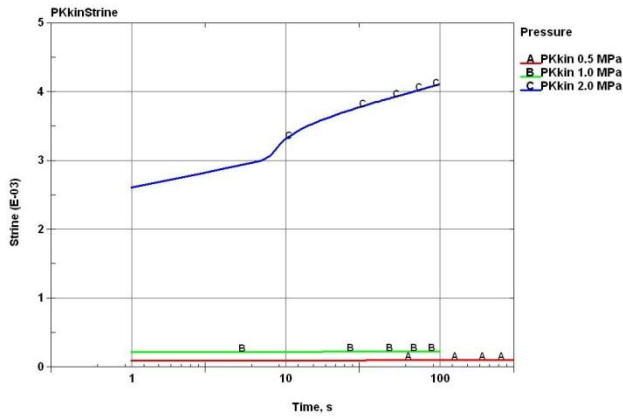


Рис. 10. Кривые ползучести упругопластического материала с кинематическим упрочнением и критерием разрушения при различных нагрузках

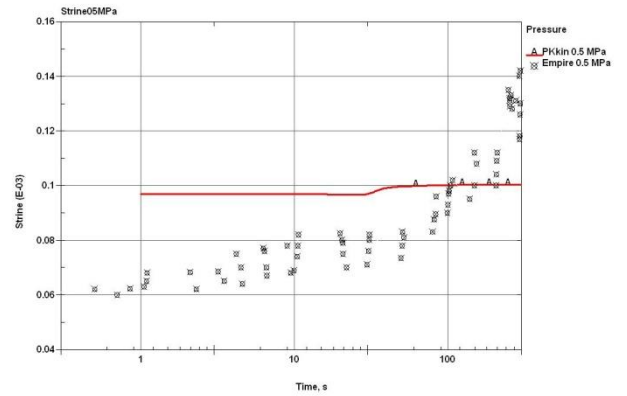


Рис. 11. Сопоставление экспериментальных данных по ползучести льда и расчётной кривой для материала с кинематическим упрочнением и критерием разрушения при напряжении 0,5 МПа

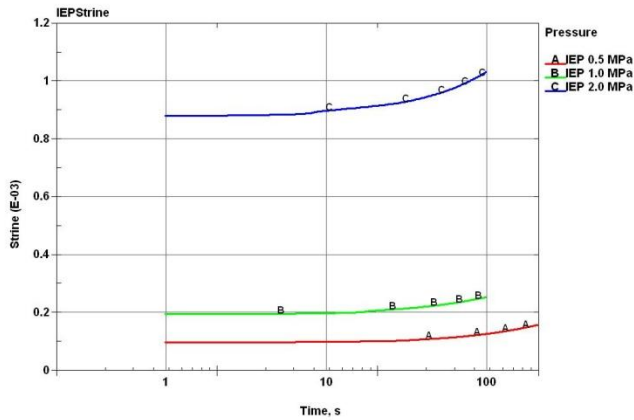


Рис. 12. Кривые ползучести упругопластического материала с изотропным упрочнением

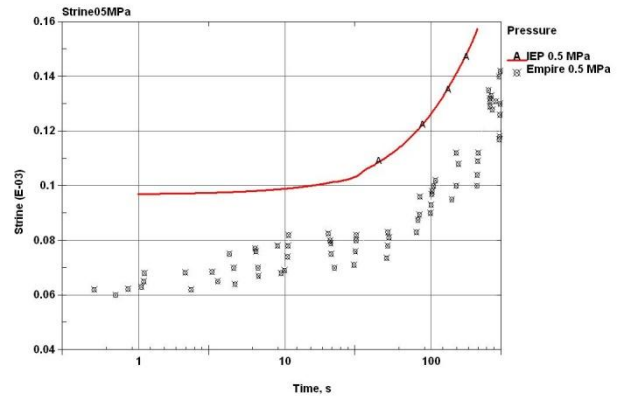


Рис. 13. Сопоставление экспериментальных данных по ползучести льда и расчётной кривой для упругопластического материала с изотропным упрочнением при напряжении 0,5 МПа

