ЗДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 3, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

групповой анализ дифференциальных уравнений

Поиск фактор-системы уравнений магнитной гидродинамики

С.Ю. Маламанов

Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В работе рассматривается нахождение фактор–системы уравнений магнитной гидродинамики – системы дифференциальных уравнений, связывающей только инварианты (конечный функциональный базис инвариантов) подгруппы основной группы, допускаемой рассматриваемой системой. Рассматриваются решения инвариантные относительно оператора растяжения. Такого рода решения наиболее характерны для задач, возникающих при моделировании физических процессов.

Ключевые слова: группы симметрии, инвариантное решение, понижение порядка, базис инвариантов, дифференциальные уравнения.

Abstract

The paper deals with finding the quotient system of equations of magnetohydrodynamics - the system of differential equations which connects only the invariants (finite functional basis of invariants) subgroup of the main group permitted by the system. We consider solutions invariant under the extension operator. Such solutions are most typical for the problems arising in the modeling of physical processes.

Keywords: symmetry group, invariant solution, order decreasing, the basis of invariants, differential equations.

Введение

Групповой анализ дифференциальных уравнений является мощным средством исследования нелинейных уравнений физики и механики. Это обусловлено тем, что основные законы природы могут быть сформулированы с помощью инвариантности подходящих величин. Знание группы преобразований, допускаемой данной системой уравнений – как обнаружил Софус Ли - способствует нахождению частных (инвариантные) решений этой системы в явном виде. Теория Софуса Ли предоставляет алгоритмы обнаружения инвариантности как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений в частных производных. Свойство инвариантности позволяет отыскивать классы частных решений, в частности, за счет уменьшения числа независимых переменных. Построение классов частных решений основано на теории инвариантов допускаемой группы. Инвариантность уравнений (системы уравнений), описывающих постановку любой задачи физики и механики относительно группы растяжения (подобия) является необходимым и обязательным условием. С другой стороны, для отыскания конкретных инвариантных решений надо выбрать подгруппу основной группы или взять подалгебру операторов основной алгебры Ли. Поэтому в нашем случае это будет оператор растяжения.

Рассмотрим уравнения магнитной гидродинамики. Для изотермического течения вязкой, несжимаемой, проводящей жидкости закон сохранения импульса имеет вид [1]

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u}\right)=-\nabla p+\mu\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}, \tag{1}$$

где плотность тока находится из обобщенного закона Ома:

$$\boldsymbol{j}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}).$$

Считая, что электрическое поле отсутствует $\boldsymbol{E}=0$, перепишем (1) по-другому

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u}\right)=-\nabla p+\mu\Delta\boldsymbol{u}+\sigma(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}. \tag{2}$$

Уравнение переноса вектора $\boldsymbol{B}$ представим в форме

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_m\sigma}\Delta\boldsymbol{B}+\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}). \tag{3}$$

Введя, компоненты вектора $\boldsymbol{u}(u,v,w)$ и вектора $\boldsymbol{B}(B_x,B_y,B_z)$, запишем проекции уравнений (22) и (23) на ось x декартовой прямоугольной системы координат:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\sigma[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}]_x, \qquad (2)'$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}=\frac{1}{\mu_m\sigma}\left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}\right)+\ [\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})]_x\,, \qquad (3)'$$

где x у прямых скобок в последних слагаемых означает, что это проекция соответствующего члена на ось x. Введем неоднородные растяжения всех переменных в виде

$$t=a^{\alpha}\hat{t}\ ;\ \ \boldsymbol{x}=a\widehat{\boldsymbol{x}}\ ;\ \ \boldsymbol{u}=a^{\beta}\widehat{\boldsymbol{u}}\ ;\ \ \boldsymbol{B}=a^{\gamma}\widehat{\boldsymbol{B}}\ ;\ \ p=a^{\varphi}\hat{p}. \qquad (4)$$

Также подвергнем «преобразованию» дифференциальные операторы:

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{a^{\alpha}\partial\hat{t}}\ ;\ \ \nabla=\frac{1}{a}\widehat{\nabla}\ ;\ \ \Delta=\frac{1}{a^2}\hat{\Delta}.$$

