ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2005
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Общая теория управления

ОРТОРЕГРЕССИОННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ И ЗАДАЧИ ОТДЕЛЕНИЯ ТРЕНДОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

А.А. Ломов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. ак. Коптюга, 4, 630090 г. Новосибирск, Россия.
e-mail: lomov@math.nsc.ru

Аннотация.

Рассматривается задача оценивания параметров линейных динамических систем по коротким участкам переходных процессов с аддитивными измерительными возмущениями. Для получения оценок используются многомерные статистические методы типа ортогональной регрессии. Приводятся результаты сравнительного исследования методов с точки зрения использования информации о линейных связях в наблюдениях. Исследованы свойства оценок в предельных случаях выборки большого объема и малых возмущений. Предложена схема сравнения методов по линейным приближениям. Обсуждается применение орторегрессионных методов для идентификации систем без свойства управляемости. Рассмотрен новый класс задач отделения трендов в линейных системах. Показано, что определение параметров уравнения тренда связано с идентификацией некоторой расширенной системы без свойства управляемости.

Введение

В статье рассматривается задача оценивания параметров линейных динамических систем по коротким выборкам измерений переходных процессов с аддитивными измерительными возмущениями. Объем статистической выборки здесь определяется числом измеренных отрезков траекторий. Начальные условия траекторий подлежат оцениванию совместно с параметрами системы. Общая постановка задач такого рода обсуждалась в [1].

Известные в литературе исследования в области оценивания параметров по измерениям коротких участков траекторий преимущественно связаны с расширенным фильтром Калмана для систем в форме 1-го порядка [1, 2]. Отмечается, что для эффективных вычислений в реальном времени методы такого рода имеют недостаточный радиус сходимости [2].

Альтернативный подход, рассматриваемый в статье, основан на записи системы в равносильной форме высокого порядка без переменных состояния и оценивании параметров вариационными методами [3]. К семейству вариационных методов принадлежит известный метод ортогональной регрессии (ОР) и его разновидности [4, 5, 6, 7, 8]. Для вариационных методов к настоящему времени разработаны устойчивые вычислительные алгоритмы получения оценок с большим радиусом сходимости, решены задачи оценки сигналов системы совместно с параметрами уравнения [3], исследованы условия идентифицируемости параметров и состоятельности оценок [9, 10, 11, 12].

Вариационные орторегрессионные методы отличаются друг от друга вычислительной сложностью и асимптотическими свойствами оценок. В [6] сравнивались два метода этого типа на примере систем со скалярными сигналами входа, выхода. Сравнение проводилось методом теории возмущений для собственных чисел и собственных векторов положительно определенной матрицы функции потерь в предположении малости измерительного шума.

В статье приводятся результаты сравнительного исследования оценок вариационных методов в двух разных предельных случаях: малых возмущений и большого объема выборки. Первые результаты в этом направлении были опубликованы в [10, 13, 14]. В подолжение этих работ, здесь проводится сравнение методов с точки зрения использования априорной информации о линейных связях в траекториях оцениваемого объекта. Показано, что от степени использования информации о линейных связях зависит дисперсия оценок.

Поясним сказанное примером.

Пусть объект описывается системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \check{y} = Kw_* + L\theta_* + \eta_*, \\ Mw_* = 0. \end{cases}$$

Здесь K, L, $M^{\mathrm{т}}$ — заданные числовые матрицы с линейно независимыми столбцами, w_*, θ_* — векторы оцениваемых параметров, $\eta_* \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I)$ — стохастические возмущения, $\check{y}$ — наблюдаемый сигнал. Сравниваются две модели объекта:

(а) полная $\begin{cases} y = Kw + L\theta, \\ Mw = 0; \end{cases}$ (б) упрощенная модель $y = Kw + L\theta$.

Для параметров объекта $(w_*; \theta_*)$ строятся две состоятельные оценки:

$$(w_0; \theta_0) \doteq \arg \min_{w,\theta: Mw=0} \|\check{y} - y\|^2, \qquad (w_1; \theta_1) \doteq \arg\min_{w,\theta} \|\check{y} - y\|^2.$$

Здесь и далее применяются обозначения$(A, B) \doteq (AB)$, $\quad (A; B) \doteq \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

Оценка θ_0, полученная по полной модели (а), в общем случае имеет меньшую дисперсию, чем оценка θ_1 по модели (б) (приложение, раздел 8.8).

Данная схема сравнения линейных методов применяется к нелинейным орторегрессионным методам. Для этого рассматривается случай малых возмущений с заменой оценок линейными приближениями (раздел 3.2).

Показано, что в орторегрессионном методе ВИ [3, 10, 11] полностью используется информация вида $Mw = 0$ о связях между отсчетами траекторий линейного динамического объекта. Это позволяет на коротких участках переходных процессов за счет более интенсивных вычислений получать состоятельные оценки параметров с лучшими асимптотическими свойствами.

Существенной особенностью рассматриваемых методов является возможность получать состоятельные оценки параметров по измерениям отрезков траекторий конечной длины. Это позволяет включить в рассмотрение новый класс систем без условий устойчивости и управляемости. Системы без условия управляемости привлекли внимание исследователей сравнительно недавно [15]. Здесь мы показываем, что неуправляемые системы возникают в задачах отделения динамических трендов от полезных сигналов системы (раздел 6).

1 Класс систем

Исследуемые системы описываются уравнениями вида

$$\alpha_p y_{k+p} + \ldots + \alpha_0 y_k = \beta_p u_{k+p} + \ldots + \beta_0 u_k, \qquad k \in \overline{1, N-p}. \tag{1}$$

Здесь $p \geqslant 0$ — порядок системы, $N \geqslant p+1$ — длина траектории, $\alpha_i = \alpha_{i,\theta} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\beta_i = \beta_{i,\theta} \in \mathbb{R}^{r\times m}$ — матрицы, зависящие от фиксированного параметра θ, подлежащего оцениванию.

Системе (1) сопоставим многочленную матрицу

$$\gamma_\theta(s) \doteq \gamma_{0,\theta} + \gamma_{1,\theta} s + \ldots + \gamma_{p,\theta} s^p \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}[s], \tag{2}$$

$$\gamma_{i,\theta} \doteq \gamma_i = (\alpha_i, -\beta_i) \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}.$$

Запись $\mathbb{R}^{r\times(r+m)}[s]$ обозначает кольцо многочленов с действительными матричными коэффициентами из $\mathbb{R}^{r\times(r+m)}$.

Введем также числовую матрицу

$$\gamma_\theta \doteq (\gamma_{0,\theta}\gamma_{1,\theta} \ldots \gamma_{p,\theta}) \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)(p+1)}. \tag{3}$$

Обозначим $\gamma^i \doteq \left(\gamma_0^i \gamma_1^i \ldots \gamma_p^i\right)$ i-ю строку γ_θ, и определим вектор

$$\gamma = \gamma(\theta) \doteq \left(\gamma^1; \ldots; \gamma^r\right) \doteq \operatorname{vec} \gamma_\theta \tag{4}$$

как последовательно составленный из строк матрицы γ_θ.

На систему (1) налагаются условия:

(i) $\gamma(\theta) = d + D\theta \doteq \mathfrak{D}\,(1;\theta) \doteq \mathfrak{D}\vartheta$, где $\mathfrak{D} \doteq (d, D)$, $\vartheta \doteq (1;\theta)$; матрица $\mathfrak{D}$ задана;

$$\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^v.$$

(ii) Для каждого значения параметра $\theta \in \Omega$ в матрице $\gamma_\theta(s)$ (2)

а) строки линейно независимы;

б) сумма степеней строк $p_1 + \ldots + p_r \doteq n$ постоянна;

в) $\gamma_\theta(s)$ имеет наименьшую сумму степеней строк среди всех левоэквивалентных $\gamma_\theta(s)$ матриц, т.е. $\gamma_\theta(s)$ приведена по строкам;

г) числовая матрица $\gamma_\theta(0) = \gamma_{0,\theta}$ имеет линейно независимые строки.

(iii) Параметры системы *различимы* в том смысле, что любым двум различным значениям параметра θ соответствуют разные множества решений системы (1). Для различимости необходимо и достаточно, чтобы из равенства $\rho(s)\gamma_\theta(s) = \gamma_\xi(s)$, $\xi \in \Omega$, следовало $\rho(s) = I_{r\times r}$, $\xi = \theta$; более простые алгоритмически проверяемые критерии различимости в виде ограничений на ранги специальных матриц, построенных из элементов γ_θ, приведены в [12, 16].

Отметим, что условия (i)–(iii) не накладывают ограничений на устойчивость и управляемость системы. Это позволяет включить в рассмотрение новые задачи оценки параметров и сигналов для систем без свойства управляемости (раздел 6).

1.1 Обозначения

Отсчеты векторных сигналов объекта y_k, u_k объединим в вектор-траекторию

$$z \doteq (z_1; \dots; z_N)\,, \qquad z_i \doteq (y_i; u_i)\,.$$

Систему (1) запишем в матричном виде:

$$Gz = 0,$$

$$G = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Матрица G имеет *клеточно-теплицев* вид, что прямо связано со стационарностью системы.

Система уравнений (5) допускает равносильную форму записи

$$G(\gamma)z = V(z)\gamma, \tag{6}$$

в которой используется вектор γ (4) и матрица

$$V(z) \doteq \begin{pmatrix} I_r \otimes \left(z_1^{\mathrm{T}} \dots z_{p+1}^{\mathrm{T}}\right) \\ I_r \otimes \left(z_2^{\mathrm{T}} \dots z_{p+2}^{\mathrm{T}}\right) \\ \vdots \\ I_r \otimes \left(z_{N-p}^{\mathrm{T}} \dots z_N^{\mathrm{T}}\right) \end{pmatrix}.$$

Перестановкой строк (6) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_r \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} \mathfrak{V} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathfrak{V} \end{pmatrix} \gamma, \tag{7}$$

$$G_i \doteq \begin{pmatrix} \gamma_0^i & \gamma_1^i & \dots & \gamma_p^i & & & 0 \\ & \gamma_0^i & \gamma_1^i & \dots & \gamma_p^i & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0^i & \gamma_1^i & \dots & \gamma_p^i \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{V} \doteq \begin{pmatrix} z_1^{\mathrm{T}} & \dots & z_{p+1}^{\mathrm{T}} \\ z_2^{\mathrm{T}} & \dots & z_{p+2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{N-p}^{\mathrm{T}} & \dots & z_N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Будем использовать также следующую форму записи системы (1), (5). Переупорядочим компоненты траектории. Примем

$$\upsilon_k \doteq (y_k; u_k) \doteq \left(\upsilon_k^{[1]}; \dots; \upsilon_k^{[r+m]}\right) \in \mathbb{R}^{r+m}.$$

Вместо $z = (y_1; u_1; \dots; y_N; u_N) = (\upsilon_1; \dots; \upsilon_N)$ запишем

$$z = \left(\upsilon_1^{[1]}; \dots; \upsilon_N^{[1]}; \dots; \upsilon_1^{[r+m]}; \dots; \upsilon_N^{[r+m]}\right). \tag{8}$$

Тогда уравнение (5) можно записать через многочленную матрицу $\gamma_\theta(s)$ в следующем виде:

$$(\gamma_\theta(s) \otimes E)\, z = 0, \tag{9}$$

где $\otimes$ — символ Кронекерова произведения, s — оператор сдвига:

$$s^k E \doteq E_k \doteq \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(N-p_n)\times N}.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k} \qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{p_n-k}$$

Если позволяют обстоятельства изложения, в обозначениях многочленов (многочленных матриц) $\phi(s) \in \mathbb{R}^{n\times m}[s]$ иногда будем опускать знак аргумента: $\phi(s) \doteq \phi$.

Введем обозначение $\mathcal{N}_\gamma$ для многообразия решений системы (9) (правого нуль-пространства матрицы $\gamma(s) \otimes E$):

$$\mathcal{N}_\gamma \doteq \ker \gamma(s) \otimes E.$$

Для любой траектории z системы (5) справедливо представление

$$z = H(\theta)w,$$

так что $\mathcal{N}_\gamma = \operatorname{im} H(\theta)$, где $H(\theta)$ — матрица из марковских параметров (приложение, раздел 8.6), и $w = (x_0; u)$ — вектор, составленный из начальных условий x_0 и входного сигнала $u = (u_1; \ldots; u_N)$.

Пусть $\mathcal{N}$ — линейное многообразие в $\mathbb{R}^n$. И пусть $Px = 0$, $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — система уравнений, множество решений которой совпадает с $\mathcal{N}$: $\ker P = \mathcal{N}$. Тогда систему $Px = 0$ (или матрицу P) будем называть *описанием* для $\mathcal{N}$. Без ограничения общности можно считать, что строки P линейно независимы. В этом смысле любая базисная система строк в ортогональном дополнении $\overline{\mathcal{N}}$ является описанием для $\mathcal{N}$.

Линейную оболочку строк матрицы P будем обозначать $\operatorname{spanr} P$, тогда

$$\operatorname{spanr} P = \overline{\ker P}. \tag{10}$$

Если P — описание для $\mathcal{N}$, то $\operatorname{spanr} P = \overline{\mathcal{N}}$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Будем обозначать $\overline{A} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ матрицу, столбцы которой образуют базис дополнения $\operatorname{im} A$ до $\mathbb{R}^n$. Согласно этому определению, всегда

$$\operatorname{im} A = \ker \overline{A}^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

Кроме того, будем обозначать $A_\perp \in \mathbb{R}^{m \times t}$ матрицу, столбцы которой образуют базис подпространства $\ker A$:

$$\ker A = \operatorname{im} A_\perp, \qquad AA_\perp = 0. \tag{12}$$

Столбцы составной матрицы $(A^{\mathrm{T}}, A_\perp)$ всегда содержат базис пространства $\mathbb{R}^m$:

$$\operatorname{im}(A^{\mathrm{T}}, A_\perp) = \mathbb{R}^m.$$

Если строки A линейно независимы, то матрица $(A^{\mathrm{T}}, A_\perp)$ неособенная.

Предложение 1. *Имеют место следующие соотношения:*

1) если столбцы матрицы A линейно независимы, то $\overline{(\overline{A})} \doteq \overline{\overline{A}} = A$;

2) всегда $(A_\perp)_\perp \doteq A_{\perp\perp} = 0$;

3) всегда $\left(\overline{A}\right)_\perp = 0$;

4) если строки матрицы A линейно независимы, то $\overline{(A_\perp)} \doteq \overline{A_\perp} = A^{\mathrm{T}}$.

Доказательство. Первое соотношение сразу следует из определения матрицы $\overline{A}$. Второе и третье соотношения следуют из того, что матрицы $\overline{A}$ и $A_\perp$ по определению имеют линейно независимые столбцы, то есть $\ker \overline{A} = 0$ и $\ker A_\perp = 0$. Четвертое соотношение получается так: по условию строки A линейно независимы, следовательно, матрица $(A^{\text{т}}, A_\perp)$ неособенная; последнее равносильно тому, что $A_\perp = \overline{A^{\text{т}}}$ или (ввиду соотношения 1) $\overline{A_\perp} = A^{\text{т}}$.

Предложение доказано.

Пусть $A(s)$ — многочленная матрица. Каноническую форму $A(s)$, состоящую из нулей и инвариантных многочленов на диагонали (форму Смита) [17, с. 135], обозначаем $\operatorname{Sm} A(s)$.

1.2 Однородные траектории

В частном случае однородной системы (1) ($\beta_i = 0$, $m = 0$) многообразие $\mathcal{N}_\gamma$ образовано векторами вида

$$
\begin{gathered}
z \doteq (y_1; \ldots; y_N)\,, \\
y_t = y_{01} P_1 s_1^t + \ldots + y_{0n} P_n s_n^t, \\
n = p_1 + \ldots + p_r = \deg \det \alpha(s),
\end{gathered} \tag{13}
$$

где для $i \in \overline{1,n}$ числа $y_{0i} \in \mathbb{C}$ есть начальные условия, $s_i \in \mathbb{C}$ — корни уравнения $\det \alpha(s) = 0$, векторы $P_i \in \mathbb{R}^r$ вычисляются из уравнений $\alpha(s_i)P_i = 0$ и нормируются каким-либо способом, например, $\|P_i\| = 1$. В случае, если корень s_i имеет кратность $k \geqslant 2$, будем считать, что совпадают корни $s_i = s_{i+1} = \ldots = s_{i+k-1}$, и тогда у соответствующих слагаемых суммы (13) появляются сомножители — многочлены от t степени от нуля до $k-1$:

$$
\left(y_{0,i} P_i + y_{0,i+1} P_{i+1} t + \ldots + y_{0,i+k-1} P_{i+k-1} t^{k-1}\right) s_i^t. \tag{14}
$$

В качестве векторов $P_i, \ldots, P_{i+k-1}$ в этом случае выбирается нормированный базис подпространства $\ker \alpha(s_i)$.

В силу того, что уравнение (1) имеет действительные коэффициенты, комплексные корни появляются в парах сопряженных корней $s_j \doteq a + ib$, $s_{j+1} \doteq a - ib$. Поскольку мы ограничиваемся только действительными решениями, начальные условия $y_{0,i}$ в линейных комбинациях (13) и (14) при действительных корнях s_i должны быть действительные, а при комплексных сопряженных корнях s_j и s_{j+1} — сопряженные: $y_{0,j} = \overline{y_{0,j+1}}$ [18]. В последнем случае два парных слагаемых j и $j+1$ в сумме (13) дают траекторию

$$
A\varrho^t \cos(\omega t + \varphi)\,,
$$

$$\varrho \doteq \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \omega \doteq \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Эта траектория определена с точностью до чисел $A = A\left(y_{0,j}, y_{0,j+1}\right)$, $\varphi = \varphi\left(y_{0,j}, y_{0,j+1}\right)$.

Соответствующая парам сопряженных корней часть многочлена имеет вид

$$\left(s - s_j\right)\left(s - s_{j+1}\right) = \left(s^2 - 2\rho \cos\omega \cdot s + \rho^2\right).$$

Траектории вида

$$z \doteq \left(y_1; \ldots; y_N\right), \qquad y_t = Ps^t = Pe^{t \ln s}, \qquad P \in \mathbb{R}^r,$$

являются показательными функциями времени t с основанием s или экспонентами с показателем $t \ln s$. Ввиду этого линейные комбинации (13) можно называть экспоненциальными траекториями.

Однородные системы с "вертикальными" матрицами

Рассмотрим системы

$$\alpha_p y_{k+p} + \ldots + \alpha_0 y_k = 0, \qquad k \in \overline{1, N-p},$$

с матрицами $\alpha_i \in \mathbb{R}^{q \times r}$, $q \geqslant r$. Пусть $\alpha(s)$ имеет полный нормальный ранг, то есть инвариантные многочлены $\alpha(s)$ ненулевые. В этом случае многообразие решений $\mathcal{N}_\gamma$ определяется формулами (13) с заменой $\det \alpha(s)$ на $\pi(s)$, где $\pi(s)$ — произведение инвариантных многочленов $\alpha(s)$, или (равносильно) наибольший общий делитель миноров порядка r в $\alpha(s)$.

1.3 Постановка задачи идентификации

Пусть $\check{z}_{(i)}$ — наблюдения траекторий:

$$\check{z}_{(i)} = z_{*(i)} + \eta_{*(i)}, \qquad i \geqslant 1, \tag{15}$$

где $z_{*(i)} = H(\theta_*) w_{*(i)}$ — траектории, соответствующие "истинному" значению параметров θ_*, и

$$\eta_{*(i)} \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I), \qquad \mathbf{M}\left[\eta_{*(i)} \eta_{*(j)}^{\mathrm{T}}\right] = \sigma^2 I \cdot \delta_{ij}$$

— стохастические погрешности измерений ($\mathbf{M}$ — символ математического ожидания), $w_{*(i)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины.

Определение. Пусть $\theta = \theta_*$. При условии (iii) множество решений системы (1)

$$\mathcal{N}_{*L} \doteq \{z_{*(1)}, \ldots, z_{*(L)}\}$$

называется *полным*, если параметр θ по множеству $\mathcal{N}_{*L}$ вычисляется однозначно. Можно показать [11], что полнота $\mathcal{N}_{*L}$ равносильна условию

$$L^{-1} \sum_{i=1}^{L} D^{\mathrm{T}} V(z_{*(i)})^{\mathrm{T}} V(z_{*(i)}) D > 0. \tag{16}$$

Последовательность наблюдений $\left\{\check{z}_{(i)},\, i \geqslant 1\right\}$ (15) называется *полной*, если она соответствует множеству решений $\mathcal{N}_{*L}$, полному в пределе $L \to \infty$:

$$\lim_{L\to\infty} L^{-1} \sum_{i=1}^{L} D^{\mathrm{T}} V(z_{*(i)})^{\mathrm{T}} V(z_{*(i)}) D > 0.$$

Задача. Исходя из полной последовательности наблюдений $\left\{\check{z}_{(i)},\, i \geqslant 1\right\}$, получить оценку $\theta_L = \theta_L\left(\check{z}_{(1)}, \ldots, \check{z}_{(L)}\right)$, сходящуюся с вероятностью 1 к истинному значению: $\lim_{L\to\infty} \theta_L = \theta_*$.

2 Орторегрессионные оценки параметров

Орторегрессионные оценки θ_L строятся как результат минимизации квадратичной функции потерь с линейными ограничениями [3, 5, 6, 10, 11]:

$$\theta_L = \arg\min_{\theta} J_L(\theta), \qquad J_L = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} J_{(i)}\,, \qquad J_{(i)} = \min_{Gz_{(i)}=0} \left\|\Phi \check{z}_{(i)} - z_{(i)}\right\|^2, \tag{17}$$

$$\ker \Phi = 0.$$

Отметим, что возможна запись функции потерь $J_{(i)}$ в более симметричном виде по отношению к переменным $\check{z}_{(i)}$, $z_{(i)}$:

$$J_{(i)} = \min_{Gz_{(i)}=0} \left\|\Phi \check{z}_{(i)} - \Upsilon z_{(i)}\right\|^2, \tag{18}$$

$$\ker \Phi = 0, \qquad \ker \Upsilon = 0.$$

Запись (18) сводится к (17) заменой $\Upsilon z_{(i)}$ на $z_{(i)}$ при добавлении новых строк к матрице ограничений: $[G; g]\, z_{(i)} = 0$, где g есть наибольшая линейно независимая система строк, отвечающая условию $g\Upsilon = 0$.

Условия сильной состоятельности (сходимости с вероятностью 1) для оценок θ_L (17) при $\Phi = I$ исследовались в [9, 10, 11]. Переход к случаю $\Phi \neq I$ не составляет принципиальных затруднений. Кроме того, допустимо наличие не зависящей от параметра θ неособенной весовой матрицы в норме $\|\cdot\|$. В [19] доказана сильная состоятельность оценок θ_L при $\Phi = I$, $p = 0$, $\alpha_{0,\theta} \equiv I$, $\operatorname{vec}\beta_{0,\theta} \equiv \theta$. Обобщением результата [19] на случай $p \geqslant 0$ является следующая теорема.

Теорема 1. *При ограничениях* (i)–(iii) *и полном множестве наблюдений* $\left\{\check{z}_{(i)},\ i \geqslant 1\right\}$ *орторегрессионная оценка* θ_L (17) *сильно состоятельна по* $L \to \infty$.

Доказательство несложно провести по схеме [11] (опущено).

Далее без потери общности будем полагать $L = 1$, опустив соответствующие индексы у величин.

2.1 Оценки методов вариационной идентификации и ортогональной регрессии

Частными случаями оценок (17) являются оценки методов ВИ $\theta_{\mathtt{V}}$ и ОР $\theta_{\mathtt{OR}}$, определяемые соотношениями:

$$\theta_{\mathtt{V}} = \arg\min_{\theta} J(\theta), \qquad J(\theta) = \min_{Gz=0} \|\check{z} - z\|^2, \tag{19}$$

$$G = \begin{pmatrix} \gamma_{0,\theta} & \gamma_{1,\theta} & \cdots & \gamma_{p,\theta} & & & 0 \\ & \gamma_{0,\theta} & \gamma_{1,\theta} & \cdots & \gamma_{p,\theta} & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_{0,\theta} & \gamma_{1,\theta} & \cdots & \gamma_{p,\theta} \end{pmatrix},$$

$$\theta_{\mathtt{OR}} = \arg\min_{\theta} J_{\mathtt{OR}}(\theta), \qquad J_{\mathtt{OR}}(\theta) = \min_{G_{\mathtt{OR}}z=0} \|\check{z} - z\|^2, \tag{20}$$

$$G_{\mathtt{OR}} = \begin{pmatrix} \gamma_{0,\theta} & \gamma_{1,\theta} & \cdots & \gamma_{p,\theta} & & & & & & & 0 \\ & & & & \gamma_{0,\theta} & \gamma_{1,\theta} & \cdots & \gamma_{p,\theta} & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & & & \gamma_{0,\theta} & \gamma_{1,\theta} & \cdots & \gamma_{p,\theta} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что оценки (19) и (20) отличаются только матрицами ограничений: $G_{\mathtt{OR}}$ получается из G вычеркиванием части строк.