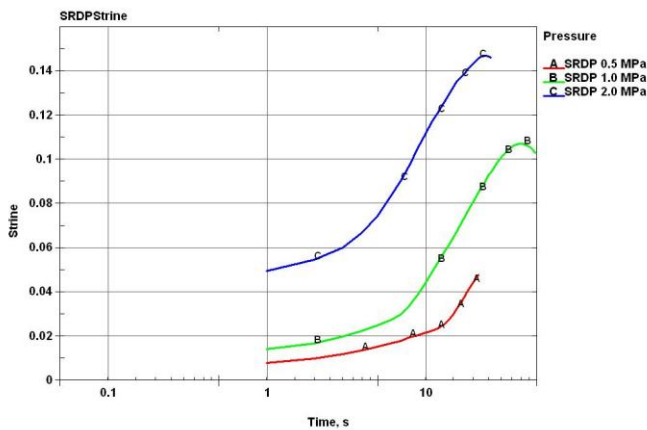


Рис. 14. Кривые ползучести вязкопластического материала

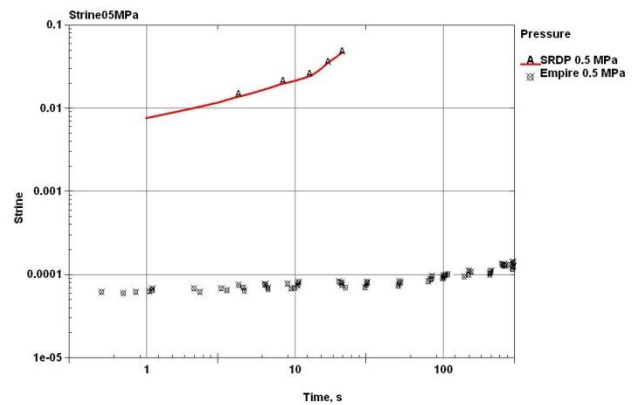


Рис. 15. Сопоставление экспериментальных данных по ползучести льда и расчётной кривой для вязкопластического материала при напряжении 0,5 МПа

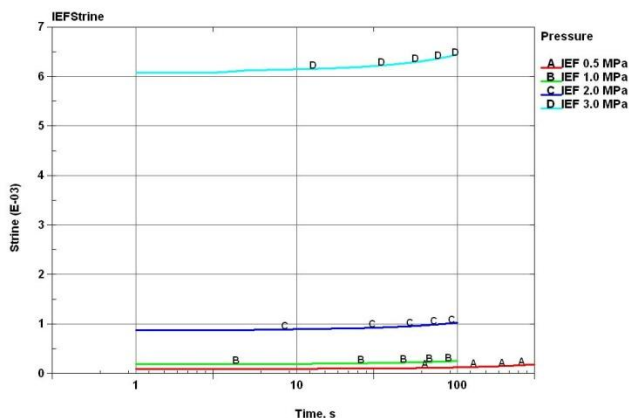


Рис. 16. Кривые ползучести упругопластического материала с изотропным упрочнением, критериями разрушения и удаления элементов из матрицы жёсткости

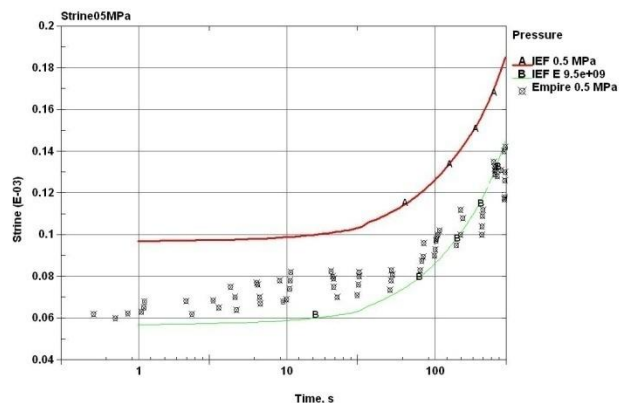


Рис. 17. Сопоставление экспериментальных данных по ползучести льда и расчётной кривой для упругопластического материала с изотропным упрочнением, критериями разрушения и удаления элементов из матрицы жёсткости при напряжении 0,5 МПа

Анализ приведённых выше кривых ползучести указывает на малоприспособность моделей материалов №1-3. Такой вывод обусловлен не только разногласием расчётных и эмпирических данных, но и поведением кривых. При этом необходимо отметить, что это расхождение обусловлено не только несовершенством модели, но и различиями используемых модулей Юнга. Расчётный модуль Юнга льда взят согласно данным табл. 1 с учётом рекомендаций [12]. Экспериментальный лёд имел более высокое значение этого параметра –  $9,5 \cdot 10^9$  Па.