Из приведенных выражений видно, что прямоугольные координаты, проекции скорости и проекции индукции магнитного поля преобразуются по одному и тому же (в каждом случае своему) закону. «Галочкой» сверху обозначена преобразованная величина и оператор. Сначала подставим преобразованные переменные в уравнение (2)

$$\rho\left(\frac{a^{\beta}}{a^{\alpha}}\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial\hat{t}}+\frac{a^{2\beta}}{a}(\widehat{\boldsymbol{u}}\widehat{\nabla})\widehat{\boldsymbol{u}}\right)+\frac{a^{\varphi}}{a}\widehat{\nabla}p=\eta\frac{a^{\beta}}{a^2}\hat{\Delta}\widehat{\boldsymbol{u}}+\sigma a^{\beta}a^{2\gamma}\big(\widehat{\boldsymbol{u}}\times\widehat{\boldsymbol{B}}\big)\times\widehat{\boldsymbol{B}}.$$

Разделим обе части уравнения на степенной комплекс $\left(\frac{a^{\beta}}{a^{\alpha}}\right)$ у нестационарного члена в левой части. В результате получим

$$\rho\left(\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial\hat{t}}+\frac{a^{2\beta}}{a}\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}(\widehat{\boldsymbol{u}}\widehat{\nabla})\widehat{\boldsymbol{u}}\right)+\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}\frac{a^{\varphi}}{a}\widehat{\nabla}p=\eta\,\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}\frac{a^{\beta}}{a^2}\hat{\Delta}\widehat{\boldsymbol{u}}+\sigma\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}\,a^{\beta}a^{2\gamma}\big(\widehat{\boldsymbol{u}}\times\widehat{\boldsymbol{B}}\big)\times\widehat{\boldsymbol{B}}$$

или

$$\rho\left(\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial\hat{t}}+a^{\beta+\alpha-1}(\widehat{\boldsymbol{u}}\widehat{\nabla})\widehat{\boldsymbol{u}}\right)+a^{\varphi+\alpha-\beta-1}\widehat{\nabla}p=\eta\,a^{\alpha-2}\hat{\Delta}\widehat{\boldsymbol{u}}+\sigma a^{2\gamma+\alpha}\big(\widehat{\boldsymbol{u}}\times\widehat{\boldsymbol{B}}\big)\times\widehat{\boldsymbol{B}}.$$

Требование инвариантности уравнения (2) относительно преобразований (4) сводится к сравнению множителей, появляющихся в отдельных слагаемых. Следовательно, в нашем случае должно быть

$$a^{\beta+\alpha-1} = a^{\varphi+\alpha-\beta-1} = a^{\alpha-2} = a^{2\gamma+\alpha} \equiv 1. \tag{5}$$

Таким образом, получается система уравнений относительно показателей степени – $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$.

$$\begin{cases} a^{\beta+\alpha-1} = 1, \\ a^{\varphi+\alpha-\beta-1} = 1, \\ a^{\alpha-2} = 1, \\ a^{2\gamma+\alpha} = 1, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta + \alpha - 1 = 0, \\ \varphi + \alpha - \beta - 1 = 0, \\ \alpha - 2 = 0, \\ 2\gamma + \alpha = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \gamma = -1, \\ \beta = -1, \\ \varphi = -2, \\ \alpha = 2. \end{cases} \tag{6}$$

Полученное решение позволяет записать конкретное преобразование семейства преобразований (4). Однако оно получено только из рассмотрения инвариантности уравнения движения. Поэтому требуется произвести аналогичную процедуру и с уравнением (3), образующим систему с уравнением (2). После подстановки (4) в (3), получим

$$\frac{a^\gamma}{a^\alpha}\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{B}}}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{\mu_m \sigma}\frac{a^\gamma}{a^2}\hat{\Delta}\widehat{\boldsymbol{B}} + \frac{a^\beta a^\gamma}{a}\hat{\nabla} \times \left(\widehat{\boldsymbol{u}} \times \widehat{\boldsymbol{B}}\right).$$