Для функции потерь J (19) получим явное выражение зависимости от θ (см. также [3, 10, 11]). Наименьшее по z значение квадрата нормы $\|\check{z}-z\|^2$ при условии $Gz = 0$ равно $\check{z}^{\mathrm{T}}\Pi_G\check{z}$, где $\Pi_G = G^{\mathrm{T}}\left(GG^{\mathrm{T}}\right)^{-1}G$ есть матрица проектора на ортогональное дополнение к подпространству $\ker G$ траекторий системы. Заменяя $G\check{z}$ на $V(\check{z})\gamma = V(\check{z})\mathfrak{D}\vartheta$, получим

$$J(\theta) = \vartheta^{\mathrm{T}}\mathfrak{D}^{\mathrm{T}}\check{V}^{\mathrm{T}}C\check{V}\mathfrak{D}\vartheta, \tag{21}$$
$$\check{V} \doteq V(\check{z}), \quad C = \left(GG^{\mathrm{T}}\right)^{-1}.$$

Таким же образом получается выражение для $J_{\mathtt{OR}}(\theta)$ (20):

$$J_{\mathtt{OR}}(\theta) = \vartheta^{\mathrm{T}}\mathfrak{D}^{\mathrm{T}}\check{V}_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}\check{V}_{\mathtt{OR}}\mathfrak{D}\vartheta,$$
$$\check{V}_{\mathtt{OR}} \doteq V_{\mathtt{OR}}(\check{z}), \quad V_{\mathtt{OR}}(z) = \begin{pmatrix} I_r \otimes \left(z_1^{\mathrm{T}} \dots z_{p+1}^{\mathrm{T}}\right) \\ I_r \otimes \left(z_{p+2}^{\mathrm{T}} \dots z_{2p+2}^{\mathrm{T}}\right) \\ \vdots \\ I_r \otimes \left(z_{M-p}^{\mathrm{T}} \dots z_M^{\mathrm{T}}\right) \end{pmatrix},$$
$$\exists k\ M = k(p+1) \in \overline{N-p, N},$$
$$C_{\mathtt{OR}} = \left(G_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} (\gamma_\theta\gamma_\theta^{\mathrm{T}})^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\gamma_\theta\gamma_\theta^{\mathrm{T}})^{-1} \end{pmatrix}.$$

2.2 Модифицированные оценки ортогональной регрессии

Введем еще один частный случай орторегрессионных оценок, так называемые модифицированные (M):

$$\theta_{\mathtt{M}} = \arg\min_\theta J_{\mathtt{M}}(\theta), \qquad J_{\mathtt{M}}(\theta) = \vartheta^{\mathrm{T}}\mathfrak{D}^{\mathrm{T}}\check{V}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}\check{V}\mathfrak{D}\vartheta. \tag{22}$$

Как показано в [6], M-оценки при $r = 1$ обладают большей устойчивостью к возмущениям в исходных данных, чем оценки ОР.

3 Сравнение оценок

С точки зрения общего определения (17), оценка ВИ (19) при $L \geqslant 1$ может быть представлена как оценка ОР (20) с “большой” матрицей $G_L = \operatorname{diag}(G \dots G)$ вместо $G = \operatorname{diag}(\gamma \dots \gamma)$.

По виду функции потерь, М-оценки занимают промежуточное положение между оценками ОР и ВИ. Они получаются из оценок ВИ (21) заменой матрицы C на матрицу $C_{\mathtt{OR}}$ более простой структуры. С другой стороны, модифицированная оценка $\theta_{\mathtt{M}}$ (22) является оценкой ОР (20) с особым образом сформированным вектором наблюдений $\check{z}$. Действительно, имеют место соотношения:

$$J_{\mathtt{M}} = \min_{G_{\mathtt{M}} z_{\mathtt{M}}=0} \|\Phi \check{z} - z_{\mathtt{M}}\|^2 , \tag{23}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \boxed{I} & & 0 \\ & \boxed{I} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \doteq \overline{\Phi} \otimes \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}, \quad \overline{\Phi} \in \mathbb{R}^{(N-p)(p+1)\times N},$$

$$G_{\mathtt{M}} = \begin{pmatrix} \gamma_\theta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_\theta & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_\theta \end{pmatrix}, \quad G_{\mathtt{M}}\Phi = G.$$

Здесь символ $\otimes$ обозначает Кронекерово произведение матриц. Как можно увидеть из определений (23), матрица ограничений $G_{\mathtt{M}}$ в модифицированном методе имеет ту же клеточно-диагональную структуру, что и матрица $G_{\mathtt{OR}}$ в методе ОР, отличаясь только увеличенным размером. Соответственно увеличен размер вектора $z_{\mathtt{M}}$ вспомогательной (модельной) траектории. Но это связано не с увеличением объема выборки за счет добавления новых независимых измерений, а с дублированием компонент в векторе измерений $\Phi\check{z}$:

$$\check{z} = (\check{z}_1; \dots; \check{z}_N)\,, \qquad \Phi\overline{z} = (\check{z}_1; \dots; \check{z}_{p+1}\check{z}_2; \dots; \check{z}_{p+2}; \dots\dots; \check{z}_N)\,.$$

Заметим,

$$V(z) = V_{\mathtt{OR}}(\Phi z).$$

С точки зрения вычислительных ресурсов, поиск минимума функции потерь метода ВИ требует существенно большего числа операций, чем ОР. Оценки ОР и М по вычислительным затратам практически не отличаются. Подробное рассмотрение оценок с вычислительной стороны выходит за рамки статьи.

Далее сравниваются оценки $\theta_{\mathtt{V}}$ (19, 21) и $\theta_{\mathtt{M}}$ (22).

3.1 Оценки метода вариационной идентификации как модифицированные оценки ортогональной регрессии с дополнительными линейными ограничениями на оцениваемые переменные

В функциях потерь (19), (22) явно выразим траекторию z через начальное состояние системы x_0 и входной сигнал $u = (u_1; \ldots; u_N)$:

$$J(\theta) = \min_w J(\theta, w), \quad J(\theta, w) \doteq \left\| \Phi\check{z} - \Phi H(\theta) w \right\|^2, \quad w \doteq (x_0; u)\,, \tag{24}$$

$$J_{\mathtt{M}}(\theta) = \min_{w_{\mathtt{M}}} J_{\mathtt{M}}(\theta, w_{\mathtt{M}}), \quad J_{\mathtt{M}}(\theta, w_{\mathtt{M}}) \doteq \left\| \Phi\check{z} - H_{\mathtt{M}}(\theta) w_{\mathtt{M}} \right\|^2, \quad w_{\mathtt{M}} \doteq (x_{\mathtt{M},0}; u_{\mathtt{M}})\,. \tag{25}$$

Матрицы $H(\theta)$, $H_{\mathtt{M}}(\theta)$, и векторы w, $w_{\mathtt{M}}$ выписаны в приложении (раздел 8.6). Сомножитель Φ добавлен к обоим слагаемым (24) для приведения (24) к виду (25) по первому слагаемому $\Phi\check{z}$.

Утверждение 1. *Существует линейное ограничение* $Mw_{\mathtt{M}} = 0$*, при наложении которого функция потерь* $J_{\mathtt{M}}(\theta)$ (25) *совпадает с функцией потерь* $J(\theta)$ (24)*:*

$$J(\theta) = \min_w J(\theta, w) = \min_{w_{\mathtt{M}}: Mw_{\mathtt{M}}=0} J_{\mathtt{M}}(\theta, w_{\mathtt{M}}). \tag{26}$$

Доказательство см. в приложении, раздел 8.6.

3.2 Сравнение оценок по линейному приближению

В орторегрессионных методах параметры w, $w_{\mathtt{M}}$ оцениваются совместно с θ. Оценки для пар $(w; \theta)$, $(w_{\mathtt{M}}; \theta)$ можно заменить линейными приближениями, рассмотрев предельный случай малых возмущений.

Предположим, что случайные величины $\eta_{(i)} \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ имеют распределение $\mathbf{P}$ с выпуклым ограниченным носителем: $\operatorname{supp}\mathbf{P} \ni 0$, $\operatorname{diam}\operatorname{supp}\mathbf{P} < \sigma$. Пусть $\mathbf{M}\eta_{(i)} = 0$. Будем полагать величину σ достаточно малой, чтобы значения $\chi_{\mathtt{V}} \doteq (w_{\mathtt{V}}; \theta_{\mathtt{V}})$ и $\chi_{\mathtt{M}} \doteq (w_{\mathtt{M}}; \theta_{\mathtt{M}})$, получаемые минимизацией (24), (25), с вероятностью 1 уклонялись от истинных значений $\chi_* \doteq (w_*; \theta_*)$ не более чем на заранее заданную малую величину ε. Возможность такого выбора σ обусловлена однозначностью и непрерывностью зависимости оптимальных значений параметров $\chi \doteq (w; \theta)$ от исходных данных $\check{z}$. Эта зависимость задается как неявная функция системой равенств $\partial J(\check{z}, \chi)/\partial\chi = 0$. Существование и непрерывность неявной функции $\chi(\check{z})$ для орторегрессионных методов следует непосредственно из результатов [10] (приложение, раздел 8.10.2).

Пусть $(w^\diamond;\theta^\diamond)$ — некоторая оценка для $(w_*;\theta_*)$ с уклонением не более ε.

3.2.1 Линейные приближения

Запишем функцию потерь (24) в виде $J=\min\|F\|^2$ и разложим функцию F относительно точки $(z^\diamond;w^\diamond;\theta^\diamond)$, $z^\diamond=H(\theta^\diamond)w^\diamond$, в ряд Тейлора с остаточным членом R:

$$J(w,\theta)=\|F_0+\Delta F(w,\theta)+R(w,\theta)\|^2, \tag{27}$$

$$F_0\doteq z^\diamond-H(\theta^\diamond)w^\diamond=0,$$

$$\Delta F\doteq\Delta\check{z}-\Delta H(\theta^\diamond,\Delta\theta)w^\diamond-H(\theta^\diamond)\Delta w,$$

$$\Delta\check{z}\doteq\check{z}-z^\diamond,\quad \Delta w\doteq w-w^\diamond,\quad \Delta\theta\doteq\theta-\theta^\diamond.$$

В записи (27) выделим слагаемые, зависящие от переменных $(\Delta w;\Delta\theta)\doteq\Delta\chi$:

$$J(\Delta\chi)=\|\Delta\check{z}-\Delta f(\chi^\diamond,\Delta\chi)+R(\chi^\diamond,\Delta\chi)\|^2=$$

$$=\|\Delta\check{z}-\Delta f(\chi^\diamond,\Delta\chi)\|^2+O\left(\|\Delta\chi\|^3\right). \tag{28}$$

Оценка ВИ $\chi_{\mathtt{V}}$, соответствующая измерениям $\Delta\check{z}\doteq\check{z}-z^\diamond$, вычисляется путем минимизации функции потерь (28):

$$\chi_{\mathtt{V}}=\chi^\diamond+\Delta\chi_{\mathtt{V}}, \tag{29}$$

$$\Delta\chi_{\mathtt{V}}=\arg\min_{\Delta\chi}J(\Delta\chi).$$

Зададимся приближенной функцией потерь

$$\widetilde{J}(\Delta\chi)=\|\Delta\check{z}-\Delta f(\chi^\diamond,\Delta\chi)\|^2. \tag{30}$$

Минимизируя приближенную функцию $\widetilde{J}(\Delta\chi)$, получим некоторую оценку $\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}$:

$$\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}=\chi^\diamond+\Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}, \tag{31}$$

$$\Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}=\arg\min_{\Delta\chi}\widetilde{J}(\Delta\chi).$$

Покажем, что оценка $\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}$ является приближением для $\chi_{\mathtt{V}}$ в следующем смысле.

Утверждение 2. $\|\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}-\chi_{\mathtt{V}}\|=o\left(\|\chi_{\mathtt{V}}-\chi^\diamond\|\right)$, *т. е. при* $\|\chi_{\mathtt{V}}-\chi^\diamond\|\to0$ *имеет место сходимость*

$$\frac{\|\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}-\chi_{\mathtt{V}}\|}{\|\chi_{\mathtt{V}}-\chi^\diamond\|}\to0.$$

Другими словами, если рассматривать оценку $\chi_{\mathtt{V}}$ как один шаг итерационной процедуры уточнения оценки $\chi^{\diamond}$, то по мере уменьшения величины шага, разница между $\chi_{\mathtt{V}}$ и $\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}$ будет уменьшаться быстрее, чем величина шага $\|\chi_{\mathtt{V}} - \chi^{\diamond}\|$. В этом смысле $\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}$ является приближением для $\chi_{\mathtt{V}}$.

Замечание. В рассуждениях всюду полагаем $\chi_{\mathtt{V}} - \chi^{\diamond} \doteq \Delta\chi_{\mathtt{V}} \neq 0$.

Доказательство. 1) Установим лемму:

Лемма 1. *Пусть некоторая функция $J(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ представима в виде суммы $J(x) = J_1(x) + R(x)$, $J_1(x) = J_0 + (x - x_0)^{\mathrm{T}} Q(x - x_0)$, x, $x_0 \in B$, где $Q > 0$ — положительно определенная матрица, B — замкнутое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, и функция $R(x)$ в B непрерывна и ограничена: $\forall x \in B\ \|R(x)\| < C$. Обозначим x_1 точку минимума $J(x)$ в B. Тогда расстояние между точками минимума функций $J(x)$ и $J_1(x)$ ограничено сверху величиной: $\|x_1 - x_0\| < \sqrt{\frac{2C}{\lambda_{\min}(Q)}}$, где $\lambda_{\min}(Q)$ — наименьшее собственное число матрицы Q.*

Доказательство леммы дано в приложении, раздел 8.7.

2) Введем обозначения:

$$x \doteq \Delta\chi, \quad J_1(x) \doteq \widetilde{J}(\Delta\chi),$$

$$x_0 \doteq \Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}, \quad J_0 \doteq \widetilde{J}(\Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}),$$

$$Q \doteq \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{J}(x)}{\partial x^2}(x_0).$$

Запишем функцию потерь $\widetilde{J}(\Delta\chi)$ (30):

$$\widetilde{J}(\Delta\chi) \doteq J_1(x) = J_0 + (x - x_0)^{\mathrm{T}} Q(x - x_0). \tag{32}$$

Применим лемму 1 к функциям $\widetilde{J}(\Delta\chi)$ (32) и $J(\Delta\chi) = \widetilde{J}(\Delta\chi) + O\left(\|\Delta\chi\|^3\right)$ (28), учитывая оценку

$$R(x) = O\left(\|\Delta\chi\|^3\right) < C_1 \|\Delta\chi_{\mathtt{V}}\|^3$$

для некоторой константы C_1. Эта оценка обеспечивается надлежащим выбором области B значений $\Delta\chi$. Согласно лемме, имеет место следующая оценка сверху для расстояния между корнями функций $\widetilde{J}(\Delta\chi)$ и $J(\Delta\chi)$:

$$\|\Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}} - \Delta\chi_{\mathtt{V}}\| = \|\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}} - \chi_{\mathtt{V}}\| < \sqrt{\frac{2C_1\|\Delta\chi_{\mathtt{V}}\|^3}{\lambda_{\min}(Q)}} \doteq C_2\|\Delta\chi_{\mathtt{V}}\|^{3/2} = C_2\|\chi_{\mathtt{V}} - \chi^{\diamond}\|^{3/2}.$$

Отсюда следует $\|\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}} - \chi_{\mathtt{V}}\| = o\left(\|\chi_{\mathtt{V}} - \chi^{\diamond}\|\right)$.

Утверждение доказано.

Построим линейное приближение для модифицированных оценок (25). Для этого повторим изложенные выше рассуждения, заменив обозначения.

Запишем функцию потерь (25) в виде $J_{\mathtt{M}} = \min \|F_{\mathtt{M}}\|^2$ и разложим функцию $F_{\mathtt{M}}$ относительно точки $(z^{\diamond}; w^{\diamond}; \theta^{\diamond})$ в ряд Тейлора с остаточным членом $R_{\mathtt{M}}$:

$$J_{\mathtt{M}}(w_{\mathtt{M}}, \theta) = \left\|F_{\mathtt{M},0} + \Delta F_{\mathtt{M}}(w_{\mathtt{M}}, \theta) + R_{\mathtt{M}}(w_{\mathtt{M}}, \theta)\right\|^2, \tag{33}$$

$$F_{\mathtt{M},0} \doteq \Phi z^{\diamond} - H_{\mathtt{M}}(\theta^{\diamond}) w_{\mathtt{M}}^{\diamond} = 0,$$

$$\Delta F_{\mathtt{M}} \doteq \Phi \Delta \check{z} - \Delta H_{\mathtt{M}}(\theta^{\diamond}, \Delta\theta) w_{\mathtt{M}}^{\diamond} - H_{\mathtt{M}}(\theta^{\diamond}) \Delta w_{\mathtt{M}},$$

$$\Delta \check{z} \doteq \check{z} - z^{\diamond}, \quad \Delta w_{\mathtt{M}} \doteq w_{\mathtt{M}} - w_{\mathtt{M}}^{\diamond}, \quad \Delta\theta \doteq \theta - \theta^{\diamond}.$$

В записи (33) выделим слагаемые, зависящие от переменных $(\Delta w_{\mathtt{M}}; \Delta\theta) \doteq \Delta\chi$:

$$J_{\mathtt{M}}(\Delta\chi) = \left\|\Phi\Delta\check{z} - \Delta f_{\mathtt{M}}(\chi^{\diamond}, \Delta\chi) + R_{\mathtt{M}}(\chi^{\diamond}, \Delta\chi)\right\|^2 =$$

$$= \left\|\Phi\Delta\check{z} - \Delta f_{\mathtt{M}}(\chi^{\diamond}, \Delta\chi)\right\|^2 + O\left(\|\Delta\chi\|^3\right). \tag{34}$$

Модифицированная оценка $\chi_{\mathtt{M}}$, соответствующая измерениям $\Delta\check{z} \doteq \check{z} - z^{\diamond}$, вычисляется путем минимизации функции потерь (34):

$$\chi_{\mathtt{M}} = \chi^{\diamond} + \Delta\chi_{\mathtt{M}}, \tag{35}$$

$$\Delta\chi_{\mathtt{M}} = \arg\min_{\Delta\chi} J_{\mathtt{M}}(\Delta\chi).$$

Зададимся приближенной функцией потерь

$$\widetilde{J}_{\mathtt{M}}(\Delta\chi) = \left\|\Phi\Delta\check{z} - \Delta f_{\mathtt{M}}(\chi^{\diamond}, \Delta\chi)\right\|^2. \tag{36}$$

Минимизируя приближенную функцию $\widetilde{J}_{\mathtt{M}}(\Delta\chi)$, мы получим некоторую оценку $\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}}$:

$$\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}} = \chi^{\diamond} + \Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}}, \tag{37}$$

$$\Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}} = \arg\min_{\Delta\chi} \widetilde{J}_{\mathtt{M}}(\Delta\chi).$$

Оценка $\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}}$ является приближением для $\chi_{\mathtt{M}}$ согласно следующему утверждению.

Утверждение 3. $\|\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}} - \chi_{\mathtt{M}}\| = o\left(\|\chi_{\mathtt{M}} - \chi^{\diamond}\|\right)$, *т. е. при* $\|\chi_{\mathtt{M}} - \chi^{\diamond}\| \to 0$ *имеет место сходимость*

$$\frac{\|\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}} - \chi_{\mathtt{M}}\|}{\|\chi_{\mathtt{M}} - \chi^{\diamond}\|} \to 0.$$

Доказательство полностью аналогично доказательству утверждения 2.

3.2.2 Сравнение по линейным приближениям

В изложенном выше смысле можо заменить оценки $\chi_{\mathtt{V}}$, $\chi_{\mathtt{M}}$ (и соответственно $\theta_{\mathtt{V}}$, $\theta_{\mathtt{M}}$) (29, 35) линейными приближениями $\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}$, $\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}}$ ($\widetilde{\theta}_{\mathtt{V}}$, $\widetilde{\theta}_{\mathtt{M}}$) (31, 37). После замены используется изложенная во введении и приложении (раздел 8.8) схема сравнения линейных оценок.

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Пусть $D_{\mathtt{V}}$ и $D_{\mathtt{M}}$ — дисперсии оценок $\widetilde{\theta}_{\mathtt{V}}$ и $\widetilde{\theta}_{\mathtt{M}}$ соответственно. Тогда $D_{\mathtt{V}} \leqslant D_{\mathtt{M}}$, и равенство достигается тогда и только тогда, когда*

$$\forall \Delta\theta \quad H_{\mathtt{M}}(\theta_*)^{\mathrm{T}} \Delta H_{\mathtt{M}}(\theta_*, \Delta\theta) = 0.$$

Доказательство. Учтем соответствие обозначений в теореме 7 (приложение, раздел 8.8) и в формулах (33, 36), с заменой $\theta^{\diamond}$ на θ_* при малых ε (согласно определению $\theta^{\diamond}$, данному в начале раздела 3.2):

$$\theta \doteq \Delta\theta, \qquad w \doteq \Delta w_{\mathtt{M}}, \qquad Y \doteq \Phi\Delta\check{z},$$
$$K \doteq H_{\mathtt{M}}(\theta_*), \qquad L\theta \doteq \Delta H_{\mathtt{M}}(\theta_*, \Delta\theta) w_{\mathtt{M}*}.$$

Тогда утверждение теоремы является непосредственным следствием теоремы 7. Теорема доказана.

Укажем класс систем (1), для которого всегда выполняется строгое неравенство $D_{\mathtt{V}} < D_{\mathtt{M}}$.

Определение. Пусть $\alpha(s) \doteq \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_p s^p$ и многочлен $\det \alpha(s)$ не имеет нулевых корней. Тогда в системе (82) многочлен $\det(sI - A)$ не имеет нулевых корней и матрица A неособенная. Кроме того, пусть в разложении

$$\alpha(s) = (\mathrm{diag}_i\, s^{p_i}) \cdot \left(\alpha_{[0]} + s^{-1}\alpha_{[-1]} + \ldots + s^{-p_r}\alpha_{[-p_r]}\right),$$
$$\mathrm{diag}_i\, s^{p_i} \doteq \mathrm{diag}\left(s^{p_1}, s^{p_2}, \ldots, s^{p_r}\right),$$

с числовыми матрицами $\alpha_{[i]}$ матрица $\alpha_{[0]}$ не зависит от параметра θ. Тогда в равносильной системе (82) в форме восстанавливаемости матрица C не зависит от параметра θ (приложение, раздел 8.4). В этом случае будем говорить, что система (1) принадлежит классу *простых.*

В [13, 14] было приведено без доказательства следующее утверждение.

Теорема 3. *Для систем из класса простых всегда*

$$\exists \Delta\theta\ H_{\mathtt{M}}(\theta)^{\mathrm{T}} \Delta H_{\mathtt{M}}(\theta, \Delta\theta) \neq 0,$$

т. е. всегда $D_{\mathtt{V}} < D_{\mathtt{M}}$.

Доказательство дано в приложении, раздел 8.9.

Теоремы 2 и 3 утверждают, что метод ВИ в предельном случае малых возмущений обеспечивает оценки параметров с меньшей дисперсией, чем метод ОР, по крайней мере для систем из класса простых, за счет более полного использования информации о линейных связях в наблюдениях.

4 Асимптотическое распределение оценок (предельный случай $L \to \infty$)

Состоятельность оценки θ_L (17) утверждается в теореме 1. В этом разделе исследуется асимптотическое распределение при $L \to \infty$.

Сначала сформулируем результат для оценок ВИ. Для оценок ОР соответствующие утверждения получаются заменой G на $G_{\mathtt{OR}}$ и V на $V_{\mathtt{OR}}$.

Пусть γ^{ij} — ij-й элемент γ_θ (3), тогда строка γ^i имеет вид

$$\gamma^i \doteq \left(\gamma^i_0, \gamma^i_1, \ldots, \gamma^i_p\right) \doteq \left(\gamma^{i1}, \gamma^{i2}, \ldots, \gamma^{it}\right), \quad t \doteq (p+1)(r+m).$$

Будем располагать строки в G согласно (7). Обозначим

$$\Pi \doteq I - G^{\mathrm{T}} C G,$$

$$E_{ij} \doteq \partial G / \partial \gamma^{ij}, \tag{38}$$

$$\widehat{z} \doteq \Pi \check{z}.$$

Матрицу V (7) разобьем на клеточные столбцы:

$$V = \begin{pmatrix} \mathfrak{V} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathfrak{V} \end{pmatrix} = I_r \otimes \mathfrak{V} \doteq \left(V_1 \ldots V_r\right), \tag{39}$$

$$V_1 \doteq \begin{pmatrix} \mathfrak{V} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad V_r \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{V} \end{pmatrix}.$$

Обозначим V_{ij} j-й столбец матрицы V_i. Отметим, что V_{ij} есть столбец матрицы V, порядковый номер l которого вычисляется по двойному индексу ij согласно правилу $l = j + (i-1)(p+1)(r+m)$.