Полную неприемлемость показала модель материала №6 (вязкопластический материал). В ней расчётные и измеренные деформации различаются более чем на два порядка, а сам материал «растекается» даже при низких нагрузках.

Хорошую согласованность с поведением реального льда демонстрируют модели материалов №4 (изотропная) и №5 (изотропная с критериями разрушения). При этом результаты расчётов по обеим моделям практически идентичны. Для модели №5 были также проведены расчёты с экспериментальным значением модуля Юнга. Результат (нижняя кривая на рис. 17) показал очень хорошую сходимость модельных и эмпирических данных. Аналогичной реакции следует ожидать и от модели №4.

Сопоставление экспериментальных и модельных результатов проводились также по величине скорости деформации (рис. 18).

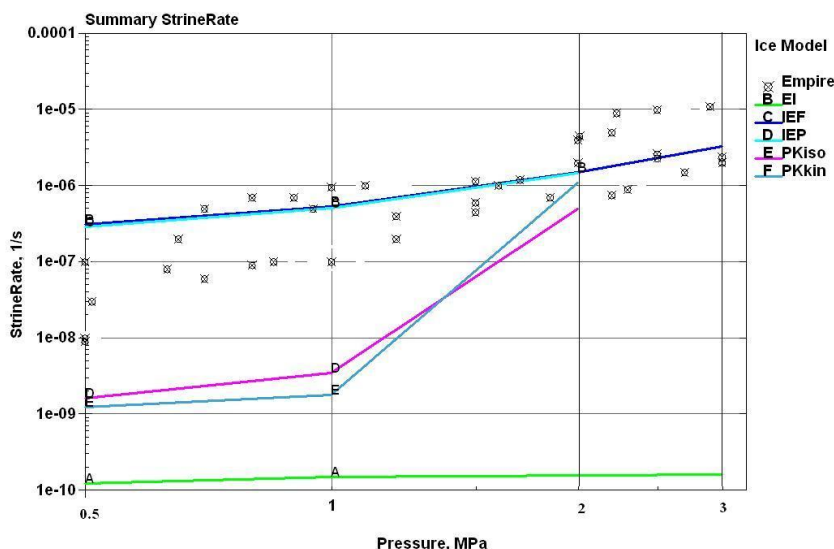


Рис. 18. Зависимость величины скорости установившейся ползучести льда от напряжения сжатия для различных моделей льда

Хотя экспериментальные величины скорости установившейся ползучести и деформации пресноводного поликристаллического льда взяты из различных источников, они подтверждают вывод о хорошей сходимости результатов натуральных данных с расчётными значениями для моделей материалов №4 и №5.

Результаты моделирования разрушения

Для оценки применимости тех же материалов в зоне разрушения льда была смоделирована серия опытов по контактному взаимодействию тел со льдом. Результаты проиллюстрированы на следующем эксперименте. Стальной шарик диаметром 32 мм, массой 134 г скатывался по наклонному жёлобу и ударялся о ледяной покров. Угол наклона жёлоба с горизонтом составлял 45°, высота начала движения – 1 м. В результате падения шарик делал вмятину во льду (лунку) и отскакивал на определённую дистанцию. Измерялись глубина лунки и дальность первого отскока. Качественно оценивалась форма лунки. Было проведено несколько серий замеров на ровных бесснежных участках ледяного покрова естественного водоёма в осенний период. Температура льда колебалась в пределах от -2° С до -7°С.