Разделим обе части уравнения на степенной комплекс $\left(\frac{a^\gamma}{a^\alpha}\right)$ у нестационарного члена в левой части. В результате получим

$$\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{B}}}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{\mu_m \sigma}\frac{a^\alpha}{a^\gamma}\frac{a^\gamma}{a^2}\hat{\Delta}\widehat{\boldsymbol{B}} + \frac{a^\alpha}{a^\gamma}\frac{a^\beta a^\gamma}{a}\hat{\nabla} \times \left(\widehat{\boldsymbol{u}} \times \widehat{\boldsymbol{B}}\right).$$

Соответствующая система уравнений для показателей степеней примет вид

$$\begin{cases} a^{\alpha-2} = 1, \\ a^{\beta+\alpha-1} = 1, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = -1. \end{cases}$$

Сравнивая с системой (6), видим, никакой новой и противоречивой информации не появилось. В итоге получим окончательный вид преобразований (4), соответствующий нашей системе уравнений

$$t = a^2\hat{t}\,; \;\; \boldsymbol{x} = a\widehat{\boldsymbol{x}}\,; \;\; \boldsymbol{u} = \tfrac{1}{a}\widehat{\boldsymbol{u}}\,; \;\; \boldsymbol{B} = \tfrac{1}{a}\widehat{\boldsymbol{B}}\,; \;\; p = \tfrac{1}{a^2}\hat{p}. \tag{7}$$

На следующем этапе, руководствуясь традиционным алгоритмом [2] необходимо найти инварианты группы растяжений и выразить через них независимые и зависимые переменные. Этим мы уменьшим суммарное количество переменных и тем самым, в определенной мере, упростим задачу. Для нахождения инвариантов следует решить уравнение

$$\boldsymbol{X}(I) = \xi^i(x)\frac{\partial I}{\partial x^i} = 0. \qquad\qquad i = (1, \dots, N) \tag{8}$$

В нашем случае $N = 11$ и (8) примет следующий вид

$$\boldsymbol{X}(I)=\xi_t\frac{\partial I}{\partial t}+\xi_x\frac{\partial I}{\partial x}+\xi_y\frac{\partial I}{\partial y}+\xi_z\frac{\partial I}{\partial z}+\eta_u\frac{\partial I}{\partial u}+\eta_v\frac{\partial I}{\partial v}+\eta_w\frac{\partial I}{\partial w}+\eta_p\frac{\partial I}{\partial p}+$$

$$+\eta_{B_x}\frac{\partial I}{\partial B_x}+\eta_{B_y}\frac{\partial I}{\partial B_y}+\eta_{B_z}\frac{\partial I}{\partial B_z}=0.$$

Координаты векторного поля $\xi_i, i=(1,\dots,4)$ и $\eta_j,\ j=(1,\dots,7)$ находятся из уравнений Ли и формул преобразования растяжения (7). Имеем последовательно:

$$\xi_t=\left.\frac{dt}{da}\right|_{a=1}=2a\hat{t}|_{a=1}=2\hat{t},$$

$$\xi_x=\left.\frac{dx}{da}\right|_{a=1}=\hat{x},$$

аналогично находим $\xi_y=\hat{y}$ и $\xi_z=\hat{z}$,

$$\xi_u=\left.\frac{du}{da}\right|_{a=1}=\frac{d}{da}(a^{-1}\hat{u})=-\left.\frac{\hat{u}}{a^2}\right|_{a=1}=-\hat{u},$$

аналогично находим $\xi_v=-\hat{v}$ и $\xi_w=-\widehat{w},$

$$\xi_{B_x}=\left.\frac{dB_x}{da}\right|_{a=1}=\frac{d}{da}\left(a^{-1}\widehat{B_x}\right)=-\left.\frac{\widehat{B_x}}{a^2}\right|_{a=1}=-\widehat{B_x},$$

аналогично находим $\xi_{B_y}=-\widehat{B_y}$ и $\xi_{B_z}=-\widehat{B_z}$,

$$\xi_p=\left.\frac{dp}{da}\right|_{a=1}=\frac{d}{da}(a^{-2}\hat{p})=-\left.\frac{\widehat{2p}}{a^3}\right|_{a=1}=-\widehat{2p}.$$