Теорема 4. *В условиях теоремы 1 орторегрессионная оценка* θ_L (1), (19) *асимптотически по* $L \to \infty$ *нормальна с дисперсией*

(1) $$\operatorname{cov} L^{1/2}(\theta_L - \theta_*) \overset{L\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbf{M}\, J_1'')^{-1} (\mathbf{M}\, J_1' J_1'^{\mathrm{T}}) (\mathbf{M}\, J_1'')^{-1},$$

(2) $$\mathbf{M}\, J_1' J_1'^{\mathrm{T}} = \sigma^2 \mathbf{M}\, J_1'' + \sigma^2 D^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X D,$$

(3) $$\mathbf{M}\, J_1'' = \mathbf{M}\, D^{\mathrm{T}} V_*^{\mathrm{T}} C V_* D,$$

$$X^{\mathrm{T}} X \doteq \| x_{ij,kl} \|_{k \in \overline{1,r},\, l \in \overline{1,t}}^{i \in \overline{1,r},\, j \in \overline{1,t}}, \quad x_{ij,kl} \doteq \mathbf{M}\, (\widehat{V} - V_*)_{ij}^{\mathrm{T}} C (\widehat{V} - V_*)_{kl},$$

(4) $$x_{ij,kl} = \sigma^2 \operatorname{Sp} \Pi E_{ij}^{\mathrm{T}} C E_{kl} \Pi,$$

$$\widehat{V} \doteq V(\widehat{z}), \qquad V_* \doteq V(z_*).$$

Доказательство теоремы дано в статье [10] и для удобства читателя приведено с незначительными изменениями в приложении (раздел 8.10).

Замечание 1. В теореме 4 из формулы (4) следует, что второе слагаемое в (2) имеет величину порядка σ^4.

Рассмотрим модифицированные оценки (22). Они отличаются от оценок ОР и ВИ тем, что выражение $G^{\mathrm{T}} (G_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}})^{-1} G$ в функции потерь (22):

$$J_{\mathtt{M}}(\theta) = \vartheta^{\mathrm{T}} \mathfrak{D}^{\mathrm{T}} \check{V}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} \check{V} \mathfrak{D} \vartheta =$$
$$= \check{z}^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} (G_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}})^{-1} G \check{z}$$

— уже не является проективной матрицей со свойством $\Pi^2 = \Pi$. Это существенно усложняет отдельные моменты доказательства. Учитывая замечание 1, для М-оценок заменим некоторые из точных выражений оценками сверху.

Теорема 5. *В условиях теоремы 1 модифицированная орторегрессионная оценка* θ_L (1), (22) *асимптотически по* $L \to \infty$ *нормальна с дисперсией*

(1) $$\operatorname{cov} L^{1/2}(\theta_L - \theta_*) \overset{L\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbf{M}\, J_1'')^{-1} (\mathbf{M}\, J_1' J_1'^{\mathrm{T}}) (\mathbf{M}\, J_1'')^{-1},$$

(2) $$\mathbf{M}\, J_1' J_1'^{\mathrm{T}} = \sigma^2 \mathbf{M}\, D^{\mathrm{T}} V_*^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} V_* D + \sigma^4 D^{\mathrm{T}} W D,$$

$$0 < W < c_1 I,$$
$$c_1 = N^4 (p+1)^3 r (r+m+1)^3 \operatorname{Sp} (\gamma_\theta^{\mathrm{T}} \gamma_\theta)^{-1}.$$

(3) $$\mathbf{M}\, J_1'' = \mathbf{M}\, D^{\mathrm{T}} V_*^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} V_* D + \sigma^2 \operatorname{Sp} \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1} \right)_{\theta\theta}'',$$

$$\operatorname{Sp} \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1} \right)_{\theta\theta}'' \leqslant 4\, (p+1)^{1/2} N^3 (r+m)^2 \| D D^{\mathrm{T}} \| \operatorname{Sp} (\gamma_\theta^{\mathrm{T}} \gamma_\theta)^{-1}.$$
$$V_* \doteq V(z_*).$$

Доказательство дано в приложении, раздел 8.11.

Следствие. *В случае $\sigma \to 0$ предельные значения асимптотических дисперсий оценок ВИ, ОР, М определяются первыми слагаемым в формулах* (2) *утверждений теорем* 4, 5*:*

$$\operatorname{cov} L^{1/2}(\theta_L - \theta_*) \overset{L\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 \left(\mathbf{M}\, J_1''\right)^{-1}, \qquad \sigma \to 0,$$

где для оценок ВИ

$$\mathbf{M}\, J_1'' \overset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{M}\, D^{\mathrm{T}} V_*^{\mathrm{T}} C V_* D, \tag{40}$$

для оценок ОР

$$\mathbf{M}\, J_1'' \overset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{M}\, D^{\mathrm{T}} V_{\mathtt{OR}*}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} V_{\mathtt{OR}*} D, \tag{41}$$

и для оценок М

$$\mathbf{M}\, J_1'' \overset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{M}\, D^{\mathrm{T}} V_*^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} V_* D. \tag{42}$$

5 Распределение оценок при возмущениях малой амплитуды (предельный случай $\sigma \to 0$)

Получим предельные значения дисперсий оценок (40), (41), (42) другим способом, применяя теорему о неявной функции.

Пусть $\check{z}$ — наблюдение траектории. Оценка параметров $\theta \doteq \theta_1$ (17) определяется из уравнения

$$J_\theta'(\check{z}, \theta) = 0, \tag{43}$$

где J_θ' обозначает частную производную J по θ. С учетом того, что все необходимые производные существуют (см. раздел 8.10.2), уравнение (43) задает неявную функцию

$$\theta(\check{z}) = \theta_0 + \Delta\theta(\Delta z) + \Delta^2\theta(\Delta z) + \ldots$$

$$\Delta z \doteq \check{z} - z_0, \qquad J_\theta'(z_0, \theta_0) = 0. \tag{44}$$

При малых уклонениях наблюдений $\check{z}$ от опорной точки z_0 оценка θ будет мало уклоняться от значения $\theta_0 \doteq \theta(z_0)$. Если уклонения Δz носят стохастический характер, можно описать распределение оценки θ, отталкиваясь от известного распределения наблюдений $\check{z}$.

Разложим левую часть уравнения (43) в ряд Тейлора относительно точки (z_0, θ_0):

$$J'_\theta(\check{z}, \theta) = J'_\theta(z_0, \theta_0) + J''_{\theta z}(z_0, \theta_0)\Delta z + J''_{\theta\theta}(z_0, \theta_0)\Delta\theta + O_{z,\theta,2},$$

где обозначено

$$O_{z,\theta,2} \doteq O(\|\Delta z\|^2) + O(\|\Delta\theta\|^2).$$

Учитывая (43), (44), получаем

$$J''_{\theta z}(z_0, \theta_0)\Delta z + J''_{\theta\theta}(z_0, \theta_0)\Delta\theta + O_{z,\theta,2} = 0,$$

откуда

$$\Delta\theta = -\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta z}\Delta z + O_{z,\theta,2}. \tag{45}$$

Будем считать Δz случайной величиной, распределенной в окрестности нуля с нулевым мат. ожиданием и дисперсией $\sigma^2 I$. Пусть носитель распределения $\check{z}$ имеет конечный диаметр не больше $c{\cdot}\sigma$, где c — некоторая константа.

Проведем сравнение $\Delta\theta$ с нормированным уклонением из условия теоремы 4:

$$\Delta\theta_L \doteq L^{1/2}(\theta_L - \theta_*). \tag{46}$$

Утверждение 4. *Для оценок ВИ, М, ОР уклонение* $\Delta\theta$ (45) *в пределе* $\sigma \to 0$ *и уклонение* $\Delta\theta_L$ (46) *в пределе* $L \to \infty$ *имеют одинаковую дисперсию*

$$D_{\Delta\theta} \doteq \sigma^2 Q_*^{-1},$$

где для оценок ВИ

$$Q_* = D^{\mathrm{T}} V_*^{\mathrm{T}} C V_* D,$$

для модифицированных оценок (М)

$$Q_* = D^{\mathrm{T}} V_*^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} V_* D,$$

и для оценок ОР

$$Q_* = D^{\mathrm{T}} V_{\mathtt{OR}*}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} V_{\mathtt{OR}*} D.$$

Доказательство. 1) В случае оценок ВИ используем выражения для производных J'_θ, $J''_{\theta\theta}$ (лемма 3, приложение, раздел 8.10.2):

$$J = \check{z}^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C G \check{z},$$

$$J'_\theta = (\theta^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} + d^{\mathrm{T}})\, \check{V}^{\mathrm{T}} C \widehat{V} D = z^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C \widehat{V} D$$

$$\Rightarrow \quad J''_{\theta z} = \frac{\partial J'^{\mathrm{T}}_{\theta}}{\partial z} = D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}CG, \tag{47}$$

$$J''_{\theta\theta} = D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}C\widehat{V}D + O_{z,1}, \qquad O_{z,k} \doteq O(\|\Delta z\|^k). \tag{48}$$

Производные берутся в точках z_0, θ_0, и сглаженное значение траектории $\widehat{z}$ понимается как проекция $\check{z}$ на пространство траекторий модели с параметрами θ_0.

Подставляя (47), (48) в (45), получим зависимость $\Delta\theta(\Delta z)$:

$$\Delta\theta = -\left(D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}C\widehat{V}D + O_{z,1}\right)^{-1} D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}CG\Delta z + O_{z,2} =$$

$$= -\left(D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}C\widehat{V}D\right)^{-1} D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}CG\Delta z + O_{z,2}.$$

Вычислим дисперсию $\Delta\theta$:

$$D_{\Delta\theta} = \mathbf{M}\,\Delta\theta\Delta\theta^{\mathrm{T}} =$$

$$= \mathbf{M}\,\left\{\left(D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}C\widehat{V}D\right)^{-1} D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}CG\,(\Delta z\Delta z^{\mathrm{T}}) \times\right.$$

$$\left.\times G^{\mathrm{T}}C\widehat{V}D\left(D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}C\widehat{V}D\right)^{-1}\right\} + O_{z,3} =$$

$$= \sigma^2\widehat{Q}^{-1} + O_{z,3}, \tag{49}$$

$$\widehat{Q} \doteq D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}C\widehat{V}D.$$

2) Асимптотическое по $L \to \infty$ выражение для дисперсии уклонения $\Delta\theta_L$ (46) согласно теореме 4 имеет вид:

$$D_{\Delta\theta_L} \doteq \operatorname{cov} L^{1/2}(\theta_L - \theta^*) \ \to$$

$$\to \ (Q_*)^{-1}\left(\sigma^2 Q_* + \sigma^2 D^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}XD\right)(Q_*)^{-1} =$$

$$= \sigma^2 Q_*^{-1} + O_{z,4}, \tag{50}$$

$$Q_* \doteq D^{\mathrm{T}}V_*^{\mathrm{T}}CV_*D.$$

Сравним выражения (49) и (50).

Рассмотрим предельный случай возмущений малой амплитуды $\sigma \to 0$ ($\|\Delta z\| \to 0$) при условии $z_0 = z_*$, $\theta_0 = \theta_*$. Интуитивно понятно, что при $\|\Delta z\| \to 0$ оценка траектории $\hat{z}$ сходится к значению z_*, и соответственно, $\widehat{Q} \to Q_*$. Здесь важно убедиться, что разность между $\sigma^2\widehat{Q}^{-1}$ и $\sigma^2 Q_*^{-1}$ имеет порядок величины не больше остатка $O_{z,3}$ в формуле (49). Действительно, из разложения $\|\check{z}-z_*\|^2 = \|\hat{z}-z_*\|^2+\|\check{z}-\hat{z}\|^2$ следует $\|\hat{z}-z_*\| < \|\check{z}-z_*\| = \|\Delta z\|$. Значит, $\|\widehat{V} - V_*\| = O_{z,1}$, и в силу равенства

$$\widehat{Q} - Q_* =$$

$$= (\widehat{V} - V_*)^{\mathrm{T}} C(\widehat{V} - V_*) +$$
$$+ V_*^{\mathrm{T}} C(\widehat{V} - V_*) + (\widehat{V} - V_*)^{\mathrm{T}} C V_*$$

получаем

$$\widehat{Q} - Q_* = O_{z,1}.$$

Далее,

$$\widehat{Q}^{-1} - Q_*^{-1} = -Q_*^{-1}\left(\widehat{Q} - Q_*\right)Q_*^{-1} + O\left(\|\widehat{Q} - Q_*\|^2\right) = O\left(\|\widehat{Q} - Q_*\|\right) = O_{z,1}.$$

Следовательно,

$$\sigma^2\widehat{Q}^{-1} - \sigma^2 Q_*^{-1} = O_{z,3}.$$

Значит, уклонение $\Delta\theta$ (45) в пределе $\sigma \to 0$ и уклонение $\Delta\theta_L$ (46) в пределе $L \to \infty$ имеют одну и ту же дисперсию

$$D_{\Delta\theta} \doteq \sigma^2 Q_*^{-1}, \qquad Q_* = D^{\mathrm{T}} V_*^{\mathrm{T}} C V_* D.$$

3) Для оценок ОР все выражения остаются в силе с заменой G на $G_{\mathtt{OR}}$, C на $C_{\mathtt{OR}}$ и V на $V_{\mathtt{OR}}$:

$$Q_* = D^{\mathrm{T}} V_{\mathtt{OR}*}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} V_{\mathtt{OR}*} D.$$

4) Для модифицированных оценок вместо леммы 3 следует использовать лемму 6 (приложение, раздел 8.11).

Утверждение доказано.

6 Системы без свойства управляемости в задачах отделения трендов

Особенностью систем без свойства управляемости является наличие неуправляемых свободных движений. Оценка параметров и траекторий неуправляемых движений может быть осуществлена методами орторегрессионного типа.

Здесь будет показано, что неуправляемые системы возникают, в частности, в задачах отделения трендов от сигналов линейных динамических объектов. Трендами называем аддитивные составляющие, описываемые линейными разностными уравнениями, отличающимися от уравнений объекта. Тренды представляют собой детерминированные сигналы и играют роль возмущений нестохастического характера. Отделить тренд значит вычислить начальные условия и параметры уравнения тренда исходя из предъявленных измерений суммы тренда и полезного сигнала. Начальные значения полезного сигнала также подлежат вычислению. Если не все параметры системы известны, можно говорить о совместной оценке неизвестных параметров и начальных условий тренда и полезного сигнала, объединяя их в одну новую систему. Будет показано, что такие объединенные системы неуправляемы.

6.1 Разделение тренда и сигналов системы

Рассмотрим объект с траекториями z, описываемыми системой уравнений

$$Gz = 0, \tag{51}$$

и сигнал тренда ε:

$$F\varepsilon = 0. \tag{52}$$

Пусть наблюдаемой величиной является сумма $\check{z}$ сигналов объекта и тренда:

$$\check{z} = z + \varepsilon.$$

Запишем уравнения для сигналов объекта и тренда в виде системы

$$\begin{cases} \check{z} = (I, I) \begin{bmatrix} z \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \\ \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 0, \end{cases} \tag{53}$$

или, введя обозначения

$$P \doteq \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}, \quad N \doteq (I, I), \quad x \doteq \begin{bmatrix} z \\ \varepsilon \end{bmatrix},$$

получим систему

$$\begin{cases} \check{z} = Nx, \\ Px = 0. \end{cases} \tag{54}$$

Задача. По наблюдению $\check{z}$ при известных матрицах N, P восстановить x.

Если задача вычисления x по предъявленному $\check{z}$ имеет единственное решение, будем говорить, что сигналы тренда ε и объекта z разделяемы.

6.2 Условия разделяемости

Получим условия разделяемости в виде условий на матрицы N, P.

Пусть наблюдение $\check{z}$ не содержит ошибок и точно удовлетворяет системе (54) при некотором x (противоположный случай рассмотрен ниже в разделе 6.4). Условие $Px = 0$ равносильно выполнению равенства $x = P_\perp \chi$ при некотором χ, и вычисление x сводится к вычислению χ. Из первого уравнения системы (54) получаем

$$\check{z} = NP_\perp \chi,$$

откуда следует искомое условие на матрицы N, $P_\perp$:

Предложение 2. *Задача вычисления сигналов x по наблюдениям $\check{z}$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $NP_\perp$ линейно независимы:*

$$\ker NP_\perp = 0.$$

Утверждение 5. *Следующие условия единственности равносильны:*

$$\ker NP_\perp = 0, \tag{55}$$

$$\ker (G_\perp, F_\perp) = 0, \tag{56}$$

$$\ker \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = 0, \tag{57}$$

$$\ker F \cap \ker G = 0. \tag{58}$$

Доказательство. 1) Равносильность (55) и (56) вытекает из определений:

$$P_\perp \doteq \begin{pmatrix} G_\perp & 0 \\ 0 & F_\perp \end{pmatrix}, \qquad NP_\perp = (G_\perp, F_\perp)\,.$$

2) Для доказательства равносильности (55) и (58), установим равносильность противоположных утверждений:

$$\ker NP_\perp \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ker F \cap \ker G \neq 0.$$

Переформулируем последнее утверждение, используя определение (12) и равносильность (55) и (56):

$$\ker (G_\perp, F_\perp) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{im} G_\perp \cap \operatorname{im} F_\perp \neq 0.$$

Для доказательства этого соотношения заметим, что $\ker (G_\perp, F_\perp) \neq 0$ значит $G_\perp x = F_\perp y \doteq z$ для некоторых x, y, то есть $\operatorname{im} G_\perp$ и $\operatorname{im} F_\perp$ имеют общий элемент z. Обратно, если $z \in \operatorname{im} G_\perp \cap \operatorname{im} F_\perp \neq 0$, то $z = G_\perp x = F_\perp y$ для некоторых x, y, следовательно, $\ker (G_\perp, F_\perp) \neq 0$. Тем самым, равносильность (55) и (58) доказана.

3) Установим равносильность (57) и (56). От противного,

$$\ker \begin{pmatrix} P \\ N \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \neq 0 \begin{cases} Px = 0, \\ Nx = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in P_\perp, \\ x \in N_\perp, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = P_\perp \chi = N_\perp \omega \quad \Leftrightarrow \quad \ker (P_\perp, N_\perp) \neq 0.$$

Утверждение доказано.

Отметим, что разделяемость сигналов тренда и системы равносильна нулевому пересечению многообразий трендов и траекторий системы ($\ker F \cap \ker G = 0$).

6.2.1 Условие нулевого пересечения многообразий динамических траекторий

Рассмотрим случай, когда системы (51), (52) описывают многообразия динамических траекторий. Это значит, что матрицы F и G имеют теплицев вид (5) и соответствуют разностным уравнениям вида (1).

Пусть, в согласии с формой записи (9),

$$G = \gamma(s) \otimes E, \qquad F = \phi(s) \otimes E. \tag{59}$$

Утверждение 6. *Условие* $\ker F \cap \ker G = 0$ *равносильно тому, что каноническая форма* $\operatorname{Sm} \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \phi(s) \end{pmatrix}$ *для всех* s *имеет линейно независимые столбцы:*

$$\forall\, s \in \mathbb{R} \quad \ker \operatorname{Sm} \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \phi(s) \end{pmatrix} = 0. \tag{60}$$

Последнее равносильно тому, что $\mathrm{Sm}\begin{pmatrix}\gamma(s)\\ \phi(s)\end{pmatrix}$ *состоит только из нулей и единиц и является "вертикальной" (число строк $\geqslant$ числа столбцов).*

Доказательство. Как несложно увидеть,

$$\ker F \cap \ker G = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ker \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = 0.$$

Далее,

$$\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(s) \otimes E \\ \phi(s) \otimes E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \phi(s) \end{pmatrix} \otimes E.$$

Следовательно, $\ker \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = 0$ означает, что система (1), соответствующая составной матрице $\gamma_\theta(s) \doteq \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \phi(s) \end{pmatrix}$, имеет только нулевые траектории. Последнее равносильно тому, что каноническая форма $\mathrm{Sm}\begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \phi(s) \end{pmatrix}$ для всех s имеет линейно независимые столбцы, или (равносильно) состоит только из нулей и единиц и является "вертикальной" (число строк $\geqslant$ числа столбцов) (см. раздел 1.2).

Утверждение доказано.

6.3 Восстановление сигналов (фильтрация тренда) при известных параметрах системы и точно известном суммарном сигнале

Запишем систему (53) в равносильном виде

$$\begin{cases} \check{z} = z + \varepsilon, \\ z = G_\perp w, \\ \varepsilon = F_\perp e. \end{cases} \tag{61}$$

При известном суммарном сигнале $\check{z}$ и известных матрицах $G_\perp$, $F_\perp$ нужно восстановить значения слагаемых z, ε (или w, e). Это задача косого проецирования $\check{z}$ на направления $\mathrm{im}\, G_\perp$, $\mathrm{im}\, F_\perp$, или разложения $\check{z}$ в сумму

$$\check{z} = G_\perp w + F_\perp e. \tag{62}$$

Решение дается формулой (75):

$$F_\perp e = F_\perp \left(F_\perp^{\mathrm{T}} \overline{G_\perp}\ \overline{G_\perp}^{\mathrm{T}} F_\perp \right)^{-1} F_\perp^{\mathrm{T}} \overline{G_\perp}\ \overline{G_\perp}^{\mathrm{T}} \check{z},$$

$$G_\perp w = \check{z} - F_\perp e$$

(см. приложение, раздел 8.2).

В силу соотношения 4 в предложении 1, предыдущее выражение можно переписать в виде

$$F_\perp e = F_\perp \left(F_\perp^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} G F_\perp \right)^{-1} F_\perp^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} G \check{z}. \tag{63}$$

Операция обращения выполнима при условии $\ker GF_\perp = 0$.

Предложение. (56), (57) $\Rightarrow$ $\ker GF_\perp = 0$.

Доказательство. Согласно определению символа ker, имеем

$$\ker A = 0, \quad \ker B = 0 \quad \Rightarrow \quad \ker AB = 0. \tag{64}$$

Далее положим $A = \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix}$, $B = (G_\perp, F_\perp)$. Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} (G_\perp, F_\perp) = \begin{pmatrix} 0 & GF_\perp \\ FG_\perp & 0 \end{pmatrix}.$$

Ввиду (56), (57) и (64),

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & GF_\perp \\ FG_\perp & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

тогда $\ker GF_\perp = 0$.

Предложение доказано.

Несложно увидеть, что все матрицы и произведения, входящие в формулу (63), имеют простую структуру, и вычисления легко выполнимы практически для любых размерностей вектора $\check{z}$ (см. пример в разделе 6.6).

6.4 Восстановление сигналов, если суммарный сигнал известен неточно

Пусть наблюдение $\check{z}$ содержит аддитивные ошибки и не удовлетворяет системе (54). Рассмотрим задачу восстановления x по неточным измерениям

$\check{z}$ посредством условной минимизации квадратичной функции потерь

$$\begin{cases} J(x) = \|\check{z} - Nx\|^2, \\ Px = 0. \end{cases} \tag{65}$$

Введем строку множителей Лагранжа λ и запишем необходимое условие минимума в виде равенства нулю производных по x и по λ расширенной функции потерь

$$J^* = \|\check{z} - Nx\|^2 + \lambda Px,$$

$$\begin{cases} J^*_x = 2(\check{z} - Nx)^{\mathrm{T}} N + \lambda P = 0, \\ J^*_\lambda = Px = 0. \end{cases} \tag{66}$$

Умножая обе части первого уравнения системы (66) справа на $P_\perp$, получим равенство

$$(\check{z} - Nx)^{\mathrm{T}} N P_\perp = 0,$$

откуда следует

$$P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} N x = P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} \check{z}.$$

Записав второе уравнение системы (66) в виде $x = P_\perp \chi$, получим

$$P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} N P_\perp \chi = P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} \check{z}. \tag{67}$$

Однозначное вычисление величин χ и x из последнего уравнения возможно тогда и только тогда, когда матрица $P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} N P_\perp$ обратима, что равносильно линейной независимости столбцов $NP_\perp$.

Таким образом, предложение 2 и утверждение 5 остаются в силе и в случае восстановления x по неточным измерениям $\check{z}$ посредством условной минимизации квадратичной функции потерь (65).

Обозначим $\hat{z}$ отфильтрованное значение (оценку) суммарного сигнала $\check{z}$, полученную по формулам (65), (67):

$$\hat{z} = Nx = NP_\perp \chi = NP_\perp \left(P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} N P_\perp\right)^{-1} P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} \check{z}.$$

Заметим, что столбцы матрицы $NP_\perp \doteq \Sigma_\perp$ являются базисом многообразия решений суммарной системы (сигнал плюс тренд). Как показано в следующем разделе 6.5, для суммарной системы всегда существует матрица Σ описания с клеточно-теплицевой структурой:

$$\ker \Sigma = \operatorname{im} \Sigma_\perp = \operatorname{im} NP_\perp.$$

Тогда

$$\hat{z} = \left(I - \Sigma^{\text{т}} \left(\Sigma \Sigma^{\text{т}}\right)^{-1} \Sigma\right) \check{z},$$

где

$$\Pi \doteq I - \Sigma^{\text{т}} \left(\Sigma \Sigma^{\text{т}}\right)^{-1} \Sigma$$

есть матрица проектора на подпространство $\operatorname{im} \Sigma_{\perp}$. Устойчивые алгоритмы вычисления проекции $\hat{z}$ для клеточно-теплицевых матриц Σ описаны в [3]. Сложность программной реализации обсуждалась в [11].

Проекция $\hat{z}$ по построению точно удовлетворяет системе уравнений (54). Поэтому для отфильтрованного значения $\hat{z}$ суммарного сигнала $\check{z}$ верны формулы восстановления тренда (62), (63) с заменой $\check{z}$ на $\hat{z}$.

6.5 Описания суммарных систем

Пусть G, F — матрицы системы (53).