Модельный шарик представлял собой недеформируемое тело. Линейные и угловые скорости его движения задавались программно. Участок льда моделировался прямоугольным параллелепипедом, который был разбит конечноэлементной сеткой с переменным шагом. Минимальный размер восьмиузловых объёмных элементов непосредственно в зоне контакта и её окрестностях не превышал 2 мм. Количественная оценка результатов моделирования приведена на рис. 19 и 20. При этом номера прямых (пунктирных) линий соответствуют нумерации материалов, принятой для моделирования ползучести. Материал с №5' – это упругопластический материал с изотропным упрочнением, дополненный критериями разрушения (материал №5 без критерия удаления).

Как показывает анализ результатов расчёта дальности отскока (рис.19), наиболее близки к экспериментальным данным модели с материалами, в которых присутствуют критерии разрушения (№№2, 3, 5'). Однако прямо противоположную картину демонстрирует другой параметр – глубина смятия (разрушения) льда (рис. 20). Здесь наиболее приемлемыми являются «неразрушаемые» материалы (№№1, 4, 6).

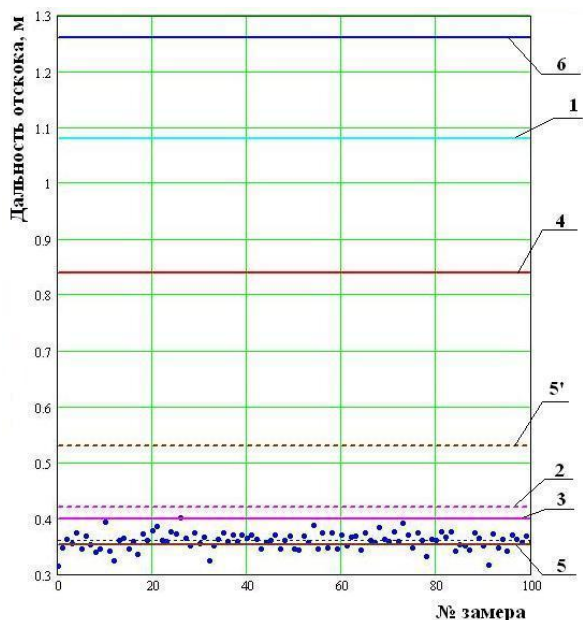


Рис. 19. Сопоставление результатов замера и расчёта дальности отскока шарика для различных моделей материала льда

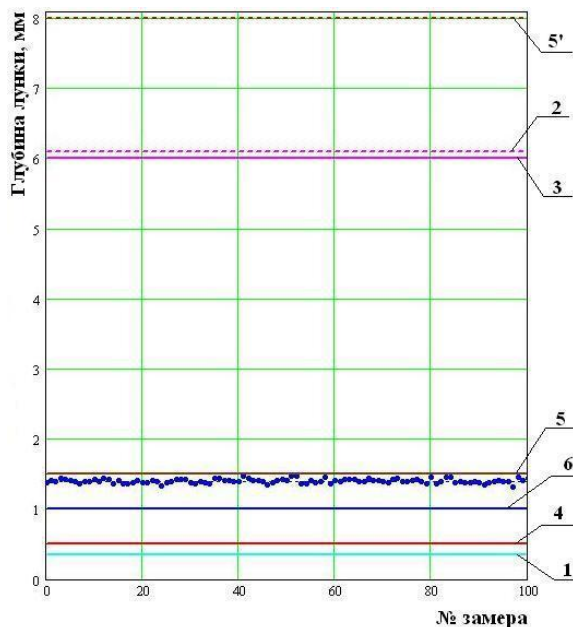


Рис. 20. Сопоставление результатов замера и расчёта глубины лунки для различных моделей материала льда

Причиной обозначенных противоречий и неадекватности упомянутых материалов является не только несоответствие реологических моделей натуральному льду. В применимости ко льду основным недостатком конечноэлементного моделирования «разрушаемых» материалов является удаление элемента из матрицы жёсткости по достижении критерия разрушения (напряжения или деформации). Типичный характер разрушения льда при этом показан на рис. 21. Очевидно, что данная модель соударения расходится с физически приемлемой картиной.