Окончательно оператор группы растяжения примет вид («галочки» над переменными опущены для упрощения записи)

$$\boldsymbol{X}=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}-u\frac{\partial}{\partial u}-v\frac{\partial}{\partial v}-w\frac{\partial}{\partial w}-2p\frac{\partial}{\partial p}-$$

$$-B_x\frac{\partial}{\partial B_x}-B_y\frac{\partial}{\partial B_y}-B_z\frac{\partial}{\partial B_z}. \tag{9}$$

Заметим, что в отсутствии магнитного поля$\left(B_x=B_y=B_z\equiv 0\right)$, оператор (9) упрощается и получается хорошо известный результат для группы растяжений допускаемой уравнениями Навье-Стокса. Теперь инварианты можно найти из уравнения

$$\boldsymbol{X}(I) = 2t\frac{\partial I}{\partial t} + x\frac{\partial I}{\partial x} + y\frac{\partial I}{\partial y} + z\frac{\partial I}{\partial z} - u\frac{\partial I}{\partial u} - v\frac{\partial I}{\partial v} - w\frac{\partial I}{\partial w} - 2p\frac{\partial I}{\partial p} -$$

$$-B_x\frac{\partial I}{\partial B_x} - B_y\frac{\partial I}{\partial B_y} - B_z\frac{\partial I}{\partial B_z} = 0,$$

или из системы уравнений характеристик, для вышеприведенного уравнения

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{dz} = -\frac{du}{u} = -\frac{dv}{v} = -\frac{dw}{w} = -\frac{dp}{2p} =$$

$$= -\frac{dB_x}{B_x} = -\frac{dB_y}{B_y} = -\frac{dB_z}{B_z}.$$

Так, например, интегрирование уравнения

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln C_1 = \ln x - \tfrac{1}{2}\ln t = \ln\tfrac{x}{\sqrt{t}},\ \text{откуда}\quad C_1 = \tfrac{x}{\sqrt{t}},$$

позволяет найти первый инвариант - $\frac{x}{\sqrt{t}}$.

Подобным образом можно найти и другие инварианты

$$\frac{dt}{2t} = -\frac{dp}{2p}\ ,\text{интегрируя получим}\ \ \ln C_2 = \ln(pt)\quad C_2 = pt,$$

$$\frac{dt}{2t} = -\frac{du}{u}\ \rightarrow\ \ln C_3 = \ln\left(\sqrt{t}u\right)\ \rightarrow C_3 = \sqrt{t}u,$$

$$\frac{dt}{2t} = -\frac{dB_x}{B_x}\ \rightarrow\ \ln C_4 = \ln\left(\sqrt{t}B_x\right)\ \rightarrow C_4 = \sqrt{t}B_x\ .$$

В результате, инварианты имеют вид

$$\frac{x}{\sqrt{t}}\ ,\frac{y}{\sqrt{t}},\frac{z}{\sqrt{t}}, pt, \sqrt{t}u, \sqrt{t}v, \sqrt{t}w, \sqrt{t}B_x, \sqrt{t}B_{y,}\sqrt{t}B_z\ .$$

Введя автомодельные переменные

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{t}}\ ,\text{где}\ \ \boldsymbol{\xi}(\xi,\eta,\varsigma)\ \text{и}\ \ \boldsymbol{x}(x,y,z),$$

можно инвариантные решения записать как:

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{U}(\xi,\eta,\varsigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\xi}),$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}), \tag{10}$$

$$p = \frac{1}{t}P(\boldsymbol{\xi}).$$

В координатной форме первые два уравнения (10) будут выглядеть так:

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}}U(\xi,\eta,\varsigma), \quad B_x = \frac{1}{\sqrt{t}}H_\xi(\xi,\eta,\varsigma),$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{t}}V(\xi,\eta,\varsigma), \quad B_y = \frac{1}{\sqrt{t}}H_\eta(\xi,\eta,\varsigma), \tag{11}$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{t}}W(\xi,\eta,\varsigma), \quad B_z = \frac{1}{\sqrt{t}}H_\varsigma(\xi,\eta,\varsigma).$$