1. Множество решений $\mathcal{N}_{\Sigma} \doteq \{\check{z} = z + \varepsilon\}$ представимо в виде суммы

$$\mathcal{N}_{\Sigma} = \ker F + \ker G.$$

Описанием для $\mathcal{N}_{\Sigma}$ по определению является матрица Σ, строки которой образуют базис подпространства $\overline{\ker F + \ker G}$ (см. раздел 1.1):

$$\operatorname{spanr} \Sigma = \overline{\ker F + \ker G} = \overline{\ker F} \cap \overline{\ker G} = \operatorname{spanr} F \cap \operatorname{spanr} G. \tag{68}$$

2. Пусть G, F — клеточно-теплицевые матрицы. Покажем, что в этом случае суммарное множество $\mathcal{N}_{\Sigma} = \ker F + \ker G$ всегда можно описать некоторой системой уравнений с клеточно-теплицевой матрицей.

Утверждение 7. *Суммарное многообразие $\mathcal{N}_{\Sigma} = \ker F + \ker G$ является множеством решений некоторой стационарной динамической системы с клеточно-теплицевой матрицей Σ:*

$$\ker \Sigma = \mathcal{N}_{\Sigma}.$$

Доказательство. Нужно показать, что подпространство $\operatorname{spanr} F \cap \operatorname{spanr} G$ имеет базис с клеточно-теплицевой структурой. Пусть G_i и F_i — клеточные строки матриц G и F, и пусть h — группа строк (клеточная строка) из пересечения $\operatorname{spanr} F \cap \operatorname{spanr} G$:

$$h = \sum \lambda_i G_i = \sum \mu_j F_j. \tag{69}$$

Клеточно-теплицевость G и F означает, что $\hat{s}G_i = G_{i+1}$, $\hat{s}F_i = F_{i+1}$, где $\hat{s}$ — оператор сдвига. Следовательно, клеточная строка

$$\hat{s}h = \sum \lambda_i G_{i+1} = \sum \mu_i F_{i+1} \tag{70}$$

принадлежит пересечению вместе с h. В силу произвольности h заключаем, что пересечение $\operatorname{spanr} F \cap \operatorname{spanr} G$ имеет базис с клеточно-теплицевой структурой.

Если в разложениях (69) номер i принимает наибольшее значение, равное числу клеточных строк G или F, то запись G_{i+1} или F_{i+1} теряет смысл. В этом случае следует заменить h на строку $\hat{s}^{-1}h$. Если в разложениях (69) номер i принимает значение $i = 1$, так что запись $\hat{s}^{-1}h$ теряет сысл, то следует h разложить в сумму $h = h_0 + \hat{s}h_1$, используя клеточные строки h_0, h_1, для которых запись (70) имеет смысл, и рассматривать для включения в базис вместо h клеточные строки h_0, h_1.

Утверждение доказано.

3. Для клеточно-теплицевых матриц F, G, $\varSigma$ выразим соотношение (68) через образующие многочленные матрицы.

Утверждение 8. *Пусть G, F — клеточно-теплицевые матрицы (см. (9)):*

$$G \doteq \gamma \otimes E, \qquad \gamma \in \mathbb{R}^{r\times t}[s],$$

$$F \doteq \varphi \otimes E, \qquad \varphi \in \mathbb{R}^{q\times t}[s].$$

Тогда

1) существует клеточно-теплицевая матрица $\varSigma$:

$$\ker \varSigma = \ker F + \ker G,$$

$$\varSigma \doteq \sigma \otimes E, \qquad \sigma \in \mathbb{R}^{k\times t}[s];$$

2) строки многочленной матрицы $\sigma(s)$ являются базисом пересечения линейных оболочек многочленных строк матриц $\varphi(s)$, $\alpha(s)$:

$$\operatorname{spanr} \sigma(s) = \operatorname{spanr} \varphi(s) \cap \operatorname{spanr} \alpha(s);$$

3) $k \leqslant \min\{q, r\}$.

Доказательство. 1) См. утверждение 7. 2) В силу соотношения (68),

$$\operatorname{spanr} \Sigma = (\operatorname{spanr} \varphi(s) \otimes E) \cap (\operatorname{spanr} \alpha(s) \otimes E) =$$

$$= (\operatorname{spanr} \varphi(s) \cap \operatorname{spanr} \alpha(s)) \otimes E.$$

Тогда

$$\operatorname{spanr} \sigma(s) = \operatorname{spanr} \varphi(s) \cap \operatorname{spanr} \alpha(s). \tag{71}$$

3) Соотношение $k \leqslant \min\{q, r\}$ следует из (71).

Утверждение доказано.

Соотношение (71) показывает, что строки образующей многочленной матрицы $\sigma(s)$ образуют базис пересечения линейных оболочек строк многочленных матриц $\varphi(s)$ и $\alpha(s)$. Это соотношение является основным для построения описаний суммарных систем.

Примеры построения описаний суммарных систем приведены в приложении, раздел 8.3.

Суммарные системы неуправляемы

Примеры описаний суммарных систем из приложения, раздел 8.3, являются иллюстрацией к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть*

$$G \doteq \gamma \otimes E, \qquad \gamma \in \mathbb{R}^{1\times t}[s],$$

$$F \doteq \varphi \otimes E \qquad \varphi \in \mathbb{R}^{q\times t}[s],$$

и существует описание $\Sigma \neq 0$ для суммарного многообразия

$$\ker G + \ker F = \ker \Sigma.$$

Тогда

1) $\Sigma = \sigma \otimes E, \qquad \sigma \in \mathbb{R}^{k\times t}[s], \qquad k = 1$;

2) многочленная матрица σ разлагается в произведение

$$\sigma = \mu\gamma, \qquad \mu \in \mathbb{R}[s],$$

то есть суммарная система Σ неуправляема в смысле предложения 5.

Доказательство. 1) См. утверждение 8. 2) Согласно утверждению 8,

$$\sigma \subseteq \operatorname{spanr} \gamma \cap \operatorname{spanr} \varphi.$$

Пересечение $\operatorname{spanr}\gamma \cap \operatorname{spanr}\varphi$ образовано многочленными строками из некоторого множества

$$\rho\gamma, \qquad \rho \in P \subset \mathbb{R}[s].$$

Следовательно,

$$\sigma = \mu\gamma, \qquad \mu \in M \subset \mathbb{R}[s],$$
$$M \subseteq P.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

6.6 Примеры задач восстановления тренда

1. Рассмотрим пространство траекторий из 5 отсчетов $\check{z} \in \mathbb{R}^5$. В системе (53) примем

$$G = \left(\begin{array}{ccc|cc} a & -1 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & b \end{array}\right) = (\alpha(s), \beta(s)) \otimes E,$$

$$\alpha(s) = a - s, \qquad \beta(s) = b,$$

тогда запись (1) имеет вид

$$y_{k+1} - ay_k = bu_k, \qquad k = 1, 2.$$

Рассмотрим три варианта описания трендов:

$$F_1 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi(s) \end{pmatrix} \otimes E,$$

$$\varphi(s) = 1 - s,$$

$$F_2 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \varphi(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes E,$$

$$F_3 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \varphi(s) & 0 \\ 0 & \varphi(s) \end{pmatrix} \otimes E.$$

Как показано в приложении (раздел 8.1), все три варианта соответствуют одному и тому же суммарному многообразию траекторий тренд плюс полезный сигнал.

Выпишем матрицы базисов правых нуль-пространств:

$$
G_{\perp}=\left(\begin{array}{c|cc}
1 & 0 & 0\\
a & b & 0\\
a^2 & ab & b\\
\hline
0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1
\end{array}\right),
$$

$$
F_{1\perp}=\left(\begin{array}{c}0\\0\\0\\\hline 1\\1\end{array}\right),\qquad
F_{2\perp}=\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\\\hline 0\\0\end{array}\right),\qquad
F_{3\perp}=\left(\begin{array}{cc}1&0\\1&0\\1&0\\\hline 0&1\\0&1\end{array}\right).
$$

Проверим условия единственности восстановления тренда согласно (60):

$$
\begin{pmatrix}\gamma(s)\\ \phi_1(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(s) & \beta(s)\\ 1 & 0\\ 0 & \varphi(s)\end{pmatrix},
$$

$$
\mathrm{Sm}\begin{pmatrix}\alpha(s) & \beta(s)\\ 1 & 0\\ 0 & \varphi(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sigma(s)\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma(s)=\text{НОД}\left(M_1,M_2,M_3\right),
$$

$$
M_1\doteq\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \varphi\end{vmatrix},\qquad M_2\doteq\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \varphi\end{vmatrix},\qquad M_3\doteq\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 0\end{vmatrix},
$$

$$
\Rightarrow \sigma(s)=\text{НОД}\left(\varphi,\alpha\varphi,\beta\right)=1.
$$

Условие (60) выполнено, следовательно, тренд с описанием F_1 отделяем.

Похожим образом проверяется отделяемость тренда с описанием F_2 (опущено).

Проверим условие отделяемости (56) для описаний F_1, F_2. Пусть “$\sim$” обозначает какую-либо последовательность операций перестановки строк и столбцов матрицы.

$$(G_\perp, F_{1\perp}) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a^2 & ab & b & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ * & b & & \\ * & * & b & \\ * & * & * & 1 \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

очевидно, при $b \neq 0$ столбцы $(G_\perp, F_{1\perp})$ линейно независимы, и $\ker(G_\perp, F_{1\perp}) = 0$, условие (56) выполнено.

Далее,

$$(G_\perp, F_{2\perp}) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & ab & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ \hline 1 & 1 & * & * \\ a & 1 & * & * \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

При $a \neq 1$ подматрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ неособенная, следовательно, столбцы $(G_\perp, F_{2\perp})$ линейно независимы, и $\ker(G_\perp, F_{2\perp}) = 0$, условие (56) выполнено.

Покажем, что тренд с описанием F_3 не отделяем. Действительно,

$$\begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \phi_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ \varphi(s) & 0 \\ 0 & \varphi(s) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Sm} \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ \varphi(s) & 0 \\ 0 & \varphi(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_3(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3(s) = \text{НОД}\,(M_1, M_2, M_3)\,,$$

$$M_1 \doteq \begin{vmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{vmatrix}, \qquad M_2 \doteq \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \varphi \end{vmatrix}, \qquad M_3 \doteq \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \varphi & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_3(s) = \text{НОД}\left(\varphi^2, \alpha\varphi, \beta\varphi\right) = \varphi.$$

Условие (60) не выполнено, следовательно, тренд с описанием F_3 не отделяем.

Для описания F_3 убедимся также в нарушении условия (56):

$$(G_\perp, F_{3\perp}) = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 & 1 & 0 \\ a^2 & ab & b & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad x \doteq \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{1-a}\right) \\ 1 \\ 1 \\ -\left(\frac{b}{1-a}\right) \\ -1 \end{pmatrix},$$

(см. пример к утверждению 9, приложение, раздел 8.1).

$$(G_\perp, F_{3\perp})\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ker (G_\perp, F_{3\perp}) \neq 0,$$

условие (56) нарушено.

Для систем с описаниями трендов F_1, F_2 выпишем формулы (63) восстановления трендов:

$$F_{(1,2)\perp} e = F_{(1,2)\perp} \left(F^{\mathrm{T}}_{(1,2)\perp} G^{\mathrm{T}} G F_{(1,2)\perp} \right)^{-1} F^{\mathrm{T}}_{(1,2)\perp} G^{\mathrm{T}} G \check{z},$$

$$GF_{1\perp} = \left(\begin{array}{ccc|cc} a & -1 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & b \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix},$$

$$GF_{2\perp} = \left(\begin{array}{ccc|cc} a & -1 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & b \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a-1 \\ a-1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad F_{1\perp} e = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right) \frac{1}{2b^2} \begin{pmatrix} b, & b \end{pmatrix} G\check{z},$$

$$\Rightarrow \quad F_{2\perp}e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2\,(a-1)^2} \begin{pmatrix} a-1, & a-1 \end{pmatrix} G\check{z}.$$

Ввиду клеточно-теплицевой структуры матрицы G, невязка $G\check{z}$ может вычисляться рекуррентно по мере поступления новых отсчетов $\check{z}$.

Полученные выражения для трендов $F_{1\perp}e$ и $F_{2\perp}e$ показывают, что в первом случае отделяется тренд (постоянная составляющая) в сигнале выхода y, а во втором случае — тренд в сигнале входа u. Нарушение условий отделяемости трендов с описанием F_3 означает невозможность однозначного отделения постоянных составляющих одновременно на входе и на выходе.

2. Пусть параметры a, b уравнения системы неизвестны.

Задача. По наблюдениям $\check{z} = z + \varepsilon$ суммарного сигнала системы (53) вычислить вектор параметров $\theta = (a; b)$, траекторию z и тренд ε.

Увеличим размерность пространства траекторий: $\check{z} \in \mathbb{R}^9$. Тогда

$$G = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} a & -1 & & & 0 & b & & & 0 \\ & a & -1 & & & & b & & \\ & & a & -1 & & & & b & \\ 0 & & & a & -1 & 0 & & & b \end{array}\right).$$

Будем считать, что постоянная составляющая тренда присутствует только на выходе системы:

$$F\varepsilon = 0,$$

$$F = F_2 = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -1 & & & 0 & & & & \\ & 1 & -1 & & & & 0 & & \\ & & 1 & -1 & & & & & \\ 0 & & & 1 & -1 & & & & \\ \hline & & & & & 1 & & & 0 \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & 0 & & & 1 \end{array}\right).$$

Построим матрицу Σ описания суммарной системы, следуя примеру Б раздела 8.3 в приложении:

$$\Sigma = (\varphi\alpha, \varphi\beta) \otimes E =$$

$$= \begin{pmatrix} s^2 - (a+1)\,s + a, & b - bs \end{pmatrix} \otimes E =$$

$$= \left(\begin{array}{cccccc|cccc} a & -(a+1) & 1 & & & 0 & b & -b & & 0 \\ & a & -(a+1) & 1 & & & & b & -b & \\ 0 & & & a & -(a+1) & 1 & 0 & & b & -b \end{array}\right).$$

Если наблюдения $\check{z}$ содержат стохастические возмущения:

$$\check{z} = z + \varepsilon + \eta, \qquad \eta \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I),$$

— можно поставить и решать задачу оценки параметров a, b орторегрессионными методами (раздел 1.3).

Если суммарный сигнал $\check{z}$ известен точно ($\eta = 0$), вектор параметров $(a; b)$ вычисляется из переопределенной системы линейных уравнений

$$\Sigma \check{z} = V\gamma = V\left(d + D\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$\check{z} \doteq (\check{y}_1; \check{y}_2; \check{y}_3; \check{y}_4; \check{y}_5; \check{u}_1; \check{u}_2; \check{u}_3; \check{u}_4)\,,$$

$$V \doteq \left(\begin{array}{cc|cc|cc} \check{y}_1 & \check{u}_1 & \check{y}_2 & \check{u}_2 & \check{y}_3 & \check{u}_3 \\ \check{y}_2 & \check{u}_2 & \check{y}_3 & \check{u}_3 & \check{y}_4 & \check{u}_4 \\ \check{y}_3 & \check{u}_3 & \check{y}_4 & \check{u}_4 & \check{y}_5 & 0 \end{array}\right), \tag{72}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -(a+1) \\ -b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \doteq d + D\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\left(D^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} V D\right)^{-1} D^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} V d.$$

Постоянная составляющая тренда $\varepsilon = F_{2\perp}e$, как было показано выше, вычисляется из уравнения

$$F_{2\perp}e = F_{2\perp}\left(F_{2\perp}^{\text{т}}G^{\text{т}}GF_{2\perp}\right)^{-1}F_{2\perp}^{\text{т}}G^{\text{т}}G\check{z},$$

$$GF_{2\perp} = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} a & -1 & & & 0 & b & & 0 \\ & a & -1 & & & & b & \\ & & a & -1 & & & & b \\ 0 & & & a & -1 & 0 & & b \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1\\1\\1\\1\\1\\ \hline 0\\0\\0\\0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a-1\\a-1\\a-1\\a-1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad F_{2\perp}e = \left(\begin{array}{c} 1\\1\\1\\1\\1\\ \hline 0\\0\\0\\0 \end{array}\right)\frac{1}{4\,(a-1)^2}\begin{pmatrix} a-1, & a-1, & a-1, & a-1 \end{pmatrix}G\check{z}.$$

3. Рассмотрим пример, в котором параметры объекта известны:

$$a = 0.99, \quad b = 1,$$

$$G = \begin{pmatrix} \alpha(s), & \beta(s) \end{pmatrix} \otimes E = \begin{pmatrix} 0.99 - s, & 1 \end{pmatrix} \otimes E =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0.99 & -1 & & & 0 & 1 & & 0 \\ & 0.99 & -1 & & & & 1 & \\ & & 0.99 & -1 & & & & 1 \\ 0 & & & 0.99 & -1 & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

— и надлежит оценить парметры φ_0, φ_1 уравнения тренда:

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \varphi_1 s + s^2,$$

$$F=\begin{pmatrix}\varphi(s) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes E=\left(\begin{array}{ccccc|cccc}
\varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & 0 & & & & \\
 & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & & 0 & & \\
0 & & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & & & \\
\hline
 & & & & & 1 & & & 0\\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & 0 & & & & & 1 & \\
 & & & & & 0 & & & 1
\end{array}\right).$$

Как и ранее, измерению доступен суммарный сигнал $\check{z}=z+\varepsilon$.

Задача. По наблюдениям $\check{z}=z+\varepsilon$ суммарного сигнала системы (53) вычислить вектор параметров уравнения тренда $\theta=(\varphi_0;\varphi_1)$, траекторию z и тренд ε.

Построим матрицу описания суммарной системы:

$$\Sigma=(\varphi\alpha,\varphi\beta)\otimes E=$$

$$=\left(\ 0.99\varphi_0+(0.99\varphi_1-\varphi_0)\,s+(0.99-\varphi_1)\,s^2-s^3,\ \ \varphi_0+\varphi_1 s+s^2\ \right)\otimes E=$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc}
0.99\varphi_0 & (0.99\varphi_1-\varphi_0) & (0.99-\varphi_1) & -1 & 0 & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & 0\\
0 & 0.99\varphi_0 & (0.99\varphi_1-\varphi_0) & (0.99-\varphi_1) & -1 & 0 & \varphi_0 & \varphi_1 & 1
\end{array}\right).$$

Пусть суммарный сигнал $\check{z}$ известен точно ($\eta=0$). Тогда вектор параметров $\theta=(\varphi_0;\varphi_1)$ вычисляется из переопределенной системы линейных уравнений

$$\Sigma\check{z}=V\gamma=V\left(d+D\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{pmatrix}\right)=0,$$

с вектором наблюдений $\check{z}$ и матрицей V (72). Выпишем вектор d и матрицу D:

$$\gamma=\begin{pmatrix}0.99\varphi_0\\ \varphi_0\\ (0.99\varphi_1-\varphi_0)\\ \varphi_1\\ (0.99-\varphi_1)\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0.99\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.99 & 0\\ 1 & 0\\ -1 & 0.99\\ 0 & 1\\ 0 & -1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{pmatrix}\doteq d+D\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{pmatrix}.$$

Решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = -\left(D^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} V D\right)^{-1} D^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} V d.$$

После восстановления параметров $(\varphi_0; \varphi_1)$ выписываются элементы формул отделения тренда:

$$G_\perp = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & & & & 0 \\ 0.99 & 1 & & & & \\ 0.99^2 & 0.99 & 1 & & & \\ 0.99^3 & 0.99^2 & 0.99 & 1 & & \\ 0.99^4 & 0.99^3 & 0.99^2 & 0.99 & 1 & \\ \hline 0 & 1 & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ 0 & & & 1 & & \\ 0 & 0 & & & 1 & \end{array}\right), \qquad F_\perp = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \rho & \mu \\ \rho^2 & \mu^2 \\ \rho^3 & \mu^3 \\ \rho^4 & \mu^4 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right),$$

где ρ, μ — корни многочлена $\varphi(s) = \varphi_0 + \varphi_1 s + s^2$ (см. раздел 1.2).

Постоянная составляющая тренда $\varepsilon = F_\perp e$ вычисляется из уравнения

$$F_\perp e = F_\perp \left(F_\perp^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} G F_\perp\right)^{-1} F_\perp^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} G \check{z}.$$

Заметим, что в данном примере все оцениваемые параметры сосредоточены в “неуправляемой” части φ описания суммарной системы:

$$(\varphi\alpha, \varphi\beta) = \varphi\,(\alpha, \beta)\,.$$

Предположим, что наблюдения $\check{z}$ содержат стохастические возмущения того или иного рода. Тогда значения φ_0, φ_1 вычисляются как предельные значения некоторой последовательности, построенной согласно бесконечно растущему объему измерительной выборки. Здесь возможны два случая:

1) число L траекторий $\check{z}$ конечно, объем выборки определяется длиной траекторий $N \to \infty$;

2) длина траекторий N конечна, объем выборки определяется числом траекторий $L \to \infty$.

Если корни ρ, μ многочлена $\varphi(s)$ лежат внутри единичного круга ($|\rho| < 1$, $|\mu| < 1$), то в пределе $N \to \infty$ сигналы тренда, будучи экспоненциальными траекториями (раздел 1.2), сходятся к нулю в средне-квадратическом:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\|\varepsilon\|^2 = 0.$$

Это делает невозможным оценку параметров φ_0, φ_1 любым методом, предполагающим статистический предел 1-го рода ($N \to \infty$) (например, [20, 21, 22, 23]). Следовательно, статистически состоятельные оценки параметров φ_0, φ_1 уравнения тренда могут быть получены только по траекториям конечной длины N. Это приводит к необходимости обратиться к методам 2-го рода, например, орторегрессионным (ОР, М, ВИ) при аддитивных ошибках измерений [3, 4, 5, 6, 7, 8, 11], или к линейному методу наименьших квадратов в случае возмущений в невязке уравнения.

7 Заключение

Для оценки параметров динамичесих систем в темпе реального процесса, при отслеживании меняющихся характеристик динамических объектов особую значимость приобретают методы идентификации по коротким записям участков переходных процессов. Состоятельное оценивание параметров в этих условиях возможно только совместно с оценкой начальных условий собственных однородных движений объекта. Оценки получаются минимизацией нелинейной функции потерь. Среди большого разнообразия подходов к решению задач этого типа особое место занимают орторегрессионные методы идентификации. Постановки задачи минимизации и типы функций потерь, свойственные этим методам, приводят к итеративным алгоритмам вычислений с гарантированной сходимостью.

Разные варианты орторегрессионных методов отличаются друг от друга вычислительной сложностью и асимптотическими свойствами оценок. Сравнение их затруднено ввиду нелинейного характера функции потерь. Предложена схема сравнения методов по линейным приближениям, в предельных случаях большого объема измерительной выборки и малых возмущений. Линейные приближения оценок сравниваются по степени использования информации о линейных связях в наблюдениях. Показано, что с этой характеристикой напрямую связана дисперсия оценок.

Среди орторегрессионных методов оценивания метод вариационной идентификации [3, 10, 11] отличается наиболее полным использованием информации вида $Mw = 0$ о структуре линейного динамического объекта. Это позволяет на коротких участках переходных процессов за счет более интенсивных вычислений получать состоятельные оценки параметров с лучшими характеристиками.

Возможность получать состоятельные оценки параметров по отрезкам траекторий конечной длины позволяет ввести в рассмотрение новый класс задач идентификации систем без свойств устойчивости и управляемости. Примером такого рода задач являются задачи отделения динамических трендов в измерениях траекторий динамического объекта. Получены условия разделяемости тренда и полезного сигнала в терминах матриц уравнения объекта и уравнения тренда. Предложены явные формулы фильтрации тренда при известных уравнениях тренда и объекта, а также алгоритмы вычисления (идентификации) неизвестных параметров уравнений объекта и тренда на основе орторегрессионных методов.

8 Приложение

8.1 Два утверждения о свойствах динамических систем

Пусть для линейных подпространств X, Y запись $(X;Y)$ означает множество векторов в пространстве суммарной размерности $\dim X + \dim Y$:

$$(X;Y) \doteq \{(x;y)\,|x \in X, y \in Y\}.$$

Обозначим $\mathcal{N}_\gamma \doteq \ker \gamma(s) \otimes E$ множество решений линейной динамической системы с матрицей $G = \gamma(s) \otimes E$ (см. (9)).

Утверждение 9. *Пусть*

$$\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s)) \in \mathbb{R}^{1\times 2}[s],$$

$$\varphi(s) \in \mathbb{R}[s].$$

Тогда

$$\mathcal{N}_\gamma \supset (C\mathcal{N}_\varphi; \mathcal{N}_\varphi),$$

где C — матрица оператора

$$c:\ \mathcal{N}_\varphi \to \mathcal{N}_\varphi$$

с характеристическими числами

$$\lambda_i = -\frac{\beta(z_i)}{\alpha(z_i)}, \quad i \in \overline{1,q}, \qquad q \doteq \deg \varphi(s), \qquad \varphi(z_i) = 0,$$

и собственными векторами

$$u_i = \left(z_i^0; \ldots; z_i^{N-1}\right), \quad i \in \overline{1, q}.$$

Другими словами, среди решений системы $z \in \mathcal{N}_\gamma$ для произвольного могочлена $\varphi(s)$ всегда найдутся траектории вида $z = (w; u)$, $u, w \in \mathcal{N}_\varphi$, $w = Cu$.

Доказательство. Пусть $u = \left(z^0; \ldots; z^{N-1}\right)$ для некоторого $z \in \mathbb{C}$. Тогда $\hat{s}u = zu$, $\hat{s}$ — оператор сдвига, и $(\beta(\hat{s}) \otimes E)\, u = \beta(z)u$. С другой стороны, $(\alpha(\hat{s}) \otimes E)\, u = \alpha(z)u$, следовательно, составной вектор $x = \left(-\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}u; u\right)$ является решением системы $(\gamma(s) \otimes E)\, x = 0$. Подставляя вместо z корни z_i многочлена $\varphi(s)$, получим доказываемое утверждение.