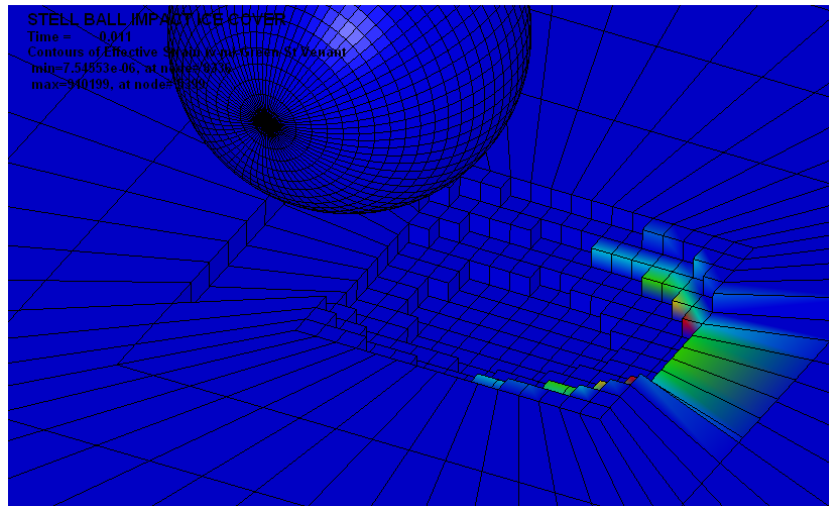


Рис. 21. Характер дробления льда в моделях с критериями разрушения

Натурные наблюдения показывают, что удар твёрдого тела о кромку льда вызывает её смятие, а разрушенный лёд выжимается на поверхность в виде мелкодробленой ледяной крошки. Выжимание раздробленного льда в зоне контакта предполагает наличие некоторого промежуточного слоя конечной толщины, образующегося между поверхностью тела и неразрушенной массой кристаллического льда [12]. Разрушение в твёрдых телах связано с образованием поверхностей разрыва, по одну сторону от которых материал является упругим телом, а по другую может рассматриваться как вязкая жидкость. Подобная форма разрушения льда применена в модели №5. При этом по достижении любого из критериев разрушения (10) элемент остаётся в матрице жёсткости, но компоненты девиатора напряжений обнуляются, элемент теряет способность противостоять растягивающим нагрузкам, т.е. ведёт себя подобно жидкости.

Негативным последствием такого подхода является значительное увеличение времени расчёта. Явный метод решения нелинейных задач в САЕ системах обладает существенным недостатком – условной устойчивостью. Сходимость решения здесь не будет зависеть от временного шага интегрирования, если он меньше определённого значения. Это значение определяется по критерию Куранта [14]:

$$dt = a \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (11)$$

где  $a$  – характерный размер конечного элемента;

$\rho$  – плотность материала;

$E$  – модуль Юнга материала.

Шаг интегрирования в процессе расчёта уменьшается пропорционально сокращению характерного размера лимитирующего элемента (элемент деформируется). Поэтому для снижения временных затрат элемент должен быть удалён из матрицы жёсткости при достижении какого-то предельного шага интегрирования  $dt_{lim}$ . Параметр  $dt_{lim}$  находится в результате компромисса между затраченным временем и ошибкой расчёта, связанной с досрочным удалением элемента. Достижение этого компромисса поясняет рис. 22. Здесь приняты следующие обозначения.

$dt_{rel}$  – относительный шаг интегрирования, при котором элемент удаляется из матрицы жёсткости:

$$dt_{rel} = \frac{dt_{lim}}{dt_{max}} \quad (12)$$

где  $dt_{max}$  – максимальный (начальный) временной шаг интегрирования, определяемый согласно (11).

$E_r(dt_{rel})$  – относительная ошибка расчёта, возникающая вследствие удаления элемента:

$$E_r(dt_{rel}) = \left| \frac{P_{cal}(dt_{rel}) - P_{true}}{P_{true}} \right| \quad (13)$$

где  $P_{cal}(dt_{rel})$  – расчётное значение параметра;

$P_{true}$  – репрезентативное (измеренное) значение параметра.