Эти выражения вместе с представлением для давления надо подставить в исходные уравнения (2) и (3). Учитывая довольно громоздкие преобразования, сделаем это только для проекций соответствующих уравнений на ось x. Это уравнения $(2)'$ и $(3)'$. Прежде всего, распишем подробно последнее слагаемое в правой части $(2)'$:

$$[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}]_{\boldsymbol{x}} = B_z(wB_x - uB_z) - B_y\big(uB_y - vB_x\big).$$

Теперь $(2)'$ примет вид

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) +$$

$$+B_z(wB_x - uB_z) - B_y\big(uB_y - vB_x\big).$$

Преобразовываем последовательно отдельные слагаемые:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}U\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)U + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{U}{2t\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \varsigma}\frac{d\varsigma}{dt}\right) =$$

$$= -\frac{U}{2t\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(-\frac{\xi}{2t}\right) + \frac{\partial U}{\partial \eta}\left(-\frac{\eta}{2t}\right) + \frac{\partial U}{\partial \varsigma}\left(-\frac{\varsigma}{2t}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2t\sqrt{t}}\left(U + \xi\frac{\partial U}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial U}{\partial \eta} + \varsigma\frac{\partial U}{\partial \varsigma}\right).$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}}U\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}U\right) = \frac{U}{t}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dx} + \frac{\partial U}{\partial \varsigma}\frac{d\varsigma}{dx}\right) = \frac{U}{t}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{U}{t\sqrt{t}}\frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$v\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $w\dfrac{\partial u}{\partial z}$ преобразовываются аналогично и будут равны:

$$v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{V}{t\sqrt{t}}\frac{\partial U}{\partial \eta}, \qquad w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{W}{t\sqrt{t}}\frac{\partial U}{\partial \varsigma}.$$

Слагаемое с градиентом давления примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{t}P\right)=\frac{1}{t}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{t}\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx}+\frac{\partial P}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dx}+\frac{\partial P}{\partial \varsigma}\frac{d\varsigma}{dx}\right)=\frac{1}{t\sqrt{t}}\frac{\partial P}{\partial \xi}.$$

Теперь преобразуем «лапласиан»:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{\sqrt{t}}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)\frac{d\xi}{dx}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)\frac{d\eta}{dx}+\frac{\partial}{\partial \varsigma}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)\frac{d\varsigma}{dx}\right)$$
$$=\frac{1}{t\sqrt{t}}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

Слагаемые $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ преобразуются аналогично и будут равны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{t\sqrt{t}}\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{t\sqrt{t}}\frac{\partial^2 U}{\partial \varsigma^2}.$$

Наиболее просто преобразуются последние два слагаемых в правой части уравнения $(2)'$ - простой подстановкой распределений (11):

$$B_z(wB_x-uB_z)-B_y\left(uB_y-vB_x\right)=\frac{1}{t\sqrt{t}}\Big(H_\varsigma\left(WH_\xi-UH_\varsigma\right)-H_\eta\left(UH_\eta-VH_\xi\right)\Big).$$

Собирая все преобразованные слагаемые вместе, получим окончательно

$$-\frac{1}{2}\rho\left(U+\xi\frac{\partial U}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial U}{\partial \eta}+\varsigma\frac{\partial U}{\partial \varsigma}\right)+\left(U\frac{\partial U}{\partial \xi}+V\frac{\partial U}{\partial \eta}+W\frac{\partial U}{\partial \varsigma}\right)+\frac{\partial P}{\partial \xi}=$$

$$=\mu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)+\sigma\Big(H_\varsigma\left(WH_\xi-UH_\varsigma\right)-H_\eta\left(UH_\eta-VH_\xi\right)\Big).$$

Преобразуем теперь уравнение $(3)'$, предварительно расписав подробнее последнее слагаемое в правой части

$$[\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})]_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(uB_y-vB_x\right)-\frac{\partial}{\partial z}(wB_x-uB_z).$$

Так же, как и в случае с уравнением $(2)'$ преобразуем последовательно отдельные слагаемые.