Пример. Пусть

$$\alpha(s) = s + \alpha_0, \qquad \beta(s) = s + \beta_0, \qquad \varphi(s) = s - \varphi_0.$$

Заметим, $\left(1; \varphi_0; \varphi_0^2\right) \in \mathcal{N}_\varphi$. Убедимся, что траектория

$$\left(c_0 \left(1; \varphi_0; \varphi_0^2\right); \left(1; \varphi_0; \varphi_0^2\right)\right)$$

для некоторого числа c_0 является решением линейной системы с матрицей $\gamma(s) \otimes E$. Для этого проверим равенство

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_0 & 1 & 0 & \beta_0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 1 & 0 & \beta_0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_0 \\ \varphi_0^2 \end{pmatrix} c_0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_0 \\ \varphi_0^2 \end{pmatrix} \end{array}\right) = 0.$$

Действительно, последнее равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} (\alpha_0 + \varphi_0)\, c_0 + (\beta_0 + \varphi_0) = 0, \\ \varphi_0\, (\alpha_0 + \varphi_0)\, c_0 + \varphi_0\, (\beta_0 + \varphi_0) = 0, \end{cases}$$

откуда следует $c_0 = -\frac{(\beta_0 + \varphi_0)}{(\alpha_0 + \varphi_0)} = -\frac{\beta(\varphi_0)}{\alpha(\varphi_0)}$, где φ_0 — корень многочлена $\varphi(s)$.

Утверждение 10. $\mathcal{N}_\gamma + (\mathcal{N}_\varphi; \mathcal{N}_\varphi) = \mathcal{N}_\gamma + (\mathcal{N}_\varphi; 0) = \mathcal{N}_\gamma + (0; \mathcal{N}_\varphi)$.

Доказательство. Согласно утверждению 9, $\mathcal{N}_\gamma \supset (C\mathcal{N}_\varphi; \mathcal{N}_\varphi)$. Следовательно,

$$\mathcal{N}_\gamma + (\mathcal{N}_\varphi; 0) = \mathcal{N}_\gamma + (C\mathcal{N}_\varphi; \mathcal{N}_\varphi) + (\mathcal{N}_\varphi; 0) = \mathcal{N}_\gamma + (\mathcal{N}_\varphi; \mathcal{N}_\varphi)\,.$$

Так же доказывается равенство

$$\mathcal{N}_\gamma + (0; \mathcal{N}_\varphi) = \mathcal{N}_\gamma + (\mathcal{N}_\varphi; \mathcal{N}_\varphi)\,.$$

Утверждение доказано.

Другими словами, установлено следующее. Пусть дано многообразие сигналов системы $\mathcal{N}_\gamma$, и мы хотим "обогатить" его сигналами трендов

$$\mathcal{N}_\tau \doteq (\mathcal{N}_\varphi; \mathcal{N}_\varphi)$$

до суммы $\mathcal{N}_\gamma + \mathcal{N}_\tau$. Оказывается, для этого достаточно к $\mathcal{N}_\gamma$ прибавить любое из двух "усеченных" многообразий

$$\mathcal{N}_{\tau_1} = (0; \mathcal{N}_\varphi)\,,$$

$$\mathcal{N}_{\tau_2} = (\mathcal{N}_\varphi; 0)\,.$$

8.2 Формулы косого проецирования

Выпишем формулы разложения вектора $z \in \mathbb{R}^n$ на непрямую сумму $z = z_A + z_B$, $z_A \in \operatorname{im} A$, $z_B \in \operatorname{im} B$, где A, B — матрицы, столбцы которых образуют базис $\mathbb{R}^n$: $\operatorname{im}(A, B) = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{im} A \cap \operatorname{im} B = 0$.

Выразим проекции z_A, z_B. Обозначим

$$z_A \doteq A\varphi, \quad z_B \doteq B\psi.$$

Ясно, что

$$\overline{A}^{\mathrm{T}} z = \overline{A}^{\mathrm{T}} z_B = \overline{A}^{\mathrm{T}} B\psi, \tag{73}$$

следовательно,

$$\psi = \left(\overline{A}^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} \overline{A}^{\mathrm{T}} z \tag{74}$$

$$z_B = B\psi = B\left(\overline{A}^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} \overline{A}^{\mathrm{T}} z.$$

Аналогично,

$$z_A = z - z_B = \left[I - B \left(\overline{A}^{\mathrm{T}} B \right)^{-1} \overline{A}^{\mathrm{T}} \right] z.$$

С другой стороны,

$$z_A = A\varphi = A \left(\overline{B}^{\mathrm{T}} A \right)^{-1} \overline{B}^{\mathrm{T}} z.$$

Следовательно, для определенных выше матриц имеем тождества

$$I - B \left(\overline{A}^{\mathrm{T}} B \right)^{-1} \overline{A}^{\mathrm{T}} \equiv A \left(\overline{B}^{\mathrm{T}} A \right)^{-1} \overline{B}^{\mathrm{T}}.$$

$$I - A \left(\overline{B}^{\mathrm{T}} A \right)^{-1} \overline{B}^{\mathrm{T}} \equiv B \left(\overline{A}^{\mathrm{T}} B \right)^{-1} \overline{A}^{\mathrm{T}}.$$

Несложно проверить эти тождества для случая, когда столбцы составной матрицы (A, B) образуют ортогональный базис $\mathbb{R}^n$, то есть $\overline{B} = A$, $\overline{A} = B$ (проверку опускаем).

Таким образом, формулы

$$z_B = B \left(\overline{A}^{\mathrm{T}} B \right)^{-1} \overline{A}^{\mathrm{T}} z = \left[I - A \left(\overline{B}^{\mathrm{T}} A \right)^{-1} \overline{B}^{\mathrm{T}} \right] z,$$

$$z_A = z - z_B = \left[I - B \left(\overline{A}^{\mathrm{T}} B \right)^{-1} \overline{A}^{\mathrm{T}} \right] z = A \left(\overline{B}^{\mathrm{T}} A \right)^{-1} \overline{B}^{\mathrm{T}} z$$

определяют косое проецирование в $\mathbb{R}^n$ на подпространства $\operatorname{im} B$, $\operatorname{im} A$ для описанных выше матриц A, B.

Пусть теперь A, B — матрицы, столбцы которых не образуют базис $\mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{im}(A, B) \subset \mathbb{R}^n, \qquad \dim \operatorname{im}(A, B) < n, \qquad \ker(A, B) = 0, \qquad \operatorname{im} A \cap \operatorname{im} B = 0.$$

Матрица $\overline{A}^{\mathrm{T}} B$ в этом случае не является квадратной, и выражение (74) теряет смысл. Ввиду (11),

$$\operatorname{im} A \cap \operatorname{im} B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ker \overline{A}^{\mathrm{T}} B = 0.$$

Учитывая, что $\ker \overline{A}^{\mathrm{T}} B = 0$, из (73) получаем:

$$B^{\mathrm{T}} \overline{A}\, \overline{A}^{\mathrm{T}} z = B^{\mathrm{T}} \overline{A}\, \overline{A}^{\mathrm{T}} B \psi,$$

$$\psi = \left(B^{\mathrm{T}} \overline{A}\, \overline{A}^{\mathrm{T}} B \right)^{-1} B^{\mathrm{T}} \overline{A}\, \overline{A}^{\mathrm{T}} z,$$

$$z_B = B\left(B^{\text{т}}\overline{A}\,\overline{A}^{\text{т}}B\right)^{-1}B^{\text{т}}\overline{A}\,\overline{A}^{\text{т}}z. \tag{75}$$

Аналогично

$$z_A = A\left(A^{\text{т}}\overline{B}\,\overline{B}^{\text{т}}A\right)^{-1}A^{\text{т}}\overline{B}\,\overline{B}^{\text{т}}z.$$

Используя равенство $z = z_A + z_B$, получаем другую пару соотношений:

$$z_B = z - z_A = \left[I - A\left(A^{\text{т}}\overline{B}\,\overline{B}^{\text{т}}A\right)^{-1}A^{\text{т}}\overline{B}\,\overline{B}^{\text{т}}\right]z,$$

$$z_A = z - z_B = \left[I - B\left(B^{\text{т}}\overline{A}\,\overline{A}^{\text{т}}B\right)^{-1}B^{\text{т}}\overline{A}\,\overline{A}^{\text{т}}\right]z.$$

8.3 Примеры описаний для сумм многообразий динамических траекторий

Пример A. Рассмотрим системы с матрицами

$$F = \varphi(s)\otimes E, \qquad \varphi(s) = s^2 + \varphi_1 s + \varphi_0,$$

$$G = \alpha(s)\otimes E, \qquad \alpha(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0.$$

$$\text{НОД}(\alpha,\varphi) = 1.$$

Пусть $N = 6$, тогда

$$F = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & & 0 \\ & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & \\ & & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & \\ 0 & & & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & & 0 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & \\ & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & \\ 0 & & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Согласно утверждениям раздела 1.2, множество решений системы $Fx = 0$ состоит из векторов

$$x = (x(1);\ldots;x(5)), \quad x(t) = x_{01}s_1^t + x_{02}s_2^t, \quad t \in \overline{1,5},$$

где x_{01}, x_{02} — произвольные числовые коэффициенты начальных условий, $s_{1,2}$ — корни многочлена $\varphi(s)$.

Множество решений системы $Gy = 0$ состоит из векторов

$$y = (y(1);\ldots;y(5)), \quad y(t) = y_{01}s_3^t + y_{02}s_4^t, \quad t \in \overline{1,5},$$

где y_{01}, y_{02} — произвольные числовые коэффициенты начальных условий, $s_{3,4}$ — корни многочлена $\alpha(s)$.

Суммарное множество $\{z\} = \{x\} + \{y\}$ состоит из векторов
$z = (z(1); \ldots; z(5))$,

$$z(t) = x_{01}s_1^t + x_{02}s_2^t + y_{01}s_3^t + y_{02}s_4^t, \qquad t \in \overline{1,5}, \tag{76}$$

где x_{01}, x_{02}, y_{01}, y_{02} — произвольные числовые коэффициенты начальных условий, $\{s_1, \ldots, s_4\}$ — объединение множеств корней многочленов $\varphi(s)$ и $\alpha(s)$.

Исходя из (76) заключаем, что суммарное множество $\{z\}$ является множеством решений системы уравнений $\Sigma z = 0$ с теплицевой матрицей Σ, составленной из коэффициентов многочлена $\sigma(s) = \varphi(s)\alpha(s)$:

$$\Sigma = (\varphi(s)\alpha(s)) \otimes E = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Изложим еще один способ построения описания суммарной системы, основанный на аргументах более общего вида.

Согласно утверждению 8,

$$\Sigma = \sigma(s) \otimes E,$$

$$\operatorname{spanr} \sigma(s) = \operatorname{spanr} \varphi(s) \cap \operatorname{spanr} \alpha(s).$$

Подпространство $\operatorname{spanr} \varphi(s)$ образовано многочленами $p\varphi$, $p \in \mathbb{R}[s]$. Аналогично, подпространство $\operatorname{spanr} \alpha(s)$ образовано многочленами $q\alpha$, $q \in \mathbb{R}[s]$. Пересечением этих подпространств является множество многочленов $r\varphi\alpha$, $r \in \mathbb{R}[s]$. Базисом пересечения является многочлен $\sigma = \varphi\alpha$, которому соответствует числовая теплицевая матрица $\Sigma = (\varphi(s)\alpha(s)) \otimes E$.

3. Заметим, что многообразия траекторий $\ker G$ и $\ker F$ имеют нулевое пересечение, так как это следует из утверждения 6:

$$\operatorname{Sm} \begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \ker G \cap \ker F = 0.$$

Пример Б. Рассмотрим две динамические системы с матрицами F, G:

$$G \doteq (\alpha, \beta) \otimes E, \tag{77}$$

$$\alpha = \alpha(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0, \qquad \beta = \beta(s) = s^2 + \beta_1 s + \beta_0,$$

$$F \doteq \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \otimes E, \tag{78}$$

$$\varphi = \varphi(s) = s^2 + \varphi_1 s + \varphi_0, \qquad \zeta = \zeta(s) = s^2 + \zeta_1 s + \zeta_0,$$

$$\text{НОД}(\alpha, \beta, \zeta, \varphi) = 1.$$

Пусть $N = 5$, тогда

$$G = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & 0 & \beta_0 & \beta_1 & 1 & & 0 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & & \beta_0 & \beta_1 & 1 & \\ 0 & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & 0 & & \beta_0 & \beta_1 & 1 \end{array}\right),$$

$$F = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & 0 & & & & & \\ & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & & & 0 & & \\ 0 & & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & & & & \\ \hline & & & & & \zeta_0 & \zeta_1 & 1 & & 0 \\ & & 0 & & & & \zeta_0 & \zeta_1 & 1 & \\ & & & & & 0 & & \zeta_0 & \zeta_1 & 1 \end{array}\right).$$

Система с матрицей G имеет порядок $p = 2$ в числителе и знаменателе. Уравнение (1) для нее имеет вид:

$$y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = u_{k+2} + \beta_1 u_{k+1} + \beta_0 u_k, \qquad k \in \overline{1,3}.$$

Множество траекторий системы с матрицей F состоит из независимых однородных движений y', u' на входе и выходе. Они описываются уравнениями

$$\begin{gathered} y'_{k+2} + \varphi_1 y'_{k+1} + \varphi_0 y'_k = 0, \\ u'_{k+2} + \zeta_1 u'_{k+1} + \zeta_0 u'_k = 0, \\ k \in \overline{1,3}. \end{gathered} \tag{79}$$

Заданием коэффициентов φ_i, ζ_i можно определить, например, чтобы множество решений $\{y'\}$ (или$\{u'\}$) состояло:

1. из многочленов с действительными коэффициентами порядка не выше заданного (в данном примере $\leqslant 2$);
2. из гармонических сигналов с экспоненциальным затуханием (нарастанием) амплитуды

(см. раздел 1.2).

1. Построим описание Σ для суммарного многообразия траекторий

$$\{\overline{z} = z + z'\} = \ker G + \ker F, \qquad z \doteq (y; u), \qquad z' \doteq (y'; u').$$

Согласно утверждению 8,

$$\Sigma = \sigma(s) \otimes E,$$

$$\operatorname{spanr} \sigma(s) = \operatorname{spanr}(\alpha, \beta) \cap \operatorname{spanr} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \tag{80}$$

Подпространство $\operatorname{spanr}(\alpha, \beta)$ состоит из строк

$$(r\alpha, r\beta), \qquad r \in \mathbb{R}[s].$$

Подпространство $\operatorname{spanr} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$ состоит из строк

$$(p\varphi, q\zeta), \qquad p, q \in \mathbb{R}[s].$$

Пересечение $\operatorname{spanr}(\alpha, \beta) \cap \operatorname{spanr} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$ состоит из строк

$$(r\xi\alpha, r\xi\beta), \qquad r \in \mathbb{R}[s], \qquad \xi \doteq \text{НОК}(\varphi, \zeta),$$

где НОК(φ, ζ) — наименьшее общее кратное многочленов φ, ζ.

Базисом пересечения является строка

$$\sigma = (\xi\alpha, \xi\beta).$$

Следовательно,

$$\Sigma = (\xi\alpha, \xi\beta) \otimes E, \qquad \xi \doteq \text{НОК}(\varphi, \zeta).$$

2. Получим условия, при которых многообразия траекторий $\ker G$ и $\ker F$ (77), (78) имеют нулевое пересечение

Утверждение 11. *Пусть*

$$G \doteq (\alpha, \beta) \otimes E, \qquad F \doteq \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \otimes E,$$

$$\text{НОД}(\alpha, \beta, \zeta, \varphi) = 1.$$

Тогда условие

$$\ker G \cap \ker F = 0$$

равносильно

$$\begin{cases} \text{НОД}(\zeta, \varphi) = 1, \\ \text{НОД}(\zeta, \beta) = 1, \\ \text{НОД}(\alpha, \varphi) = 1. \end{cases} \tag{81}$$

Доказательство. Ввиду утверждения 6, достаточно проверить равносильность (81) и условия

$$\text{Sm} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее ввиду взаимной простоты многочленов $\alpha, \beta, \zeta, \varphi$ равносильно тому, что

$$\sigma = \text{НОД}(M_1, M_2, M_3) = \text{НОД}(\varphi\zeta, \alpha\zeta, \beta\varphi) = 1.$$

Отсюда следует (81) (проверяется от противного).

Обратно, пусть выполнено (81). Пусть α, β, ζ, φ обозначают множества корней соответствующих многочленов. Объединение и пересечение множеств будем писать как сумму и произведение. Тогда (81) равносильно условиям

$$\begin{cases} \zeta\varphi = \varnothing, \\ \zeta\beta = \varnothing, \\ \alpha\varphi = \varnothing. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(\varphi + \zeta)\,(\alpha + \zeta)\,(\beta + \varphi) = \varnothing,$$

что означает

$$\text{НОД}(\varphi\zeta, \alpha\zeta, \beta\varphi) = 1.$$

Утверждение доказано.

Следствие. *Система* (53) *с матрицами*

$$G \doteq (\alpha, \beta) \otimes E, \qquad F \doteq \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \otimes E,$$

$$\text{НОД}(\alpha, \beta, \zeta, \varphi) = 1,$$

допускает отделение трендов тогда и только тогда, когда выполнены условия (81)*.*

8.4 Системы в форме 1-го порядка

Система (1) допускает равносильную с точки зрения множества решений запись в форме уравнения 1-го порядка:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k + Du_k, \quad x_1 = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad k = \overline{1, N}. \tag{82}$$

Среди всех равносильных систем (82) будем рассматривать системы с наименьшей размерностью $n = p_1 + \ldots + p_r$ пространства состояний $\{x_k\}$.

Определение 1. Система (82) называется *наблюдаемой*, если любое изменение состояния x_t приводит к изменениям в выходном сигнале $(y_t; \ldots; y_{t+n-1})$.

Предложение 3. *Система* (82) *наблюдаема тогда и только тогда, когда столбцы матрицы* $\big(C; CA; \ldots; CA^{n-1}\big)$ *линейно независимы.*

Наименьшее значение размерности n на множестве равносильных систем достигается тогда и только тогда, когда система наблюдаема [24]. Этот факт следует из известной теоремы о декомпозиции пространства состояний [25].

Для наблюдаемой системы всегда существует преобразование пространства состояний

$$x' = Tx,$$

$$A' = TAT^{-1}, \quad B' = TB, \quad C' = CT^{-1}, \quad D' = D, \tag{83}$$

которое приводит четверку матриц (A, B, C, D) в равносильную *форму восстанавливаемости.* В этой форме наиболее просто выражается связь между элементами матриц описаний (1) и (82).

Определение. Описание (A, B, C, D) в пространстве состояний имеет форму восстанавливаемости (*the observer form* [26, 6.4.3]), если

$$A = \|A_{ij}\|_{j\in\overline{1,r}}^{i\in\overline{1,r}}, \quad B = \|B_i\|^{i\in\overline{1,r}}, \quad C = \|C_j\|_{j\in\overline{1,r}}, \tag{84}$$

матрицы A_{ij}, B_i, C_j с размерами соответственно $p_i \times p_j$, $p_i \times m$, $r \times p_j$ имеют вид:

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_{ii}^{(0)} \\ 1 & \cdots & 0 & -a_{ii}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{ii}^{(p_i-1)} \end{pmatrix}, \tag{85}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_{ij}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{ij}^{(p_i-1)} \end{pmatrix}, \quad i \neq j, \tag{86}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} b_{i1}^{(0)} & \cdots & b_{im}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}^{(p_i-1)} & \cdots & b_{im}^{(p_i-1)} \end{pmatrix}, \tag{87}$$

$$C_j = \alpha_{[0]}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & e_j \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}, \tag{88}$$

e_j — j-й столбец единичной матрицы I_r и $p_1 + \ldots + p_r = n$, $p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_r$.

Матрицам (84–88) сопоставляется многочленная матрица $\gamma(s)$ (2) согласно формулам:

$$\gamma(s) = (\alpha(s), -\beta(s)),$$

$$\alpha(s) = a(s)\alpha_{[0]}, \quad \beta(s) = \alpha(s)D + b(s),$$

$$a(s) = \|a_{ij}(s)\|_{j\in\overline{1,r}}^{i\in\overline{1,r}}, \quad b(s) = \|b_{ij}(s)\|_{j\in\overline{1,m}}^{i\in\overline{1,r}},$$

$$a_{ij}(s) = a_{ij}^{(0)}s^0 + \ldots + a_{ij}^{(p_i-1)}s^{q_i-1} + \delta_{ij}s^{p_i},$$

$$b_{ij}(s) = b_{ij}^{(0)}s^0 + \ldots + b_{ij}^{(p_i-1)}s^{p_i-1},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Определение 2. Система (82) называется *управляемой*, если выбором входного сигнала $(u_{t-n}; \ldots; u_{t-1})$ ее можно привести в любое наперед заданное состояние x_t.

Предложение 4. *Система* (82) *управляема тогда и только тогда, когда строки матрицы* $\big(B, AB, \ldots, A^{n-1}B\big)$ *линейно независимы.*

8.5 Признаки управляемости

Сформулируем условие управляемости (определение 2) через матрицы описания (1).

Определение 3. Система (1) называется *управляемой*, если управляема равносильная ей система (82).

Предложение 5. *Система* (1) *управляема тогда и только тогда, когда разложение*

$$\gamma(s) = \pi(s)\gamma'(s) \tag{89}$$

возможно только с унимодулярной матрицей $\pi(s)$ *(т.е.* $\deg\det\pi(s) = 0$*).*

Другими словами, неуправляемость равносильна наличию у всех подматриц из столбцов $\gamma(s)$ левого общего сомножителя $\pi(s)$ с определителем многочленом, отличным от константы: $\deg\det\pi(s) \geqslant 1$.

Определение 4. Многочленные матрицы $\alpha(s)$, $\beta(s)$ называем *взаимно простыми слева*, если из матричного равенства

$$(\alpha(s), \beta(s)) = \pi(s)\,(\alpha'(s), \beta'(s))$$

необходимо следует $\deg\det\pi(s) = 0$.

Несложно показать, что предложение 5 равносильно известному признаку управляемости Попова [27]:

Определение 5. Пусть $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$, где $\alpha(s)$ — неособенная подматрица из столбцов $\gamma(s)$. Если в системе (1) считать компоненты траектории, соответствующие подматрице $\alpha(s)$, выходными, то матричная передаточная функция системы имеет вид $h(s) = \alpha(s)^{-1}\beta(s)$. Назовем $\alpha(s)$ (матричным) знаменателем, $\beta(s)$ — числителем системы (1).

Предложение 6. (Признак управляемости Попова) *Система* (1) *со знаменателем* $\alpha(s)$ *и числителем* $\beta(s)$ *управляема тогда и только тогда, когда матрицы* $\alpha(s)$, $\beta(s)$ *взаимно просты слева.*

Доказательство см. [26, 27].

Предложение 7. *Система* (1) *управляема тогда и только тогда, когда в многочленной матрице* $\gamma(s)$ *миноры наибольшего порядка не имеют общего делителя степени выше нуля, т. е. каноническая форма* $\operatorname{Sm}\gamma(s)$ *состоит только из нулей и единиц.*

Доказательство. Пусть система неуправляема, тогда все подматрицы из столбцов матрицы $\gamma(s)$ имеют общий делитель $\pi(s)$: $\deg\det\pi(s) \geqslant 1$ (предложение 5). Значит, все миноры наибольшего порядка имеют общий делитель $\det\pi(s)$. Обратно, если у миноров наибольшего порядка есть общий делитель $\rho(s)$, значит, форма $\operatorname{Sm}\gamma(s) \doteq S$ разлагается в произведение

$$S = \begin{pmatrix} \rho_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_r(s) \end{pmatrix} S', \qquad \rho_1(s)\cdots\rho_r(s) = \rho(s),$$

где S' — каноническая форма, состоящая только из нулей и единиц. Тогда

$$\gamma(s) = USW,$$

где U, W — унимодулярные матрицы элементарных преобразований ($\deg\det U = \deg\det W = 0$), и верно равенство

$$\gamma(s) = USW = U \begin{pmatrix} \rho_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_r(s) \end{pmatrix} S'W \doteq \pi(s)\gamma'(s),$$

$$\pi(s) \doteq U \begin{pmatrix} \rho_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_r(s) \end{pmatrix}, \qquad \deg\det\pi(s) \geqslant 1.$$

Значит, система неуправляема (предложение 5).

Предложение доказано.

8.6 Доказательство утверждения 1

Выпишем матрицы $H(\theta)$, $H_{\mathtt{M}}(\theta)$ в функциях потерь (24), (25). Для этого используется запись системы (1) в форме уравнения 1-го порядка (82).