$T_{rel}(dt_{rel})$  – относительная длительность расчёта:

$$T_{rel}(dt_{rel}) = \frac{T_{rem}(dt_{rel})}{T_{erod}} \quad (14)$$

где  $T_{rem}(dt_{rel})$  – длительность расчёта при заданном значении относительного шага интегрирования;  
 $T_{erod}$  – длительность расчёта для модели только с критериями разрушения (без критерия удаления элементов).

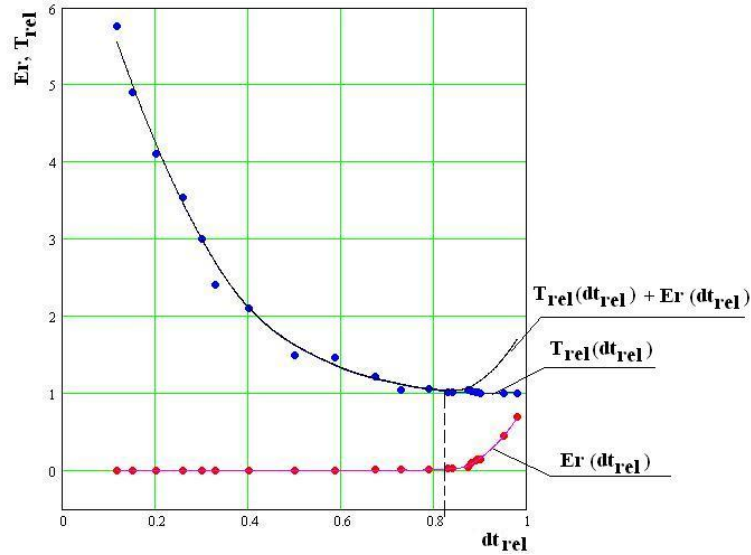


Рис. 22. Соотношение относительного времени и ошибки расчёта

Кривые относительной ошибки  $E_r(dt_{rel})$  и относительных временных затрат  $T_{rel}(dt_{rel})$  получены автором в результате статистической обработки обширного ряда расчётных моделей контактного взаимодействия тел со льдом. Как следует из рис. 22,  $E_r(dt_{rel})$  является монотонно возрастающей функцией, активный рост которой начинается после  $dt_{rel} \approx 0,8$ , а  $T_{rel}(dt_{rel})$  – убывающей. Сумма этих функций  $T_{rel}(dt_{rel}) + E_r(dt_{rel})$  имеет при  $dt_{rel} \approx 0,83$  ярко выраженный минимум. Полученное значение  $dt_{rel}$  может быть принято в качестве оптимального, т.е. обеспечивающего достаточную точность расчётов при приемлемых временных затратах. Такая реализация сохраняет адекватность модели как количественно (материал №5 на рис. 19 и 20), так и качественно (рис. 23).