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}H_\xi\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)H_\xi+\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\partial H_\xi}{\partial t}=-\frac{H_\xi}{2t\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{\partial H_\xi}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dt}+\frac{\partial H_\xi}{\partial \varsigma}\frac{d\varsigma}{dt}\right)=$$

$$=-\frac{H_\xi}{2t\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{\partial H_\xi}{\partial \xi}\left(-\frac{\xi}{2t}\right)+\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}\left(-\frac{\eta}{2t}\right)+\frac{\partial H_\xi}{\partial \varsigma}\left(-\frac{\varsigma}{2t}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\left(H_\xi+\xi\frac{\partial H_\xi}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}+\varsigma\frac{\partial H_\xi}{\partial \varsigma}\right).$$

Теперь преобразуем «лапласиан» B_x:

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H_\xi}{\sqrt{t}}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial H_\xi}{\partial \xi}\right)=$$

$$=\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial H_\xi}{\partial \xi}\right)\frac{d\xi}{dx}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial H_\xi}{\partial \xi}\right)\frac{d\eta}{dx}+\frac{\partial}{\partial \varsigma}\left(\frac{\partial H_\xi}{\partial \xi}\right)\frac{d\varsigma}{dx}\right)=\frac{1}{t\sqrt{t}}\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial \xi^2}.$$

Подобным же образом получаем

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}=\frac{1}{t\sqrt{t}}\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial \eta^2},\qquad \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}=\frac{1}{t\sqrt{t}}\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial \varsigma^2}.$$

Последнее слагаемое преобразуется простой подстановкой

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(uB_y-vB_x\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(wB_x-uB_z\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{\sqrt{t}}\frac{H_\eta}{\sqrt{t}}-\frac{V}{\sqrt{t}}\frac{H_\xi}{\sqrt{t}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{W}{\sqrt{t}}\frac{H_\xi}{\sqrt{t}}-\frac{U}{\sqrt{t}}\frac{H_\varsigma}{\sqrt{t}}\right)$$

$$=\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\left(UH_\eta-VH_\xi\right)\frac{d\eta}{dy}-\frac{\partial}{\partial \varsigma}\left(WH_\xi-UH_\varsigma\right)\frac{d\varsigma}{dz}\right)=$$

$$=\frac{1}{t\sqrt{t}}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\left(UH_\eta-VH_\xi\right)-\frac{\partial}{\partial \varsigma}\left(WH_\xi-UH_\varsigma\right)\right).$$

Получим окончательно, собрав все преобразованные слагаемые вместе:

$$-\frac{1}{2}\left(H_\xi+\xi\frac{\partial H_\xi}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial H_\xi}{\partial \eta}+\varsigma\frac{\partial H_\xi}{\partial \varsigma}\right)=\frac{1}{\mu_m\sigma}\left(\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial \varsigma^2}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\left(UH_\eta-VH_\xi\right)-\frac{\partial}{\partial \varsigma}\left(WH_\xi-UH_\varsigma\right)\right).$$

Опуская подобные преобразования уравнений (2) и (3) для y и z-компонент, запишем окончательно полученную систему уравнений в векторной форме

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0, \\ \frac{\rho}{2}(-\boldsymbol{U} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U}) + \nabla P = \mu \Delta \boldsymbol{U} + \sigma(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}, \\ \frac{1}{2}(-\boldsymbol{H} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{H}) = \frac{1}{\mu_m \sigma} \Delta \boldsymbol{H} + \nabla \times (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{H}). \end{cases} \tag{12}$$

Таким образом, построена фактор-система для уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой изотермической проводящей жидкости. Видно, что дифференциальные уравнения связывают только инварианты допускаемой группы неоднородных растяжений. Главным упрощением является тот факт, это система не эволюционного типа, в отличие от первоначальной. Основная цель – уменьшение числа независимых переменных – достигнута.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В. В., Павловский В. А.* Установившиеся турбулентные течения несжимаемой жидкости. – СПб: СПбГУ, 2013. – 483 с.

2. *Овсянников Л.В*. Групповой анализ дифференциальных уравнений. -М.: Наука, 1978. - 400 с.