Для большего удобства изложения переупорядочим компоненты z согласно (8). Соответственно переставляются и элементы матрицы Φ (23), после чего она будет клеточно-диагональной: $\Phi \doteq \left(\begin{smallmatrix} \overline{\Phi}\otimes I_r & 0 \\ 0 & \overline{\Phi}\otimes I_m \end{smallmatrix}\right) \doteq \left(\begin{smallmatrix} \Phi_x & 0 \\ 0 & \Phi_u \end{smallmatrix}\right)$. Тогда

$$w \doteq (x_0; u_1; \ldots; u_N)\,, \quad w_{\mathtt{M}} \doteq (x_{\mathtt{M},0,1}; \ldots; x_{\mathtt{M},0,t}; u_{\mathtt{M},1}; \ldots; u_{\mathtt{M},t})\,, \tag{90}$$

$$t \doteq (N-p)(p+1),$$

$$H(\theta) = \left(\begin{array}{c|cccc} C & D & & & 0 \\ CA & CB & D & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ CA^{N-1} & CA^{N-2}B & \ldots & CB & D \\ \hline 0 & I & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & I \end{array}\right) \doteq \left(\begin{array}{c|c} H_x & H_u \\ \hline 0 & I \end{array}\right), \tag{91}$$

$$\Phi H(\theta) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi_x H_x & \Phi_x H_u \\ \hline 0 & \Phi_u \end{array}\right), \quad \Phi_x H_x = \left(\begin{array}{c} C \\ \vdots \\ CA^{p-1} \\ \hline CA \\ \vdots \\ CA^{p} \\ \hline \vdots \end{array}\right), \tag{92}$$

$$\Phi_x H_u = \left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c} D & & & & & & & 0 \\ CB & D & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ CA^{p-2}B & \ldots & CB & D & & & & \\ \hline CB & D & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ CA^{p-1}B & \ldots & \ldots & CB & D & & & \\ \hline CAB & CB & D & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ CA^{p}B & \ldots & \ldots & \ldots & CB & D & & \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ CA^{N-2}B & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & CB & D \end{array}\right),$$

$$H_{\mathtt{M}}(\theta) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} H_{p,x} & & & H_{p,u} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & H_{p,x} & & & H_{p,u} \\ \hline 0 & & & I & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & I \end{array}\right), \tag{93}$$

$$H_{p,x} \doteq \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{pmatrix}, \quad H_{p,u} \doteq \begin{pmatrix} D & & & 0 \\ CB & D & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ CA^{p-2}B & \ldots & CB & D \end{pmatrix}.$$

Замечание. Исходя из структуры матриц $H(\theta)$, $H_{\mathtt{M}}(\theta)$, можно увидеть, что траектория $z = H_{\mathtt{M}}(\theta)w_{\mathtt{M}}$ в модели модифицированного метода (25) распадается на отдельные несвязанные отрезки длины p, каждый со своими начальными условиями $x_{\mathtt{M},0,i}$. В то же время в модели метода ВИ (24) траектория представляет собой единое целое с едиными начальными условиями x_0. Это находит выражение в структурах матриц C, $C_{\mathtt{OR}}$ функций потерь (21), (22).

Для доказательства утверждения 1 достаточно проверить следующее ключевое соотношение между матрицами $H(\theta)$ и $H_{\mathtt{M}}(\theta)$:

$$\Phi H(\theta) = H_{\mathtt{M}}(\theta) \left(\begin{array}{c|ccc} I & 0 & \ldots & 0 \\ A & B & & \\ A^2 & AB & B & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Phi_u & \\ 0 & & & \end{array}\right) \doteq H_{\mathtt{M}}(\theta)Q. \tag{94}$$

Проверку равенства (94) удобней осуществить в 3 шага.

1-й шаг:

$$\begin{pmatrix} H_{p,x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_{p,x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ B & & \\ AB & B & \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \begin{matrix} CB \\ \vdots \\ CA^{p-1}B \end{matrix} & 0 & & \\ \begin{matrix} CAB \\ \vdots \\ CA^{p}B \end{matrix} & \begin{matrix} CB \\ \vdots \\ CA^{p-1}B \end{matrix} & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

2-й шаг:

$$\begin{pmatrix} H_{p,u} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_{p,u} \end{pmatrix} \Phi_u =$$

$$= \begin{pmatrix} H_{p,u} & & 0 \\ & H_{p,u} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & & 0 \\ & I & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H_{p,u} & & 0 \\ & H_{p,u} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

3-й шаг:

$$\begin{pmatrix} H_{p,x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_{p,x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ B & & \\ AB & B & \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{p,u} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_{p,u} \end{pmatrix} \Phi_u =$$

$$= \begin{pmatrix} H_{p,u} & & & 0 \\ \begin{matrix} CB \\ \vdots \\ CA^{p-1}B \end{matrix} & H_{p,u} & & \\ \begin{matrix} CAB \\ \vdots \\ CA^{p}B \end{matrix} & \begin{matrix} CB \\ \vdots \\ CA^{p-1}B \end{matrix} & H_{p,u} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Учитывая вид матрицы $\Phi H(\theta)$ (92), переходим к равенству (94).

Запись $\Phi H(\theta) = H_{\mathtt{M}}(\theta)Q$ соответствует замене переменных $Qw = w_{\mathtt{M}}$, которая эквивалентна некоторой системе линейных ограничений $Mw_{\mathtt{M}} = 0$. Матрица M определяется соотношениями $MQ = 0$, $\ker(M^{\mathrm{T}}, Q) = 0$, т. е. столбцы составной матрицы (M^{T}, Q) образуют базис $\mathbb{R}^{\dim w_{\mathtt{M}}}$, где $\dim w_{\mathtt{M}}$ есть число компонент в векторе $w_{\mathtt{M}}$.

8.7 Доказательство леммы 1

Выразим x через новые переменные: $x = Q^{-1/2}y$. Функция $J_1(x(y)) = J_0 + (y - y_0)^{\mathrm{T}}(y - y_0)$ монотонно непрерывно растет вместе с увеличением расстояния $\|y - y_0\|$. Следовательно, если область $B_y \doteq Q^{1/2}B$ достаточно большая, то в ней найдется точка y_C такая, что

$$J_0 + (y_C - y_0)^{\mathrm{T}}(y_C - y_0) - C = J_0 + C. \tag{95}$$

Пусть $\|y - y_0\| \geqslant \|y_C - y_0\|$, тогда

$$J_0 + (y - y_0)^{\mathrm{T}}(y - y_0) - C \geqslant J_0 + C,$$

и y не может быть точкой минимума $J(x(\cdot)) = J_1(x(\cdot)) + R(x(\cdot))$. Поэтому $x(y) = Q^{-1/2}y$ не может быть точкой минимума $J(\cdot) = J_1(\cdot) + R(\cdot)$. Следовательно, величина $\|y_C - y_0\| = \sqrt{2C}$ является оценкой сверху для расстояния между точками минимума функций $J(x(\cdot))$ и $J_1(x(\cdot))$. Из (95) следуют неравенства

$$(x_1 - x_0)^{\mathrm{T}} Q (x_1 - x_0) = (y_1 - y_0)^{\mathrm{T}} (y_1 - y_0) < 2C,$$

$$(x_1 - x_0)^{\mathrm{T}} (x_1 - x_0) < \frac{2C}{\lambda_{\min}(Q)},$$

$$\|x_1 - x_0\| < \sqrt{\frac{2C}{\lambda_{\min}(Q)}}.$$

Если область B_y недостаточно большая для выполнения (95), то доопределим функцию $R(x(y))$ вне B_y произвольным согласным с условием леммы образом, и повторив рассуждения, получим, что точка минимума функции $J(x(y))$ необходимо лежит на пересечении B_y и круга $\|y - y_0\| < \sqrt{2C}$. Отсюда следует утверждение леммы.

8.8 Линейные оценки в случае разбиения параметров на две группы

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \check{y} = F\chi_* + \eta_*, \\ \\ W\chi_* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi_* = W_\perp \varphi_*, \end{cases} \tag{96}$$

где F, W — заданные матрицы, $\ker F = 0$, $\ker W^{\mathrm{T}} = 0$, $\chi_* \in \mathbb{R}^t$ — вектор параметров, η_* — случайная величина, распределенная нормально с нулевым средним и единичной дисперсией:

$$\eta_* \in \mathbf{N}(0, I).$$

Наблюдению доступна случайная величина

$$\check{y} = F\chi_* + \eta_* = FW_\perp \varphi_* + \eta_*.$$

Задача. По наблюдениям $\check{y}$ оценить χ_*.

Построим оценки параметра χ_* двумя способами: 1) с учетом и 2) без учета ограничения $W\chi_* = 0$. Затем сравним свойства оценок.

Оценка метода наименьших квадратов при линейных ограничениях на вектор оцениваемых параметров. Пусть $\chi = \chi(\check{y})$ — оценка χ_*, построенная по наблюдению $\check{y}$. Будем выбирать оптимальное значение χ исходя из условия минимума функции потерь

$$j(\chi) \doteq \|\check{y} - F\chi\|^2$$

при ограничении

$$W\chi = 0.$$

Введем вектор множителей Лагранжа λ и перейдем к равносильной задаче безусловной минимизации по χ и λ функции

$$j^*(\chi, \lambda) = \|\check{y} - F\chi\|^2 + \lambda^{\mathrm{T}} W\chi.$$

Необходимое условие экстремума состоит в равенстве нулю частных производных $j^*(\chi, \lambda)$ по χ и λ:

$$\begin{cases} (\check{y} - F\chi)^{\mathrm{T}} F + \lambda^{\mathrm{T}} W = 0, \\ \\ W\chi = 0. \end{cases}$$

Транспонируем первое уравнение:

$$\begin{cases} F^{\mathrm{T}} F\chi - F^{\mathrm{T}}\check{y} - W^{\mathrm{T}}\lambda = 0 \\ \\ W\chi = 0. \end{cases} \tag{97}$$

Домножим первое уравнение слева на $W\left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1}$, в результате получим:

$$W\left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}}\check{y} = (-)W\left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} W^{\mathrm{T}}\lambda.$$

Выразим множители Лагранжа:

$$\lambda = (-)\left[W\left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} W^{\mathrm{T}}\right]^{-1} W\left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}}\check{y}.$$

Наконец из уравнения (97) выразим оптимальное значение χ:

$$\chi = \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}}\check{y} - \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} W^{\mathrm{T}}\left[W\left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} W^{\mathrm{T}}\right]^{-1} W\left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}}\check{y} =$$

$$= \left[I - \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} W^{\mathrm{T}} \left[W \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} W^{\mathrm{T}} \right]^{-1} W \right] \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}} \check{y} \doteq$$

$$\doteq \Pi \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}} \check{y}, \tag{98}$$

Заметим, что выражение

$$\Pi \doteq I - \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} W^{\mathrm{T}} \left[W \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} W^{\mathrm{T}} \right]^{-1} W \tag{99}$$

описывает матрицу косого проецирования на подпространство $\operatorname{im} W_{\perp}$ вдоль подпространства $\operatorname{im} \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} W^{\mathrm{T}}$ (см. раздел 8.2 приложения, с подстановкой

$$\overline{A}^{\mathrm{T}} = W, \qquad B = \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} W^{\mathrm{T}},$$

учитывая равенства $\operatorname{im} A = \ker \overline{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{im} W_{\perp}$).

Оценка метода наименьших квадратов без учета линейных ограничений на вектор параметров. Будем выбирать оптимальное значение χ исходя из условия минимума функции потерь

$$j(\chi) = \|\check{y} - F\chi\|,$$

опуская ограничение $W\chi = 0$. Несмотря на неполный учет априорной информации, такая оценка останется состоятельной, как и оценка (98). Известно, что безусловный минимум $j(\chi)$ достигается при значении аргумента

$$\chi_1 = \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}} \check{y}. \tag{100}$$

Состоятельность и сравнение двух оценок. Для проверки состоятельности подставим в выражения для оценок (98), (100) правило генерации исходных данных (96):

$$\chi = \Pi \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}} \check{y} = \Pi \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}} \left(F W_{\perp} \varphi_* + \eta_*\right) =$$

$$= \Pi W_{\perp} \varphi_* + \Pi \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}} \eta_*.$$

Учитывая определение проектора Π (99), имеем $\Pi W_{\perp} \varphi_* = W_{\perp} \varphi_*$, и тогда

$$\chi = W_{\perp}\varphi_* + \Pi \left(F^{\mathrm{T}} F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}} \eta_* =$$
$$= \chi_* + \Pi \left(F^{\mathrm{T}} F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}} \eta_*.$$

Отсюда заключаем, что оценка χ является несмещенной, с дисперсией

$$D_\chi = \Pi \left(F^{\mathrm{T}} F\right)^{-1} \Pi^{\mathrm{T}}. \tag{101}$$

По закону больших чисел, эмпирическое среднее $\chi_L \doteq \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \chi_{(i)}$ оценок $\left\{\chi_{(i)}\right\}$, соответствующих разным реализациям случайной величины $\check{y}$, сходится с вероятностью 1 (п.н.) при $L \to \infty$ к истинному значению χ_*. Таким образом, оценка χ_L состоятельна.

Оценка χ_1 (100) отличается от χ (98) отсутствием проецирующего сомножителя Π и имеет дисперсию $D_1 = \left(F^{\mathrm{T}} F\right)^{-1}$. Несложно повторить рассуждения и получить, что оценка $\chi_{1,L} \doteq \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \chi_{1,(i)}$ также, как и χ_L, состоятельна.

Поскольку матрица Π вырождена (будучи проектором на подпространство $\operatorname{im} W_{\perp}$, собственное в $\mathbb{R}^t$), то вырождена и матрица дисперсий D_χ. Это соответствует тому, что все оценки χ расположены в подпространстве $\operatorname{im} W_{\perp}$. Справедливо также следующее соотношение между матрицами дисперсий:

$$\Pi \left(F^{\mathrm{T}} F\right)^{-1} \Pi^{\mathrm{T}} \leqslant \left(F^{\mathrm{T}} F\right)^{-1},$$
$$D_\chi \leqslant D_1.$$

Значит, оценка χ, учитывающая линейные ограничения, в среднем меньше уклоняется от неизвестного истинного значения χ_*, чем упрощенная оценка χ_1.

Частный случай разделения параметров на две группы. Выделим в векторе χ две группы параметров $\chi \doteq (w; \theta)$ и соответственно разделим на две группы столбцов матрицу $F \doteq (K, L)$, так что $F\chi = Kw + L\theta$. Будем считать, что линейные ограничения наложены только на w: $Mw = 0$. Как и раньше, оцениваться будут параметры из обеих групп w, θ (то есть весь вектор χ), но нас будет интересовать только дисперсия θ и ее зависимость от того, учитываются ли при получении оценки линейные ограничения, наложенные на w. Таким образом, параметры w в этом смысле являются вспомогательными, вторичными[1] по отношению к θ.

[1] В литературе употребляется термин “nuisance” (“мешающие” параметры) [28]; такое название мало подходит к нашему случаю: без оценки w совместно с θ оценка θ может оказаться несостоятельной.

Система уравнений объекта (96) с учетом разделения χ на две группы параметров записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \check{y} = F\chi_* + \eta_* = Kw_* + L\theta_* + \eta_*, \\ \\ Mw_* = 0. \end{cases} \tag{102}$$

Будем сравнивать две модели объекта (102), полную:

$$\begin{cases} y = Kw + L\theta + \eta, \\ \\ Mw = 0 \end{cases} \tag{103}$$

— и упрощенную:

$$y = Kw + L\theta + \eta. \tag{104}$$

Заметим, что случай (102) соответствует матрице ограничений вида

$$W = (M, 0)\,. \tag{105}$$

Далее вычислим дисперсию оценки θ по модели (103) и покажем, что она невырождена, в отличие от матрицы дисперсии всего вектора χ. Покажем, что если опустить условие $Mw = 0$, перейдя к упрощенной модели (104), то дисперсия оценки θ может только увеличиться.

Теорема 7. *Пусть*

$$\theta = (0, I)\,\chi,$$

$$\chi \doteq (w; \theta) = \arg\min_{Mw=0} j(\chi),$$

$$j(\chi) \doteq \|\check{y} - F\chi\|^2\,,$$

где данные $\check{y}$ *получены из системы* (102). *Строки матрицы* M *линейно независимы, и столбцы матрицы* F *линейно независимы. Тогда случайная величина* θ *имеет строго положительно определенную матрицу дисперсии* $D_\theta > 0$.

Доказательство. Обозначим

$$(F^{\mathrm{T}}F)^{-1} = \begin{pmatrix} K^{\mathrm{T}}K & K^{\mathrm{T}}L \\ L^{\mathrm{T}}K & L^{\mathrm{T}}L \end{pmatrix}^{-1} \doteq \begin{pmatrix} \Phi_{ww} & \Phi_{w\theta} \\ \Phi_{\theta w} & \Phi_{\theta\theta} \end{pmatrix} \doteq \Phi. \tag{106}$$

Поскольку $\theta = (0, I)\,\chi$, то имеем $D_\theta = (0, I)\, D_\chi\,(0; I)$, где матрица D_χ определена выражениями (101), (99), (105). Отсюда получаем:

$$D_\theta = \Phi_{\theta\theta} - (0, I)\,\Phi W^{\mathrm{T}}\left(W\Phi W^{\mathrm{T}}\right)^{-1} W\Phi\,(0; I) =$$

$$= \Phi_{\theta\theta} - \Phi_{\theta w} M^{\mathrm{T}}\left(M\Phi_{ww}M^{\mathrm{T}}\right)^{-1} M\Phi_{w\theta}. \tag{107}$$

Воспользуемся формулой Фробениуса для обращения клеточных матриц [17, с. 56]:

$$\begin{pmatrix} M\Phi_{ww}M^{\mathrm{T}} & M\Phi_{w\theta} \\ \Phi_{\theta w}M^{\mathrm{T}} & \Phi_{\theta\theta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \left(\Phi_{\theta\theta} - \Phi_{\theta w}M^{\mathrm{T}}\left[M\Phi_{ww}M^{\mathrm{T}}\right]^{-1} M\Phi_{w\theta}\right)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица в левой части равенства может быть представлена в виде произведения:

$$\begin{pmatrix} M\Phi_{ww}M^{\mathrm{T}} & M\Phi_{w\theta} \\ \Phi_{\theta w}M^{\mathrm{T}} & \Phi_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} \begin{pmatrix} M^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

В силу условия линейной независимости строк M и линейной независимости столбцов F эта матрица строго положительно определена, вместе со всеми своими квадратными диагональными подматрицами. Отсюда следует

$$D_\theta = \Phi_{\theta\theta} - \Phi_{\theta w}M^{\mathrm{T}}\left(M\Phi_{ww}M^{\mathrm{T}}\right)^{-1} M\Phi_{w\theta} > 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 8. *В условиях теоремы 7, пусть*

$$\theta_1 = (0, I)\,\chi_1,$$

$$\chi_1 \doteq (w_1; \theta_1) = \arg\min j(\chi) = \left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1} F^{\mathrm{T}}\check{y}.$$

Тогда дисперсия D_1 оценки θ_1 не меньше D_θ, и равенство $D_1 = D_\theta$ достигается только и только тогда, когда $\operatorname{im} K \cap \operatorname{im} L = 0$ *($K^{\mathrm{T}}L = 0$).*

Доказательство. В силу соотношения $\theta_1 = (0, I)\,\chi_1$, учитывая, что дисперсия χ_1 равна $\left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1}$, получаем $D_1 = (0, I)\left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1}(0; I) = \Phi_{\theta\theta}$. Сравнение с выражением (107) приводит к неравенству $D_1 \geqslant D_\theta$. Необходимым и достаточным условием равенства $D_1 = D_\theta$ является $\Phi_{\theta w} = 0$ или $K^{\mathrm{T}}L = 0$, что следует из определения Φ (106). Теорема доказана.

8.9 Доказательство теоремы 3

Запишем матрицу $H_{\mathtt{M}}(\theta)$ (93) через Кронекерово произведение:

$$H_{\mathtt{M}}(\theta) = \left(\begin{array}{c|c} I \otimes H_{p,x} & I \otimes H_{p,u} \\ \hline 0 & I \end{array}\right).$$

Упростим обозначения: $H \doteq H_{\mathtt{M}}(\theta)$, $\Delta H \doteq \Delta H_{\mathtt{M}}(\theta, \Delta\theta)$.

Покажем, что если выполнены условия: $\det A \neq 0$, $\Delta C = 0$, и строки C линейно независимы — то из равенства $H^{\text{т}}\Delta H = 0$ следует $\Delta H = 0$.

Используем свойство Кронекерова произведения:

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB').$$

Тогда

$$H^{\text{т}}\Delta H = \left(\begin{array}{c|c} I \otimes H_{p,x}^{\text{т}} & 0 \\ \hline I \otimes H_{p,u}^{\text{т}} & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I \otimes \Delta H_{p,x} & I \otimes \Delta H_{p,u} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} I \otimes H_{p,x}^{\text{т}}\Delta H_{p,x} & I \otimes H_{p,x}^{\text{т}}\Delta H_{p,u} \\ \hline I \otimes H_{p,u}^{\text{т}}\Delta H_{p,x} & I \otimes H_{p,u}^{\text{т}}\Delta H_{p,u} \end{array}\right).$$

Следовательно, условие $H^{\text{т}}\Delta H = 0$ равносильно условию

$$\left(\begin{array}{c|c} H_{p,x}^{\text{т}}\Delta H_{p,x} & H_{p,x}^{\text{т}}\Delta H_{p,u} \\ \hline H_{p,u}^{\text{т}}\Delta H_{p,x} & H_{p,u}^{\text{т}}\Delta H_{p,u} \end{array}\right) = 0.$$

Из равенства $H_{p,x}^{\text{т}}\Delta H_{p,u} = 0$ следует система уравнений:

$$\left\{\begin{array}{r} C^{\text{т}}\Delta D + A^{\text{т}}C^{\text{т}}C\Delta B + A^{2\text{т}}C^{\text{т}}C\Delta\,(AB) + \ldots + A^{(p-1)\text{т}}C^{\text{т}}C\Delta\left(A^{p-2}B\right) = 0 \\ A^{\text{т}}C^{\text{т}}\Delta D + A^{2\text{т}}C^{\text{т}}C\Delta B + \ldots + A^{(p-1)\text{т}}C^{\text{т}}C\Delta\left(A^{p-3}B\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^{(p-2)\text{т}}C^{\text{т}}\Delta D + A^{(p-1)\text{т}}C^{\text{т}}C\Delta B = 0 \\ A^{(p-1)\text{т}}C^{\text{т}}\Delta D = 0 \end{array}\right. \tag{108}$$

Пусть f_k обозначает левую часть k-го уравнения $f_k = 0$ в системе (108). Несложно получить следующие соотношения:

$$f_2 = Af_1 - A^{p\text{т}}C^{\text{т}}C\Delta\left(A^{p-2}B\right),$$

$$f_k = Af_{k-1} - A^{p\tau}C^{\tau}C\Delta\left(A^{p-k}B\right),$$
$$k = \overline{2, p.}$$

Из равенств $f_1 = 0$, ... , $f_p = 0$ следует

$$\begin{cases} A^{p\tau}C^{\tau}C\Delta\left(A^{p-k}B\right) = 0 \\ k = \overline{2, p.} \end{cases}$$

Если матрица A неособенная и строки C линейно независимы, последнее равенство означает

$$\begin{cases} C\Delta\left(A^{p-k}B\right) = 0 \\ k = \overline{2, p.} \end{cases}$$

Учитывая постоянство C ($\Delta C = 0$), можем записать

$$\begin{cases} \Delta\left(CA^{p-k}B\right) = 0 \\ k = \overline{2, p.} \end{cases}$$

Кроме того, из последнего уравнения системы (108) следует $\Delta D = 0$. Тем самым,

$$\Delta H_{p,u} = 0.$$

Далее, все допустимые изменения матриц A, B, C, D, сохраняющие $H_{p,u}$ ($\Delta H_{p,u} = 0$), описываются уравнением

$$(A + \Delta A, B + \Delta B, C + \Delta C, D + \Delta D) = (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, D), \quad \det P \neq 0.$$

Если наложить условие локальной идентифицируемости, с необходимостью получаем

$$P = I, \quad \Delta A = 0, \quad \Delta B = 0, \quad \Delta C = 0, \quad \Delta D = 0,$$

что означает $\Delta H = 0$.

Таким образом, доказано утверждение, более сильное, чем теорема 3: для различимых в смысле условия (iii) систем из класса простых любое изменение параметров $\Delta\theta$ (и, соответственно, матриц A, B, C, D) с необходимостью влечет $\Delta H \neq 0$ (в силу различимости) и влечет $H^{\tau}\Delta H \neq 0$ (в силу вышеприведенных рассуждений), то есть в силу теоремы 2 всегда $D_{\mathtt{V}} < D_{\mathtt{M}}$.

8.10 Доказательство теоремы 4

8.10.1 Асимптотическое распределение оценки θ_L

Пусть θ^* — точка локального минимума функционала $J \doteq \mathbf{M}\, J_1$, и θ_L — состоятельный корень уравнения $J'_L = 0$: $\lim_{L\to\infty} \theta_L = \theta^*$ (п.н.).

Лемма 2. *Если в некоторой окрестности $B(\theta^*)$ точки θ^* существуют непрерывные и ограниченные производные*

$$J'_L\,, \quad \partial J'_L/\partial\theta_i\,, \quad \partial^2 J'_L/\partial\theta_i\partial\theta_j\,, \quad i,j \in \overline{1,v}\,,$$

то случайная величина $L^{1/2}(\theta_L - \theta^*)$ асимптотически нормальна с нулевым мат. ожиданием и дисперсией

$$(\mathbf{M}\, J''_1)^{-1}\,(\mathbf{M}\, J'_1 J'^{\mathrm{T}}_1)\,(\mathbf{M}\, J''_1)^{-1}\,,$$

где производные J'_1 и J''_1 берутся в точке θ^*.