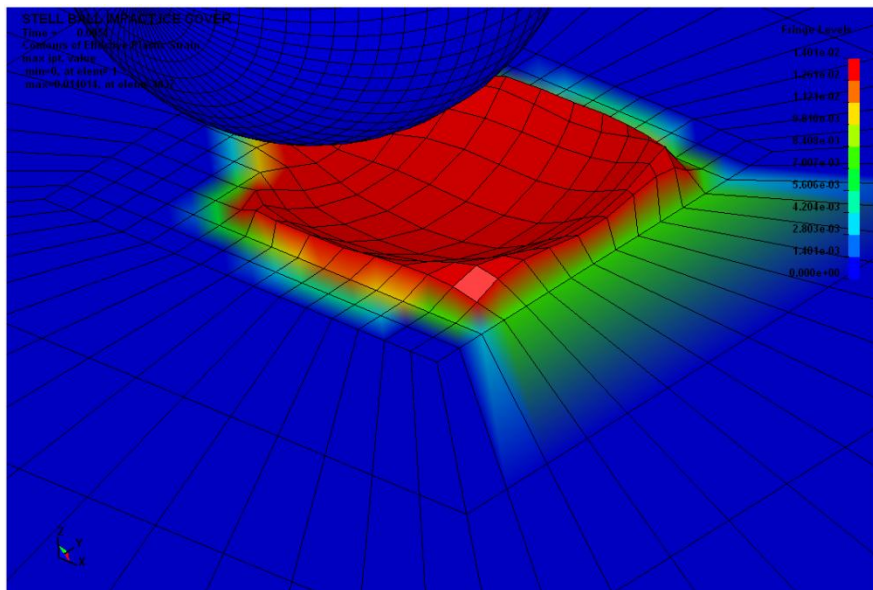


Рис. 23. Характер разрушения льда в модели №5

**Выводы**

1. Для описания реологии пресноводного поликристаллического льда в САЕ системах может быть использована модель упругопластического материала с изотропным упрочнением и критерием текучести Мизеса.
2. В зоне ползучести эта модель может применяться без критериев разрушения.
3. Для зоны разрушения более применима гидродинамическая модель поведения разрушенных элементов.
4. В целях экономии времени расчёта без существенных потерь точности допустимо использовать критерий удаления разрушенных элементов, представляющий собой предельный шаг интегрирования.

**Литература**

1. Barnes P., Tabor D., Walker J. C. F. The friction and creep of polycrystalline ice. – Proc. Roy. Soc., 1971, ser. A 324, p. 127-155.
2. D.V. Zyryanov. Columnar-grained S2 ice contact model with failure. <http://www.itasca-udm.com/pages/contact.html>
3. Hallquist J.O. LS-DYNA 950. Theoretical Manual. Livermore Software Technology Corporation. LSTC Report 1018. Rev. 2. USA, 2001. – p 498.
4. Kolari Kari, Kouhia Reijo, Kärnä Tuomo. Ice Failure Analysis using Strain-softening Viscoplastic Material Model. European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering (ECCOMAS 2004). Jyväskylä, 24-28 July 2004.
5. Алёшин В.В., Селезнёв В.Е., Клишин Г.С., Кобяков В.В., Дикарев К.И. Численный анализ прочности подземных трубопроводов / Под ред. В.В. Алёшина и В.В. Селезнёва. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 320 с.
6. Басов К.А. ANSYS в примерах и задачах / Под общ. ред. Д.Г. Красковского. – М.: Компьютерпресс, 2002. – 224 с.: ил.
7. Богородский В.В., Гаврило В.П. Лёд. Физические свойства. Современные методы гляциологии. – Л.: Гидрометеоздат, 1980. – 384 с.
8. Брепсон Р. Численное моделирование течений в ледовом вискозиметре Пенелопы. В сб. Физика и механика льда: Пер. с англ./ Под ред. П. Трюде. – М.: Мир, 1983. с. 36-42.
9. Л. Голд, Н. Синха. Реологическое поведение льда при малых деформациях. В сб. Физика и механика льда: Пер. с англ./ Под ред. П. Трюде. – М.: Мир, 1983. с. 57-63.
10. Ле Гак Г., Дюваль П. Определяющие соотношения неупругого деформирования поликристаллического льда. В сб. Физика и механика льда: Пер. с англ./ Под ред. П. Трюде. – М.: Мир, 1983. с. 57-63.6
11. М. Меллор. Механические свойства поликристаллического льда. В сб. Физика и механика льда: Пер. с англ./ Под ред. П. Трюде. – М.: Мир, 1983. с. 202-239.
12. Прочность судов, плавающих во льдах / Ю.Н.Попов, О.В.Фаддеев, Д.Е.Хейсин, А.Я.Яковлев. – Л.: Судостроение, 1967. – 224 с.
13. СНиП 2.06.04-82 Нагрузки от воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые, от судов). – М.: Стройиздат, 1983. – 38 с.
14. Тыняный А.Ф. Численное моделирование контактной задачи в рамках квазистатического упругопластического деформирования в пакете ANSYS/LS-DYNA. Электронный журнал «Нефтегазовое дело», <http://www.ogbus.ru>, 2004.
15. Физика и механика льда. Пер. с англ. /Под ред. П. Трюде. – М.: Мир, 1983. – 352 с.
16. Черепанов Н.В. Классификация льдов природных водоёмов. – Труды ААНИИ, 1976, т. 331, с. 77-99.