Доказательство проведем по схеме [29, 5f.2], сделав необходимые обобщения.

Зададим число L_B: $\forall L > L_B \quad \theta_L \in B(\theta^*)$ (п.н.). Везде далее считаем $L > L_B$. По условию, в окрестности $B(\theta^*)$ существуют непрерывные ограниченные производные J'_L, $\partial J'_L/\partial\theta_i$, $\partial^2 J'_L/\partial\theta_i\partial\theta_j$, $i,j \in \overline{1,v}$. (Напомним, что J'_L обозначает вектор производных

$$(\partial J_L/\partial\theta_1; \ldots ; \partial J_L/\partial\theta_v)\,,$$

так что $\partial^2 J'_L/\partial\theta_i\partial\theta_j \doteq \partial^3 J_L/\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k$). Следовательно, можно применить разложение градиента $J'_L(\theta_L)$ в ряд Тейлора относительно точки θ^* с остаточным членом:

$$J'_L(\theta_L) = 0 = J'_L(\theta^*) + J''_L(\theta^*)\cdot(\theta_L - \theta^*) +$$
$$+\tfrac{1}{2}(\theta_L - \theta^*)^{\mathrm{T}}\cdot J'''_L(\theta)\cdot(\theta_L - \theta^*)\,,$$

где θ — некоторая точка отрезка, соединяющего точки θ^* и θ_L: $\theta \in [\theta_L, \theta^*]$ [30, § 7.13]. Отсюда получаем

$$0 = L^{1/2}(\theta_L - \theta^*) + [J''_L(\theta^*) + \tfrac{1}{2}(\theta_L - \theta^*)^{\mathrm{T}}\cdot J'''_L(\theta)]^{-1}\times$$
$$\times L^{1/2}\cdot J'_L(\theta^*)\,.$$

Следовательно,

$$L^{1/2}(\theta_L - \theta^*) + [J''(\theta^*)]^{-1}\cdot L^{1/2}\cdot J'_L(\theta^*) =$$

$$= -\{[J'_L(\theta^*) + \tfrac{1}{2}(\theta_L - \theta^*)^{\mathrm{T}} \cdot J'''_L(\theta)]^{-1} - [J''(\theta^*)]^{-1}\}\times$$
$$\times L^{1/2} \cdot J'_L(\theta^*) \doteq$$
$$\doteq -E_L \cdot L^{1/2} \cdot J'_L(\theta^*).$$

По центральной предельной теореме, случайная величина

$$L^{1/2} \cdot J'_L(\theta^*) = L^{1/2} \cdot \sum_{i=1}^{L} J'_{1,i}(\theta^*)$$

имеет предельное нормальное распределение $\Phi(\mu, \Sigma^2)$:

$$\mu \doteq \mathbf{M}\, J'_{1,i}(\theta^*) = 0, \quad \Sigma^2 \doteq \mathbf{M}\, J'_{1,i}(\theta^*) \cdot J'^{\mathrm{T}}_{1,i}(\theta^*),$$
$$J'_{1,i} \doteq \partial J_{1,i}(\theta)/\partial\theta, \quad J_{1,i}(\theta) \doteq \min_w \|\check{z}_{(i)} - H(\theta)w\|^2.$$

Отметим, что $\mathbf{M}\, J_{1,i}(\theta) = \mathbf{M}\, J_1(\theta)$.

Далее, $E_L \to 0$ (п.н.), поскольку

1) по усиленному закону больших чисел $J''_L(\theta^*) \to J''(\theta^*) \doteq \mathbf{M}\, J''_1(\theta^*)$ (п.н.);

2) $\theta_L \to \theta^*$ (п.н.) (теорема 1);

3) производная $J'''_L(\theta)$ ограничена в $B(\theta^*)$.

Из сходимости распределения $L^{1/2} \cdot J'_L(\theta^*)$ к нормальному $\Phi(\mu, \Sigma^2)$, $\Sigma^2 < \infty$, и сходимости п.н. $E_L \to 0$ следует сходимость по вероятности

$$L^{1/2}(\theta_L - \theta^*) + [J''(\theta^*)]^{-1} \cdot L^{1/2} \cdot J'_L(\theta^*) \to 0.$$

Следовательно, распределение $L^{1/2}(\theta_L - \theta^*)$ сходится к нормальному $\Phi(0, \Sigma_1^2)$, где

$$\Sigma_1^2 \doteq \left(\mathbf{M}\, J''_1\right)^{-1} \left(\mathbf{M}\, J'_1 J'^{\mathrm{T}}_1\right) \left(\mathbf{M}\, J''_1\right)^{-1}.$$

Лемма доказана.

8.10.2 Оценки производных и регулярность эмпирического функционала $J_1(\theta)$

Первая и вторая производные функционала $J_1(\theta)$ вычислены в [3, **?**], где приведены формулы с использованием специальной матрицы из множителей Лагранжа. В отличие от [3, **?**], здесь получено явное выражение второй производной через элементы матриц G, C, Π, что позволило дать простые оценки сверху для слагаемых в выражении для 2-й производной.

Лемма 3. *Пусть* $\omega(\gamma_\theta) \doteq J_1(\theta) = \check{z}^{\text{т}} G^{\text{т}} C G \check{z}$, $\omega' \doteq \partial\omega/\partial\gamma$, $\omega'' \doteq \partial^2\omega/\partial\gamma^2$. *Тогда*

$$\omega' = \gamma^{\text{т}} V^{\text{т}} C \widehat{V}, \quad V \doteq V(\check{z}), \quad \widehat{V} \doteq V(\widehat{z}), \quad \widehat{z} \doteq \Pi\check{z}, \tag{109}$$

$$\omega'' = \widehat{V}^{\text{т}} C \widehat{V} - S_1 - S_2, \tag{110}$$

где слагаемые S_1 *и* S_2 *ограничены сверху по евклидовой норме*

$$\|S\| \doteq \left(\sum s_{ij}^2\right)^{1/2} = (\operatorname{Sp} S^{\text{т}} S)^{1/2} \tag{111}$$

неравенствами:

$$\|S_1\| \leqslant \sqrt{2}\, c_0 \cdot \|\check{z}\| \cdot \|\check{z} - \widehat{z}\|,$$

$$\|S_2\| \leqslant c_0 \cdot \|\check{z} - \widehat{z}\|^2,$$

$$c_0 \doteq Nr(p+1)(m+r) \operatorname{Sp} C.$$

Доказательство. 1) Обозначим

$$\omega'_{ij} \doteq \partial\omega/\partial\gamma^{ij} = \check{z}^{\text{т}}(-\partial\Pi/\partial\gamma^{ij})\check{z}.$$

Раскроем второй сомножитель:

$$-\partial\Pi/\partial\gamma^{ij} =$$

$$= (\partial G^{\text{т}}/\partial\gamma^{ij}) C G - G^{\text{т}} C ((\partial G/\partial\gamma^{ij}) G^{\text{т}} +$$

$$+ G(\partial G^{\text{т}}/\partial\gamma^{ij})) C G + G^{\text{т}} C (\partial G/\partial\gamma^{ij}) =$$

$$= E_{ij}^{\text{т}} C G - G^{\text{т}} C (E_{ij} G^{\text{т}} + G E_{ij}^{\text{т}}) C G + G^{\text{т}} C E_{ij} =$$

$$= (E_{ij}^{\text{т}} - G^{\text{т}} C G E_{ij}^{\text{т}}) C G + G^{\text{т}} C (E_{ij} - E_{ij} G^{\text{т}} C G).$$

После вынесения $E_{ij}^{\text{т}}$ и E_{ij} за скобки получаем

$$-\partial\Pi/\partial\gamma^{ij} = \Pi E_{ij}^{\text{т}} C G + G^{\text{т}} C E_{ij} \Pi. \tag{112}$$

Отсюда следует

$$\omega'_{ij} = \check{z}^{\text{т}} G^{\text{т}} C E_{ij} \Pi \check{z}. \tag{113}$$

Учитывая, что $E_{ij}\Pi\check{z} = \widehat{V}_{ij}$ и $\check{z}^{\text{т}} G^{\text{т}} = \gamma^{\text{т}} V^{\text{т}}$, имеем $\omega'_{ij} = \gamma^{\text{т}} V^{\text{т}} C \widehat{V}_{ij}$. Следовательно, $\omega' = \gamma^{\text{т}} V^{\text{т}} C \widehat{V}$.

2) Обозначим $\omega''_{ijkl} \doteq \partial^2\omega/\partial\gamma^{ij}\partial\gamma^{kl} = \check{z}^{\text{т}}(\partial G^{\text{т}} C E_{ij} \Pi/\partial\gamma^{kl})\check{z}$ (см. (113)). Раскроем второй сомножитель:

$$\partial G^{\text{т}} C E_{ij} \Pi/\partial\gamma^{kl} = E_{kl}^{\text{т}} C E_{ij} \Pi - G^{\text{т}} C (E_{kl} G^{\text{т}} + G E_{kl}^{\text{т}}) C E_{ij} \Pi -$$

$$-G^{\text{т}}CE_{ij}(\Pi E_{kl}^{\text{т}}CG + G^{\text{т}}CE_{kl}\Pi).$$

В этом равенстве два последних слагаемых получены с применением формулы (112). Далее удобно сложить первое и третье слагаемые:

$$E_{kl}^{\text{т}}CE_{ij}\Pi - G^{\text{т}}CGE_{kl}^{\text{т}}CE_{ij}\Pi = \Pi E_{kl}^{\text{т}}CE_{ij}\Pi.$$

Объединив 2-е и 5-е слагаемые, получим

$$\begin{gathered}\partial G^{\text{т}}CE_{ij}\Pi/\partial\gamma^{kl} = \Pi E_{kl}^{\text{т}}CE_{ij}\Pi - \\ -G^{\text{т}}C(E_{kl}G^{\text{т}}CE_{ij} + E_{ij}G^{\text{т}}CE_{kl})\Pi - \\ -G^{\text{т}}CE_{ij}\Pi E_{kl}^{\text{т}}CG.\end{gathered} \tag{114}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\omega''_{ijkl} = \widehat{V}_{kl}^{\text{т}}C\widehat{V}_{ij} - \\ -\overline{z}^{\text{т}}G^{\text{т}}C(E_{kl}G^{\text{т}}CE_{ij} + E_{ij}G^{\text{т}}CE_{kl})\Pi\check{z} - \\ -\overline{z}^{\text{т}}G^{\text{т}}CE_{ij}\Pi E_{kl}^{\text{т}}CG\check{z}.\end{gathered}$$

Тогда

$$\omega'' = \|\omega''_{ijkl}\| = \widehat{V}^{\text{т}}C\widehat{V} - S_1 - S_2.$$

3) Оценим сверху нормы слагаемых S_1 и S_2. Согласно последнему равенству, S_1, S_2 — матрицы, столбцы и строки которых пронумерованы двойными индексами ij и kl соответственно, таким образом, что

$$S_1^{ij,kl} \doteq \check{z}^{\text{т}}G^{\text{т}}C(E_{kl}G^{\text{т}}CE_{ij} + E_{ij}G^{\text{т}}CE_{kl})\Pi\check{z},$$

$$S_2^{ij,kl} \doteq \check{z}^{\text{т}}G^{\text{т}}CE_{ij}\Pi E_{kl}^{\text{т}}CG\check{z}.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\|S_1\|^2 \leqslant \sum_{ij}\sum_{kl}\|S_1^{ij,kl}\|^2 \leqslant \\ \leqslant 2\sum_{ij}\sum_{kl}\|\check{z}^{\text{т}}G^{\text{т}}CE_{kl}G^{\text{т}}CE_{ij}\Pi\check{z}\|^2 \leqslant \\ \leqslant 2\sum_{ij}\sum_{kl}\|\check{z}^{\text{т}}G^{\text{т}}C\|^2\cdot\|E_{kl}G^{\text{т}}C\|^2\cdot\|E_{ij}\Pi\check{z}\|^2 \leqslant \\ \leqslant 2N^2\cdot\sum_{ij}\sum_{kl}\|\check{z}^{\text{т}}G^{\text{т}}C\|^2\cdot\|G^{\text{т}}C\|^2\cdot\|\check{z}\|^2 \leqslant \\ \leqslant 2N^2(r(p+1)(m+r))^2\cdot(\operatorname{Sp}C)^2\cdot\|\check{z}-\widehat{z}\|^2\cdot\|\check{z}\|^2.\end{gathered}$$

В последних 2-х неравенствах учтено: 1) $i \in \overline{1, r}$, $j \in \overline{1, (p+1)(r+m)}$; 2) $\|E_{kl}\|^2 = N - p_k \leqslant N$, где $p_k \leqslant p$ — степень k-й строки знаменателя $a(s)$ системы (1); 3) $\|C^{1/2}\|^2 = \operatorname{Sp} C$; 4) $\|G^{\text{т}} C\|^2 = \operatorname{Sp} CGG^{\text{т}} C = \operatorname{Sp} C$; 5) $\|\check{z}^{\text{т}} G^{\text{т}} C\|^2 \leqslant \|\check{z}^{\text{т}} G^{\text{т}} C^{1/2}\|^2 \cdot \|C^{1/2}\|^2 = \|\check{z} - \widehat{z}\|^2 \operatorname{Sp} C$. Следовательно,

$$\|S_1\| \leqslant \sqrt{2}\, c_0 \cdot \|\check{z}\| \cdot \|\check{z} - \widehat{z}\|.$$

Аналогично оценивается норма слагаемого S_2:

$$\|S_2\|^2 \leqslant \sum_{ij} \sum_{kl} \|S_2^{ij,kl}\|^2 =$$

$$= \sum_{ij} \sum_{kl} \|\check{z}^{\text{т}} G^{\text{т}} C E_{ij} \Pi E_{kl}^{\text{т}} C G \check{z}\|^2.$$

Применив неравенства $\|E_{kl}\|^2 = N - p_k \leqslant N$, $\|x^{\text{т}} \Pi x\|^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|x\|^2$, получим

$$\|S_2\|^2 \leqslant N^2 \cdot \sum_{ij} \sum_{kl} \|CG\check{z}\|^4 \leqslant$$

$$\leqslant N^2 (r(p+1)(m+r))^2 \cdot (\operatorname{Sp} C)^2 \cdot \|\check{z} - \widehat{z}\|^4.$$

Следовательно, $\|S_2\| \leqslant c_0 \cdot \|\check{z} - \widehat{z}\|^2$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Существует окрестность $B(\theta^*)$ точки θ^*, в которой функционал $J_L(\theta)$* (17), (19) *имеет непрерывную и ограниченную третью производную $J_L'''(\theta)$.*

Доказательство. Отметим, что матрица G_θ системы (5) при ограничениях (i)–(iii) непрерывно дифференцируема по θ.

Функционал $J_L(\theta)$ имеет непрерывную третью производную по θ, если (и только если) непрерывную третью производную по θ имеет определенная в условии леммы 3 функция $\omega(\theta) \doteq \omega(\gamma_\theta)$. Согласно лемме 3,

$$\omega''_{\theta\theta} = D^{\text{т}} \omega''_{\gamma\gamma} D =$$

$$= D^{\text{т}} (\widehat{V}^{\text{т}} C \widehat{V} - S_1 - S_2) D \doteq D^{\text{т}} (S_0 - S_1 - S_2) D,$$

где S_0, S_1, S_2 — матрицы, столбцы и строки которых пронумерованы двойными индексами ij и kl, так что

$$S_0^{ij,kl} \doteq \check{z}^{\text{т}} \Pi E_{kl}^{\text{т}} C E_{ij} \Pi \check{z} \doteq \widehat{V}_{kl}^{\text{т}} C \widehat{V}_{ij},$$

$$S_1^{ij,kl} \doteq \check{z}^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C (E_{kl} G^{\mathrm{T}} C E_{ij} + E_{ij} G^{\mathrm{T}} C E_{kl}) \Pi \check{z},$$
$$S_2^{ij,kl} \doteq \check{z}^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C E_{ij} \Pi E_{kl}^{\mathrm{T}} C G \check{z}.$$

Далее не будем вычислять производную $\omega''' \doteq \partial\omega''/\partial\theta$, а поступим следующим образом. Учитывая определение $\Pi \doteq I - G^{\mathrm{T}}CG$, заметим, что функция $\omega''(\theta)$ имеет вид $\omega''(\theta) \equiv \varphi(C_\theta, G_\theta)$, где $\varphi(C, G)$ — биквадратичная форма от матричных аргументов C, G размеров соответственно $n \times n$ и $n \times l$. Матриц-функция G_θ непрерывно дифференцируема и имеет для всех $\theta \in \Omega$ линейно независимые строки. Следовательно, матриц-функция $C_\theta \doteq [G_\theta G_\theta^{\mathrm{T}}]^{-1}$ в замкнутом подмножестве $B_1(\theta^*) \subset \Omega$ непрерывно дифференцируема и ограничена, поскольку матриц-функция $[G_\theta G_\theta^{\mathrm{T}}]^{-1}$ непрерывна и ограничена в $B_1(\theta^*)$ и имеет место равенство

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta}[G_\theta G_\theta^{\mathrm{T}}]^{-1} = [G_\theta G_\theta^{\mathrm{T}}]^{-1} \cdot \tfrac{\partial}{\partial\theta}[G_\theta G_\theta^{\mathrm{T}}] \cdot [G_\theta G_\theta^{\mathrm{T}}]^{-1}.$$

Отсюда следует, что суперпозиция $\varphi(C_\theta, G_\theta) = \omega''(\theta)$ во внутренних точках множества $B_1(\theta^*)$ имеет непрерывную производную

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta}\varphi(C_\theta, G_\theta) = \omega'''(\theta),$$

и в замкнутом подмножестве $B_2(\theta^*) \subset B_1(\theta^*)$ эта производная ограничена. Следовательно, она ограничена в любой окрестности $B(\theta^*) \subset B_2(\theta^*)$ точки θ^*.

Лемма доказана.

8.10.3 Математическое ожидание квадрата градиента и второй производной эмпирического функционала $J_1(\theta)$

Обозначим, как и в доказательстве леммы 3,

$$\omega(\gamma_\theta) \doteq J_1(\theta)\,, \quad \omega' \doteq \partial\omega/\partial\gamma \doteq \|\partial\omega/\partial\gamma^{ij}\| \doteq \|\omega'_{ij}\|$$

(вектор, элементы которого пронумерованы двойным индексом ij),

$$\omega'' \doteq \partial^2\omega/\partial\gamma^2 \doteq \|\partial^2\omega/\partial\gamma^{ij}\partial\gamma^{kl}\| \doteq \|\omega'_{ij,kl}\|$$

(матрица с нумерацией двойным индексом строк ij и столбцов kl).

Лемма 5. *В точке* $\theta = \theta_*$*:*

1) $$\mathbf{M}\,\omega'\omega'^{\mathrm{T}} = \sigma^2 \mathbf{M}\,\omega'' + \sigma^2 X^{\mathrm{T}} X,$$

$$X^{\mathrm{T}} X \doteq \|x_{ij,kl}\|_{k\in\overline{1,r},\, l\in\overline{1,t}}^{i\in\overline{1,r},\, j\in\overline{1,t}}, \qquad x_{ij,kl} \doteq \sigma^2 \operatorname{Sp} \Pi E_{ij}^{\mathrm{T}} C E_{kl} \Pi;$$

2) $$x_{ij,kl} = \mathbf{M}\,(\widehat{V} - V_*)^{\mathrm{T}}_{ij} C (\widehat{V} - V_*)_{kl},$$

3) $$\mathbf{M}\,\omega'' = \mathbf{M}\,V_*^{\mathrm{T}} C V_*.$$

Доказательство. 1) Установим одно несложное равенство. Пусть A, B — матрицы размеров $l \times l$, такие, что для некоторого вектора $x \in R^l$ выполнено $Ax = 0$ и $x^{\mathrm{T}} B = 0$. И пусть $e \in R^l$ — случайная величина с нулевым мат. ожиданием и диагональной матрицей вторых моментов: $\mathbf{M}\,ee^{\mathrm{T}} = \sigma^2 I$. Тогда

$$\mathbf{M}\,(x+e)^{\mathrm{T}} A (x+e)(x+e)^{\mathrm{T}} B (x+e) = \sigma^2 \mathbf{M}\,x^{\mathrm{T}} ABx + \mathbf{M}\,e^{\mathrm{T}} Aee^{\mathrm{T}} Be \qquad (115)$$

(для доказательства следует заметить, что после раскрытия скобок в левой части равенства мат. ожидание слагаемых, в которые вектор e входит нечетное число раз, равно нулю).

Далее положим в (115) $A \doteq \Pi E_{ij}^{\mathrm{T}} CG$, $B \doteq G^{\mathrm{T}} C E_{kl} \Pi$, $x \doteq z_*$, $e \doteq \eta$. В результате, используя (113), получим

$$\mathbf{M}\,\omega'_{ij}\omega'_{kl} = \sigma^2 \mathbf{M}\,V^{\mathrm{T}}_{*\,ij} C V_{*\,kl} + \mathbf{M}\,\eta^{\mathrm{T}} \Pi E_{ij}^{\mathrm{T}} CG\eta\eta^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C E_{kl} \Pi \eta.$$

Представим вектор η в виде суммы двух ортогональных слагаемых: $\eta \doteq \eta_\| + \eta_\perp$, где $\eta_\| \doteq \Pi\eta$ и $\eta_\perp \doteq \eta - \eta_\|$. Заметим, что $G\eta_\| = 0$, и случайные величины $\eta_\|$ и $\eta_\perp$ взаимно независимы. Учитывая, что $\mathbf{M}\,G\eta_\perp\eta_\perp^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} = \sigma^2 C^{-1}$, имеем:

$$\mathbf{M}\,\omega'_{ij}\omega'_{kl} = \sigma^2 \mathbf{M}\,V^{\mathrm{T}}_{*\,ij} C V_{*\,kl} + \sigma^2 \mathbf{M}\,\eta_\|^{\mathrm{T}} E_{ij}^{\mathrm{T}} C E_{kl} \eta_\|.$$

Наконец, второе слагаемое можно преобразовать, используя равенства $\eta_\| = \Pi\eta$, $\mathbf{M}\,\eta^{\mathrm{T}} A\eta = \sigma^2 \operatorname{Sp} A$. Это приводит к 1-му утверждению леммы.

2) Заметим, что $\eta = \check{z} - z_*$ и $\eta_\| = \Pi(\check{z} - z_*) = \widehat{z} - z_*$. Отсюда следует

$$\mathbf{M}\,\omega'_{ij}\omega'_{kl} = \sigma^2 \mathbf{M}\,V^{\mathrm{T}}_{*\,ij} C V_{*\,kl} + \sigma^2 \mathbf{M}\,(\widehat{V} - V_*)^{\mathrm{T}}_{ij} C (\widehat{V} - V_*)_{kl}$$

и далее 2-е утверждение леммы.

3) Согласно определениям

$$\mathbf{M}\,\omega'' = \mathbf{M}\,(\check{z}^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} CG\check{z})'' = \mathbf{M}\,\check{z}^{\mathrm{T}} (G^{\mathrm{T}} CG)'' \check{z}.$$

Подставив $\check{z} = z_* + \eta$, получим

$$\mathbf{M}\,\omega'' = \mathbf{M}\,z_*^{\mathrm{T}} (G^{\mathrm{T}} CG)'' z_* + \mathbf{M}\,\eta^{\mathrm{T}} (G^{\mathrm{T}} CG)'' \eta =$$

$$= \mathbf{M}\,z_*^{\mathrm{T}} (G^{\mathrm{T}} CG)'' z_* + \sigma^2 \operatorname{Sp}(G^{\mathrm{T}} CG)'' =$$

$$= \mathbf{M}\, z_*^{\mathrm{T}} (G^{\mathrm{T}} C G)'' z_* + \sigma^2 (\operatorname{Sp} G^{\mathrm{T}} C G)''.$$

Учтем, что

$$\operatorname{Sp} G^{\mathrm{T}} C G = \operatorname{Sp} C G G^{\mathrm{T}} = \operatorname{Sp} I_{\operatorname{rank} G} = \operatorname{rank} G.$$

Согласно условиям (i)–(iii), $\operatorname{rank} G$ — постоянное число, следовательно,

$$(\operatorname{Sp} G^{\mathrm{T}} C G)'' = 0,$$

$$\mathbf{M}\, \omega'' = \mathbf{M}\, z_*^{\mathrm{T}} (G^{\mathrm{T}} C G)'' z_* = \mathbf{M}_{\,\check{z} = z_*} \omega''.$$

Применив лемму 3, получаем

$$\mathbf{M}\, \omega'' = \mathbf{M}\, V_*^{\mathrm{T}} C V_*.$$

Лемма доказана.

Учитывая, что $J_1' \doteq J_{1\theta}' = \omega_\gamma' D$ и $J_1'' \doteq J_{1\theta\theta}'' = D^{\mathrm{T}} \omega_{\gamma\gamma}'' D$, приходим к утверждению теоремы 4.

8.11 Доказательство теоремы 5

Как было указано в разделе 3, модифицированные оценки могут быть охарактеризованы, с одной стороны, как оценки ОР с заменой $\overline{z}$ на $\Phi\overline{z}$, и с другой стороны, как оценки ВИ с заменой C на $C_{\mathtt{OR}}$. Исходя из этого, построим доказательство теоремы 5, следуя доказательству теоремы 4.

1) Лемма 2 остается без изменения.

2) Лемма 3 заменяется следующим утверждением.

Лемма 6. *Пусть*

$$\omega(\gamma_\theta) \doteq J_1(\theta) = \check{z}^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} G \check{z} =$$
$$= \check{z}^{\mathrm{T}} \Phi^{\mathrm{T}} G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}} \Phi \check{z},$$
$$\omega' \doteq \partial\omega/\partial\gamma, \qquad \omega'' \doteq \partial^2\omega/\partial\gamma^2.$$

Тогда

$$\omega' = \gamma^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} \widehat{V}_{\mathtt{M}}, \tag{116}$$
$$V \doteq V(\check{z}),$$
$$\widehat{V}_{\mathtt{M}} \doteq V_{\mathtt{OR}}(\widehat{z}), \quad \widehat{z} \doteq \Pi_{\mathtt{OR}} \Phi \check{z},$$
$$\omega'' = \widehat{V}_{\mathtt{M}}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} \widehat{V}_{\mathtt{M}} - S_1 - S_2,$$

где слагаемые S_1 *и* S_2 *ограничены сверху по евклидовой норме*

$$\|S\| \doteq \left(\sum s_{ij}^2\right)^{1/2} = (\mathrm{Sp}\, S^{\mathrm{T}} S)^{1/2}$$

неравенствами:

$$\|S_1\| \leqslant \sqrt{2}\, c_0 \cdot \|\check{z}\| \cdot \|\check{z} - \widehat{z}\|,$$

$$\|S_2\| \leqslant c_0 \cdot \|\check{z} - \widehat{z}\|^2,$$

$$c_0 \doteq Nr(p+1)(m+r)\|\Phi\|^2\, \mathrm{Sp}\, C_{\mathtt{OR}} = N^4 r(p+1)^3(m+r)^3\, \mathrm{Sp}\, (\gamma_\theta^{\mathrm{T}}\gamma_\theta)^{-1}\,.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3. Следует произвести замену C, G, $\overline{z}$ на $C_{\mathtt{OR}}$, $G_{\mathtt{OR}}$, $\Phi\overline{z}$.

3) Лемма 4 сохраняет силу (в доказательстве следует произвести замену C, G, $\overline{z}$ на $C_{\mathtt{OR}}$, $G_{\mathtt{OR}}$, $\Phi\overline{z}$).

4) Лемма 5 заменяется следующим утверждением.

Лемма 7. *В точке* $\theta = \theta_*$*:*

1)
$$\mathbf{M}\, \omega'\omega'^{\mathrm{T}} = \sigma^2 \mathbf{M}\, V_*^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} V_* + \sigma^4 W,$$

$$0 < W < c_1 I,$$

$$c_1 = N^4(p+1)^3 r(r+m+1)^3\, \mathrm{Sp}\, (\gamma_\theta^{\mathrm{T}}\gamma_\theta)^{-1}\,,$$

2)
$$\mathbf{M}\, \omega'' = \mathbf{M}\, V_*^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} V_* + \sigma^2\, \mathrm{Sp}\, \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)''\,,$$

$$\mathrm{Sp}\, \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)'' \leqslant 4\,(p+1)^{1/2}\, N^3\,(r+m)^2\, \mathrm{Sp}\, (\gamma_\theta^{\mathrm{T}}\gamma_\theta)^{-1}\,.$$

Доказательство. 1) Из леммы 6,

$$\omega'\omega'^{\mathrm{T}} = \widehat{V}_{\mathtt{M}}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} V \gamma\gamma^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} \widehat{V}_{\mathtt{M}},$$

$$\omega'_{ij}\omega'_{kl} = \check{z}^{\mathrm{T}} \Phi^{\mathrm{T}} \Pi_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}ij}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}} \Phi \check{z} \check{z}^{\mathrm{T}} \Phi^{\mathrm{T}} G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}ij} \Pi_{\mathtt{OR}} \Phi \check{z}.$$

В равенстве (115) положим

$$A \doteq \Phi^{\mathrm{T}} \Pi_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}ij}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}} \Phi,$$

$$B \doteq \Phi^{\mathrm{T}} G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}kl} \Pi_{\mathtt{OR}} \Phi,$$

$$x \doteq z_*, \qquad e \doteq \eta.$$

В результате получим

$$\mathbf{M}\, \omega'_{ij}\omega'_{kl} =$$

$$= \sigma^2 \mathbf{M}\, V_{*ij}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} V_{*kl} +$$
$$+ \mathbf{M}\, \eta^{\mathrm{T}} \Phi^{\mathrm{T}} \Pi_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}ij}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}} \Phi \eta \eta^{\mathrm{T}} \Phi^{\mathrm{T}} G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}} C_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}kl} \Pi_{\mathtt{OR}} \Phi \eta. \qquad (117)$$

Вместо вычисления мат. ожидания второго слагаемого, как это было сделано в доказательстве теоремы 4, ограничимся получением оценки сверху.

Установим ряд вспомогательных утверждений.

Предложение 8. *Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — квадратная матрица размера $n \times n$, и пусть η — случайный вектор с нулевым мат. ожиданием и диагональной матрицей вторых моментов:*

$$\mathbf{M}\, \eta = 0, \qquad \mathbf{M}\, \eta\eta^{\mathrm{T}} = \sigma^2 I_{n\times n}.$$

Тогда

$$\sigma^{-4} \mathbf{M}\, \eta^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \eta \eta^{\mathrm{T}} A \eta =$$

$$= \sum_i a_{ii}^2 + \sum_{ij} a_{ii} a_{jj} + \sum_{ij} a_{ij} a_{ji} + \sum_{ij} a_{ij}^2 =$$
$$= \mathrm{Sp}\,(A * A) + (\mathrm{Sp}\, A)^2 + \mathrm{Sp}\, A^2 + \mathrm{Sp}\, A^{\mathrm{T}} A,$$

где знак $*$ обозначает бинарную операцию покомпонентного произведения матриц одинакового размера: ij-й элемент $A * B$ есть произведение ij-х элементов A и B:

$$(A * B)_{ij} = a_{ij} b_{ij}.$$

Доказательство. Распишем покомпонентно:

$$\sigma^{-4} \mathbf{M}\, \eta^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \eta \eta^{\mathrm{T}} A \eta =$$
$$= \sigma^{-4} \mathbf{M} \sum_{ijkl} a_{ij} a_{kl} \eta_i \eta_j \eta_k \eta_l.$$

Далее следует учесть, что математические ожидания сомножителей вида $\eta_i \eta_i \eta_k \eta_l$, $\eta_i \eta_i \eta_i \eta_l$ равны нулю.

Предложение 9. *Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — квадратная матрица размера $n \times n$, и*

$$a \doteq (a_{11}; \ldots; a_{nn})$$

— вектор из диагональных элементов A. Тогда

(1) $$(\mathrm{Sp}\, A)^2 \leqslant n a^{\mathrm{T}} a \leqslant n\, \mathrm{Sp}\, A^{\mathrm{T}} A = n \|A\|^2;$$

(2) $$\mathrm{Sp}\, A * A \leqslant \mathrm{Sp}\, A^{\mathrm{T}} A;$$

Доказательство. 1) Представим $\operatorname{Sp} A$ в виде скалярного произведения

$$\operatorname{Sp} A = a^{\text{т}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \doteq a^{\text{т}} b.$$

Тогда

$$(\operatorname{Sp} A)^2 = (a^{\text{т}} b)^2 \leqslant (a^{\text{т}} a)\,(b^{\text{т}} b) = n a^{\text{т}} a$$

(неравенство Коши—Буняковского). Заключительная часть (1) следует из определений следа Sp и евклидовой нормы $\|\cdot\|$ матрицы.

2) Второе неравенство также следует из определений:

$$\operatorname{Sp} A * A \doteq a^{\text{т}} a \leqslant \operatorname{Sp} A^{\text{т}} A.$$

Предложение доказано.

Предложение 10. *Пусть $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ — квадратные матрицы размера $n \times n$. Тогда*

(1) $$(\operatorname{Sp} AB)^2 \leqslant (\operatorname{Sp} A^{\text{т}} A)\,(\operatorname{Sp} B^{\text{т}} B)\,;$$

(2) $$\operatorname{Sp} A^2 \leqslant \operatorname{Sp} A^{\text{т}} A.$$

Доказательство. В пространстве матриц определим скалярное произведение

$$(A, B) = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{Sp} A^{\text{т}} B,$$

тогда (1) оказывается неравенством Коши—Буняковского:

$$(A, B)^2 \leqslant (A, A)\,(B, B)\,.$$

Неравенство (2) следует из (1) при $B = A$. Предложение доказано.

Прямым следствием предложений 8, 9, 10 является следующее

Утверждение 12. *Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — квадратная матрица размера $n \times n$, и пусть η — случайный вектор с нулевым мат. ожиданием и диагональной матрицей вторых моментов:*

$$\mathbf{M}\,\eta = 0, \qquad \mathbf{M}\,\eta\eta^{\text{т}} = \sigma^2 I_{n\times n}.$$

Тогда

$$\sigma^{-4}\mathbf{M}\,\eta^{\text{т}} A^{\text{т}} \eta\eta^{\text{т}} A \eta \leqslant (n+3) \operatorname{Sp} A^{\text{т}} A.$$

Следствие. *В формуле* (117) *второе слагаемое ограничено сверху:*

$$\mathbf{M}\,\eta^{\text{т}}\Phi^{\text{т}}\Pi_{\mathtt{OR}}E^{\text{т}}_{\mathtt{OR}ij}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\Phi\eta\eta^{\text{т}}\Phi^{\text{т}}G^{\text{т}}_{\mathtt{OR}}C_{\mathtt{OR}}E_{\mathtt{OR}kl}\Pi_{\mathtt{OR}}\Phi\eta <$$

$$< \sigma^4 N^4 (p+1)^2 (r+m+1)^2 \operatorname{Sp}(\gamma_\theta^{\text{т}}\gamma_\theta)^{-1}\,.$$

Доказательство. Имеет место последовательность неравенств:

$$\mathbf{M}\,\eta^{\text{т}}\Phi^{\text{т}}\Pi_{\mathtt{OR}}E^{\text{т}}_{\mathtt{OR}ij}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\Phi\eta\eta^{\text{т}}\Phi^{\text{т}}G^{\text{т}}_{\mathtt{OR}}C_{\mathtt{OR}}E_{\mathtt{OR}kl}\Pi_{\mathtt{OR}}\Phi\eta \leqslant$$

(утверждение 12)

$$\leqslant \sigma^4 (N(r+m)+3)\times$$

$$\times \operatorname{Sp}\Phi^{\text{т}}\Pi_{\mathtt{OR}}E^{\text{т}}_{\mathtt{OR}ij}C_{\mathtt{OR}}GG^{\text{т}}C_{\mathtt{OR}}E_{\mathtt{OR}kl}\Pi_{\mathtt{OR}}\Phi =$$

$$= \sigma^4 (N(r+m)+3)\|\Phi^{\text{т}}\Pi_{\mathtt{OR}}E^{\text{т}}_{\mathtt{OR}ij}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\Phi\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sigma^4 (N(r+m)+3)\|\Phi^{\text{т}}\Phi E^{\text{т}}_{\mathtt{OR}ij}\|^2\|C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\|^2 =$$

(учитывая, что $\|C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\|^2 = \operatorname{Sp}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}G^{\text{т}}_{\mathtt{OR}}C_{\mathtt{OR}} = \operatorname{Sp}C_{\mathtt{OR}}$)

$$= \sigma^4 (N(r+m)+3)\|\Phi^{\text{т}}\Phi E^{\text{т}}_{\mathtt{OR}ij}\|^2 \operatorname{Sp}C_{\mathtt{OR}} <$$

(учитывая неравенство $\Phi^{\text{т}}\Phi < (p+1)I_{N(r+m)\times N(r+m)}$
$\Rightarrow \|\Phi^{\text{т}}\Phi\|^2 < (p+1)^2 N(r+m)$)

$$< \sigma^4 (N(r+m)+3)(p+1)^2 N(r+m)\|E^{\text{т}}_{\mathtt{OR}ij}\|^2 \operatorname{Sp}C_{\mathtt{OR}} <$$

(учтем, что $\|E_{\mathtt{OR}ij}\|^2 \leqslant N$, поскольку вследствие определения $E_{\mathtt{OR}ij} \doteq \partial G_{\mathtt{OR}}/\partial\gamma_{ij}$ число ненулевых элементов (единиц) в матрице $E_{\mathtt{OR}ij}$ равно числу клеточных строк вида $(0\ldots0\gamma_0\ldots\gamma_p0\ldots0)$ в матрице $G_{\mathtt{OR}}$)

$$< \sigma^4 (N(r+m)+3)N^2(p+1)^2(r+m)\operatorname{Sp}C_{\mathtt{OR}} <$$

$$< \sigma^4 N^3 (p+1)^2 (r+m+1)^2 \operatorname{Sp}C_{\mathtt{OR}} <$$

$$< \sigma^4 N^4 (p+1)^2 (r+m+1)^2 \operatorname{Sp}(\gamma_\theta^{\text{т}}\gamma_\theta)^{-1}\,.$$

Следствие доказано.

Предложение 11. *Пусть $W > 0$ — симметричная п.о. матрица порядка n, каждый элемент которой ограничен сверху неравенством:*

$$w_{ij} < c.$$

Тогда имеет место оценка

$$W < ncI_{n\times n}.$$

Доказательство. Отношение $W < U$ по определению означает

$$\forall x \quad x^{\mathrm{T}}Wx < x^{\mathrm{T}}Ux.$$

Согласно условию,

$$x^{\mathrm{T}}Wx = \sum_{ij} x_i w_{ij} x_j < c\sum_{ij} x_i x_j.$$

С другой стороны,

$$c\sum_{ij} x_i x_j = cx^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \cdots 1)\, x \leqslant$$

(неравенство Коши—Буняковского)

$$\leqslant cx^{\mathrm{T}}x\,(1 \cdots 1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = ncx^{\mathrm{T}}x$$

Следовательно,

$$W < ncI_{n\times n}.$$

Предложение доказано.

Далее, согласно (117)

$$\mathbf{M}\,\omega'\omega'^{\mathrm{T}} =$$
$$= \sigma^2\mathbf{M}\,V_*^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}V_* + \sigma^4 W,$$
$$W \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad n \doteq r(r+m)(p+1),$$

и (ij, kl)-й элемент матрицы W по следствию утверждения 12 ограничен сверху константой

$$c = N^4(p+1)^2(r+m+1)^2\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_\theta^{\mathrm{T}}\gamma_\theta)^{-1}\,.$$

По предложению 11,

$$0 < W < nN^4(p+1)^2(r+m+1)^2\left[\mathrm{Sp}\left(\gamma_\theta^{\mathrm{T}}\gamma_\theta\right)^{-1}\right]I_{n\times n} <$$

$$< N^4(p+1)^3 r(r+m+1)^3\left[\mathrm{Sp}\left(\gamma_\theta^{\mathrm{T}}\gamma_\theta\right)^{-1}\right]I_{n\times n}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}\,\omega'\omega'^{\mathrm{T}} =$$

$$= \sigma^2\mathbf{M}\,V_*^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}V_* + \sigma^4 W,$$

$$0 < W < c_1 I,$$

$$c_1 \doteq N^4(p+1)^3 r(r+m+1)^3\,\mathrm{Sp}\left(\gamma_\theta^{\mathrm{T}}\gamma_\theta\right)^{-1}.$$

Первое утверждение леммы доказано.

2) Согласно определениям,

$$\mathbf{M}\,\omega'' = \mathbf{M}\,\left(\check z^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\Phi\check z\right)'' = \mathbf{M}\,\check z^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}\left(G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\right)''\Phi\check z.$$

Подставив $\check z = z_* + \eta$, получим

$$\mathbf{M}\,\omega'' = \mathbf{M}\,z_*^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}\left(G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\right)''\Phi z_* + \mathbf{M}\,\eta^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}\left(G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\right)''\Phi\eta =$$

$$= \mathbf{M}\,z_*^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}\left(G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\right)''\Phi z_* + \sigma^2\,\mathrm{Sp}\left(\Phi^{\mathrm{T}}G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\Phi\right)''.$$

Рассмотрим последний сомножитель.

$$\mathrm{Sp}\left(\Phi^{\mathrm{T}}G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\Phi\right)'' = \mathrm{Sp}\left(G^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G\right)'' = \left(\mathrm{Sp}\,G^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G\right)'' = \tag{118}$$

$$= \left(\mathrm{Sp}\,C_{\mathtt{OR}}GG^{\mathrm{T}}\right)'' = \left(\mathrm{Sp}\,C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)'' = \mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)''.$$

Учитывая эту цепочку равенств, имеем

$$\mathbf{M}\,\omega'' = \mathbf{M}\,z_*^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}\left(G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\right)''\Phi z_* + \sigma^2\,\mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)'' =$$

$$= \mathbf{M}\,\omega''(\check z = z_*) + \sigma^2\,\mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)''.$$

Применив лемму 6 с учетом $\theta = \theta_*$, $\check z = z_*$ и равенства

$$\widehat V_{\mathtt{M}}(\check z = z_*) = V(z_*) \doteq V_*,$$

получим

$$\mathbf{M}\,\omega'' = \mathbf{M}\,V_*^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}V_* + \sigma^2\,\mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)''.$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)'' =$$

$$= \mathrm{Sp}\left(G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\right)'' \Phi\Phi^{\mathrm{T}} = \tag{119}$$

(см. (113), (114), положив $C \doteq C_{\mathtt{OR}}$, $G \doteq G_{\mathtt{OR}}$)

$$= \mathrm{Sp}\left\{\Pi E_{kl}^{\mathrm{T}}CE_{ij}\Pi - \right.$$

$$-G^{\mathrm{T}}C\left(E_{kl}G^{\mathrm{T}}CE_{ij} + E_{ij}G^{\mathrm{T}}CE_{kl}\right)\Pi -$$

$$\left.-G^{\mathrm{T}}CE_{ij}\Pi E_{kl}^{\mathrm{T}}CG\right\}\Phi\Phi^{\mathrm{T}} \leqslant$$

(предложение 9)

$$\leqslant \sqrt{n}\left\{\|\Pi E_{kl}^{\mathrm{T}}CE_{ij}\Pi\| + \right.$$

$$+\|G^{\mathrm{T}}CE_{kl}G^{\mathrm{T}}CE_{ij}\Pi\| + \|G^{\mathrm{T}}CE_{ij}G^{\mathrm{T}}CE_{kl}\Pi\| +$$

$$\left.+\|G^{\mathrm{T}}CE_{ij}\Pi E_{kl}^{\mathrm{T}}CG\|\right\}\|\Phi\Phi^{\mathrm{T}}\|.$$

Учтем неравенства $\|\Pi A\| \leqslant \|A\|$, $\|E_{kl}\|^2 \leqslant N$,

$$\|\Phi\|^2 = (N-p)(r+m) \Rightarrow \|\Phi\Phi^{\mathrm{T}}\| \leqslant (N-p)(r+m)\,.$$

Тогда

$$\mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)'' \leqslant \sqrt{n}N(N-p)(r+m)\left\{\|C\| + 2\|G^{\mathrm{T}}CG^{\mathrm{T}}C\| + \|G^{\mathrm{T}}CCG\|\right\}.$$

Теперь привлечем соотношения $\|C\| = \|C^{1/2}\|^2 = \mathrm{Sp}\,C$, $\|G^{\mathrm{T}}C\|^2 = \mathrm{Sp}\,CGG^{\mathrm{T}}C = \mathrm{Sp}\,C$:

$$\mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)'' \leqslant 4\sqrt{n}N(N-p)(r+m)\,\mathrm{Sp}\,C.$$

В итоге, подставив $n = r(r+m)(p+1) \leqslant (r+m)^2(p+1)$ и восстановив в правой части опущенный индекс $\mathtt{OR}$, получим оценку

$$\mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)'' \leqslant 4(p+1)^{1/2}N^2(r+m)^2\,\mathrm{Sp}\,C_{\mathtt{OR}} \leqslant$$

$$\leqslant 4(p+1)^{1/2}N^3(r+m)^2\,\mathrm{Sp}\left(\gamma_\theta^{\mathrm{T}}\gamma_\theta\right)^{-1}.$$

Лемма 7 доказана.

Учитывая равенства $J_1' \doteq J_{1\theta}' = \omega_\gamma' D$ и $J_1'' \doteq J_{1\theta\theta}'' = D^{\mathrm{T}}\omega_{\gamma\gamma}''D$, получаем первые два утверждения теоремы.

Далее нужно перейти от $\mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)''$ к оценке сверху для $\mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)_{\theta\theta}''$.

$$\mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)_{\theta\theta}'' = \mathrm{Sp}\,D^{\mathrm{T}}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)''D = \mathrm{Sp}\left(G_{\mathtt{OR}}^{\mathrm{T}}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\right)''\Phi DD^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}.$$

Следуя доказательству от формулы (119) с заменой $\Phi\Phi^{\text{т}}$ на $\Phi DD^{\text{т}}\Phi^{\text{т}}$, получим оценку

$$\mathrm{Sp}\left(C_{\mathtt{OR}}C^{-1}\right)''_{\theta\theta} \leqslant 4\,(p+1)^{1/2}\,N^3\,(r+m)^2\,\|DD^{\text{т}}\|\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_\theta^{\text{т}}\gamma_\theta)^{-1}\,,$$

и далее 3-е утверждение теоремы.

Теорема 5 доказана.

Список литературы

[1] *Белоглазов И.Н.* Оптимальные совместные оценивание и идентификация в дискретных линейных системах // ДАН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 811–815.

[2] *Maine R.E., Iliff K.W.* Formulation and implementation of a practical algorithm for parameter estimation with process and measurement noise // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1981. V. 41. No. 3. P. 558–579.

[3] *Егоршин А.О.* Метод наименьших квадратов и "быстрые" алгоритмы в вариационных задачах идентификации и фильтрации (метод ВИ) // Автометрия. 1988. № 1. С. 30–42.

[4] *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Наука, 1975.

[5] *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1977.

[6] *Aoki M., Yue P.C.* On a priori error estimates of some identification methods // IEEE Trans. on Automat. Control. 1970. V. AC-15. P. 541–548.

[7] *Fuller W.A.* Measurement Error Models. New York: Wiley, 1987.

[8] *Бойчук Л.М., Чихрадзе Т.А.* Сравнение моделей, получаемых по методу наименьших квадратов и по ортогональной регрессии // Автоматика. 1985. № 5. С. 57–61.

[9] *Aoki M., Yue P.C.* On the certain convergence questions in system identification // SIAM Journal of Control. 1970. V. 8. No. 2. P. 239–256.

[10] *Ломов А.А.* Статистические свойства орторегрессионных методов оценивания параметров и решений систем линейных разностных уравнений // Оптимизация, Управление, Интеллект. 1997. № 2. С. 40–51.

[11] *Ломов А.А.* Идентификация линейных динамических систем по коротким участкам переходных процессов при аддитивных измерительных возмущениях // Известия РАН ТиСУ. 1997. № 3. С. 20–26.

[12] *Ломов А.А.* Условия различимости стационарных линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 261–266.

[13] *Ломов А.А.* О статистических свойствах оценок параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Труды III Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO '04. Москва, 28-30 января 2004 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2004. С. 209–224.

[14] *Ломов А.А.* Сравнение методов оценивания параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Автоматика и телемеханика. 2005. № 1.

[15] *Виллемс Я.*От временного ряда к линейной системе // Теория систем. Математические методы и моделирование. М.: Мир, 1989. С. 8–191. (Новое в зарубежной науке. Сер. Математика; Т. 44).

[16] *Ломов А.А.* О различимости стационарных линейных систем с коэффициентами, зависящими от параметра // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6. № 4(16). С. 60–66.

[17] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М. : Наука, 1988.

[18] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

[19] *Gleser L.J.* Estimation in a multivariate "errors in variables" regression model: large sample results // The Annals of Statistics. 1981. V. 9. No. 1. P. 24–44.

[20] *Ворчик Б.Г.* Идентифицируемость линейных параметрических стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1985. № 5. С. 64–78. № 7. С. 96–109.

[21] *Цыпкин А.З.* Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984.

[22] *Жданов А.И., Кацюба О.А.* Идентификация по методу наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии при аддитивных ошибках измерений // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 29–38.

[23] *Льюнг Л.С.* Идентификация систем. М.: Наука, 1991.

[24] *Ломов А.А.* Минимальные описания стационарных линейных моделей // Труды Института математики СО РАН. Т.28, Модели и методы оптимизации. С. 91-117. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1994.

[25] *Kalman R.E.* Mathematical Description of Linear Dynamical Systems // SIAM Journal of Control. 1963.Ser. A. V. 1. No. 2. P. 152–192.

[26] *Kailath T.* Linear Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.

[27] *Popov V.M.* Some Properties of the Control Systems with Irreducible Matrix-Transfer Function // Lecture Notes in Mathematics. V. 144. Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems, II. P. 169–180 / Berlin: Springer-Verlag, 1969.

[28] *Fellman J.* On the effect of “nuisance” parameters in linear models // Sankhya. The Indian Jornal of Statistics. 1976. V. 38. Ser. A. Pt. 2. P. 197–200.

[29] *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применение. М.: Наука, 1968.

[30] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1990.

[31] *Егоршин А.О.* Вариационная дискретизация и идентификация линейных стационарных дифференциальных уравнений // Труды III Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO ’04. Москва, 28-30 января 2004 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2004. С. 1824–1883.